

ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ ЗА ПРАВИЛОМ ЛОПІТАЛЯ

Коваль О.О. – ст. 1 курсу

Науковий керівник – к.пед.н., доцент Рум'янцева К. Є.

Вінницький навчально-науковий інститут економіки ТНЕУ

Знаходження границь числової послідовності – важлива але не проста задача. Границя числової послідовності досить часто зустрічається в питаннях математичного аналізу, зокрема при вивченні похідної, інтегралу, числових та степеневих рядів.

Для знаходження границі числової послідовності ми скористаємось методом, який рідко зустрічається на практиці та досить ефективний при дослідженні послідовностей певного типу – правилом Лопіталю.

Маркіз Гійом Франсуа Лопіталь народився 1661 р. і ще з молодості зайнявся математичними дослідженнями. Завдяки своєму таланту та наполегливості Лопіталь став відомий як один з найвидатніших математиків Франції того часу.

1692 р. відбулась доленосна зустріч Лопіталю з 24-річним Йоганном Бернуллі. Бернуллі вже був знайомий з новими методами диференціального числення німецького математика Лейбніца, та розповідав про них на лекціях французьким математикам, серед яких був і Лопіталь. Пізніше Бернуллі поселився в маєтку Лопіталю та проводив для нього лекції. Заняття були успішні. У 1693 році Лопіталю обрали членом Паризької академії наук.

В 1996 р. Лопіталь, не вказуючи свого імені, опублікував «Аналіз нескінченно малих». В передмові ми дізнаємось, чому книга була видана анонімно. Виявляється, Лопіталь зробив це через скромність. Він пише: «Я багато чим зобов'язаний заняттям з Бернуллі. Я без всякого сорому користувався його відкриттями і відкриттями Лейбніца. Тому я не проти, щоб вони пред'явили свої авторські права на все що їм завгодно, сам буду задоволений тим, що вони зволють залишити мені».

Великою перевагою книги Лопіталю є простота і строга послідовність, чіткість стилю та велика кількість прикладів.

Правило Лопіталю. Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в промені $(a; +\infty)$, причому $g'(x) \neq 0$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Тоді якщо існує

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Приклад 1. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\ln(x - 1)}$

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосуємо правило

Лопіталю:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\ln(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(\ln(x - 1))'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{\frac{1}{x - 1}} = 12$$

Відповідь: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\ln(x - 1)} = 12$

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в промені $(a; +\infty)$, причому $g'(x) \neq 0$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Тоді якщо існує

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Застосуємо правило

Лопіталю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

Відповідь: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Приклад 3. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 7x + 5}$.

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Застосуємо правило

Лопіталю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 7x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x + 1)'}{(2x^3 + 7x + 5)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{6x^2 + 7} =$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, а тому

застосуємо правило Лопіталю повторно):

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)'}{(6x^2 + 7)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{12x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0.$$

Відповідь: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 7x + 5} = 0$.

Література

1. Глейзер Г.И. История математики в средней школе: пособие для учителей / за редакцією Г.И. Глейзера. – М.: «Просвещение», 1970. - 460 с.
2. Ясінський В. Про один метод знаходження границі числової послідовності певного виду / В. Ясінський, Р. Ушаков // Математика в сучасних школах. - №4. – 2012. – С. 36-41.
3. Рум'янцева К.С. Методичні вказівки до проведення практичних робіт з дисципліни «Вища математика». – Вінниця: ВННІЕ ТНЕУ, 2014. – 73 с.

УДК 519.866:658.5

ВИКОРИСТАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В УПРАВЛІННІ ДІЯЛЬНІСТЮ ПІДПРИЄМСТВА

Баранський О.В., ст. 2 курсу, гр. ОПвн-21

Науковий керівник – к.е.н., доцент Вільчинська О.М.

Вінницький навчально-науковий інститут економіки ТНЕУ

Одними з найбільш розповсюджених методів аналізу, планування та управління діяльністю підприємства являються методи економіко-математичного моделювання. Проблема моделювання в управлінні діяльністю підприємств є досить актуальною, оскільки досягнути на сьогоднішній день максимальних результатів діяльності підприємства можливо лише за умов використання економіко-математичних моделей.

Проблеми економіко-математичного моделювання в управлінні діяльністю підприємства досліджували такі вчені, як Вітлінський В.В., Грабовецький Б.Є., Бондар О.А., Бідник Н.Б., Здрок В.С., Лепа Н.Д., Осипов В.А., Прокопов С.В., Слуцький Є.Є., та інші.

Мета статті – аналіз та класифікація економіко-математичних моделей в управлінні діяльністю підприємства.

Модель – це спрощене представлення або абстракція реальності, умовний образ об'єкта, який створюється для більш глибокого вивчення дійсності.

Моделювання – це процес вивчення, побудови та застосування моделей. Виходячи з того, що модель повинна частково або повністю відтворювати структуру системи та її функції, можна зробити висновок, що моделювання припускає побудову деякого аналога, здатного замінити реальну систему й дати про неї нову інформацію. У зв'язку з цим необхідно підкреслити, що моделювання припускає наявність трьох елементів: по-перше, суб'єкта, у якості якого виступає людина-дослідник, по-друге, об'єкта дослідження (системи) і, по-третє, самої моделі об'єкта (системи) у якості сполучної ланки між суб'єктом і об'єктом [1].

Економіко-математична модель являє собою систему формалізованих співвідношень, які описують основні взаємозв'язки елементів, що складають економічну систему у нашому випадку – підприємство.

Використання математичних методів в управлінні підприємством – важливий напрямок вдосконалення систем управління. Математичні методи прискорюють проведення економічного

аналізу, сприяють більш повному врахуванню впливу факторів на результати діяльності, підвищенню точності обчислень. Застосування таких методів вимагає: системного підходу до вивчення об'єкта дослідження; розробку математичної моделі якісних характеристик роботи підприємства; вдосконалення системи інформаційного забезпечення управління підприємством [2].

За типом задач, які розв'язуються на виробничому підприємстві, виділяють такі основні напрямки використання економіко-математичного моделювання як: здійснення кількісного аналізу власного виробництва і використання виробничих потужностей на основі балансових математичних моделей; вибір перспективних напрямків виробництва й стратегії фінансової діяльності з використанням прогнозних математичних моделей; оптимізація техніко-економічного планування з різною деталізацією часу; прогнозування оптимальної поведінки на ринках виробничих ресурсів та виробленої продукції [3].

Управління підприємством за допомогою моделювання тісно пов'язане з розглядом підприємства, як відкритої системи та управління її функціонування за допомогою основних ресурсів. Основні методи моделювання діяльності підприємства класифікуємо наступним чином (див. Рис.1.), що дозволяє визначити основні методи створення моделей функціонування підприємства.

Отже, доцільність використання економіко-математичного моделювання в управлінні підприємством є обґрунтованою. Це дозволяє: удосконалити систему економічної інформації в управлінні підприємством; інтенсифікувати і підвищити точність економічних розрахунків; поглибити кількісний аналіз економічних проблем; вирішити принципово нові економічні задачі на підприємстві.

Сфера практичного застосування методу моделювання обмежується можливостями й ефективністю формалізації економічних проблем і ситуацій, а також станом інформаційного, математичного, технічного забезпечення використовуваних моделей.