

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛІВ КОНЦЕНТРАЦІЇ ШКІДЛИВИХ ВИКИДІВ ВІД ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ НА ОСНОВІ ДЕТЕРМІНІСТИЧНОГО ПІДХОДУ

Крепич С.Я.

*Тернопільський національний економічний університет, здобувач*

### I. Постановка проблеми

Одною з найвагоміших причин, які негативно впливають на здоров'я та працездатність населення світу, особливо у країнах з розвинутою промисловістю, є надмірне забруднення атмосферного повітря великих міст, яке вже на сьогоднішній день стало серйозною екологічною проблемою, вирішення якої набуває дедалі більшої актуальності. Моделювання процесів поширення домішок в навколишньому середовищі повинне використовувати загальні закони природи, що відповідають специфічним особливостям досліджуваного явища. Апаратом математичного моделювання тут здебільшого постають рівняння математичної фізики, зокрема диференціальні рівняння в частинних похідних. Метою дослідження виступає моделювання полів концентрації шкідливих викидів від точкових джерел з використанням диференціальних рівнянь [1].

### II. Постановка задачі моделювання полів концентрації на основі диференціальних рівнянь в частинних похідних

Розглянемо процес поширення забруднення у навколишньому середовищі шкідливих речовин від точкових джерел у приземистому шарі атмосфери за умови безінверсійного стану повітряного басейну. В найзагальнішому випадку зміну значень концентрації шкідливих речовин  $U$  описують рівнянням [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial u}{\partial x} - V \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u, 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

де вісь  $x$  – розміщена в площині;  $t$  – час;  $V$  – складова середньої швидкості переміщення домішок відповідно за напрямком осі  $x$ ;  $k_x$  – горизонтальна складова коефіцієнту обміну;  $\alpha$  – коефіцієнт, що визначає зміну концентрації за рахунок перетворень домішок. Крім перелічених величин необхідне задання крайових умов, яке може бути встановлене за результатами вибіркових спостережень.

Одним із підходів до знаходження розв'язків диференціального рівняння в частинних похідних є метод скінченних різниць, який представлений двома видами: явно-різницевою та неявно-різницевою схемами, які мають певні переваги та недоліки для окремого класу задач. Однак, якщо об'єднати половину першої та половину другої схеми, то отримаємо універсальну схему Кранка-Ніколсона – яка абсолютно стійка та має другий порядок апроксимації по часу та просторовій змінній  $x$ :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (2)$$

де  $h = l/N$  – просторовий крок по вісі  $x$  та  $\tau = t/M$  – крок по часу [2].

Провівши апроксимацію за допомогою різницевої схеми (2) рівняння (1) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} (-Vh - 2k_x)u_{j-1}^{i+1} + \left( \frac{4h^2}{\tau} + 4k_x + 2\alpha h^2 \right) u_j^{i+1} + (Vh - 2k_x)u_{j+1}^{i+1} = \\ (Vh + 2k_x)u_{j-1}^i + \left( \frac{4h^2}{\tau} - 4k_x - 2\alpha h^2 \right) u_j^i + (2k_x - Vh)u_{j+1}^i \end{aligned} \quad (3)$$

і врахувавши граничні умови, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь із трьох діагональною матрицею, розв'язок якої зручно шукати за допомогою методу прогонки [3].

### III. Особливості програмної реалізації методу моделювання полів концентрації на основі диференціальних рівнянь в частинних похідних

Враховуючи великі обсяги даних, які потрібно обрахувати, та графічну побудову поля концентрації було вирішено в програмі реалізації методу моделювання об'єднати два програмних продукти – *Microsoft Visual Studio* з мовою програмування *C#* для складних математичних обрахунків

з можливістю невеликих затрат часових ресурсів та *MATLAB* для можливості візуального відображення результатів математичних обчислень.

На рисунку 1 представлена блок-схема алгоритму реалізації методу моделювання полів концентрації на основі диференціальних рівнянь в частинних похідних. Алгоритм реалізації наступний:

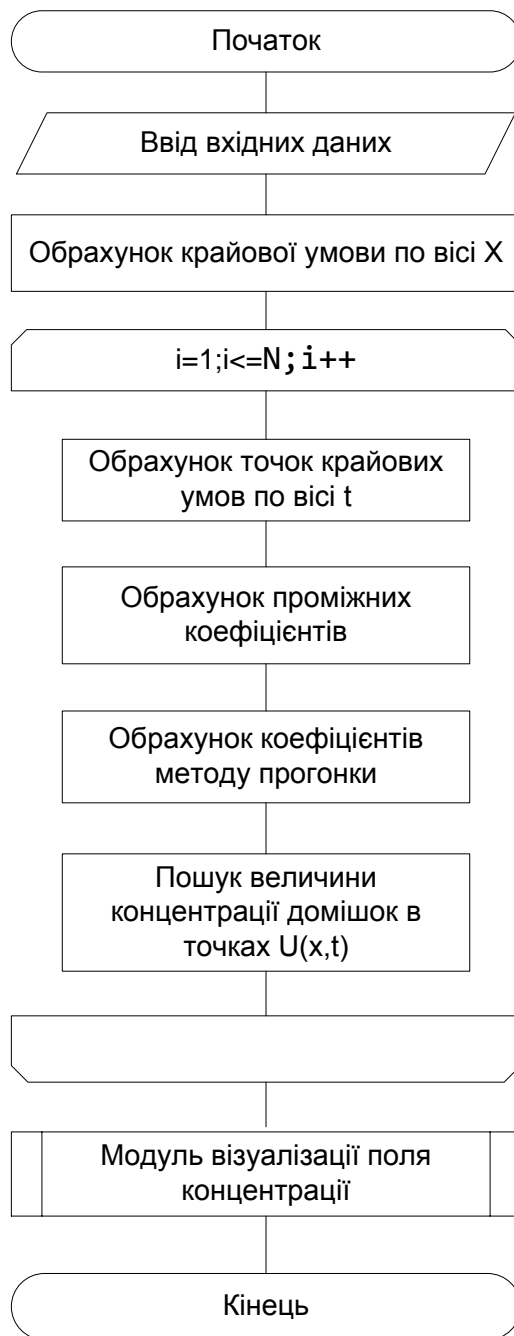


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритму реалізації методу моделювання полів концентрації

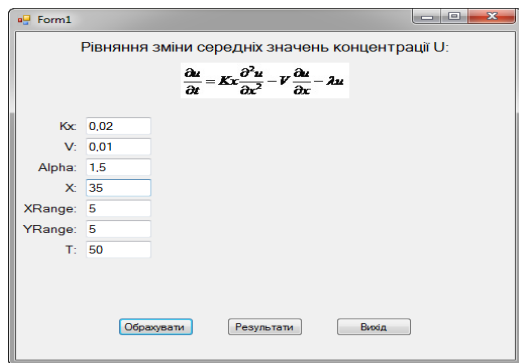
Крок 1. Обчислення крайових умов по осі  $x$  за формулою, яка описує процес поширення шкідливих умов.

Крок 2. Обчислення концентрації шкідливих речовин в точках  $U(x,t)$  на двох крайових умовах по осі  $t$ .

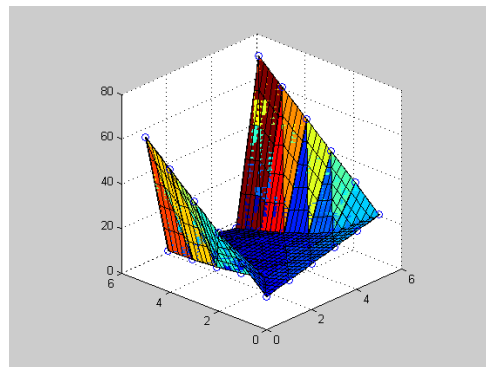
Крок 3. Розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь з трьох діагональною матрицею згідно з методом прогонки.

Крок 4. Візуалізація поля концентрацій шкідливих викидів  $U(x,t)$  в точках.

На рисунку 2 представлені поле вводу вхідних даних та графік представлення поля концентрації шкідливих речовин, отриманого в результаті розв'язування тестової задачі.



а)



б)

Рисунок 2- Поле введення вхідних даних (а) та поле концентрації шкідливих речовин (б)

### Висновок

В результаті проведеного дослідження моделювання поля концентрації за допомогою диференціальних рівнянь в частинних похідних був розроблений програмний комплекс в основу якого покладений метод скінченних різниць, який є одним з найбільш поширених чисельних методів розв'язування рівнянь в частинних похідних.

### Список використаних джерел

1. Ковальчук П.І. «Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища», Київ «Либідь», 2003р.
2. [http://www.uchites.ru/files/nummethod\\_book\\_chapter5-1234.pdf](http://www.uchites.ru/files/nummethod_book_chapter5-1234.pdf)
3. <http://coderov.net/vma/65-decisionofthesystemsofthelinear/150-method-progon.html>

УДК 533.601.1, 004.021

## РОЗРОБКА І ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ АЕРОДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ АВТОКОРПУСІВ

Кривий Р.З.<sup>1)</sup>, Ціжман Я.І.<sup>2)</sup>

Національний університет «Львівська політехніка»,  
<sup>1)</sup> к.т.н., асистент; <sup>2)</sup> бакалавр

### I. Постановка задачі

При покращенні швидкісних даних автомобіля важливим є покращення аеродинамічних характеристик його корпусу. Створення системи, яка б могла відобразити рух повітря відносно корпусу автомобіля та надати користувачу дані, щодо його можливого покращення, значно полегшило б цей процес. Зокрема у такій системі були б зацікавлені підприємства, що працюють з такими матеріалами як скловолокно та вуглепластик. Систему найкраще реалізувати у вигляді програмно-методичного комплексу, який дозволить користувачу формувати модель корпусу автомобіля та переглядати як поводить повітряний потік навколо нього. Після цього у вказаному користувачем місці система проведе оптимізацію форми корпусу та відобразить зміни у аеродинамічних характеристиках.

### II. Визначення аеродинамічних характеристик

Основною частиною визначення аеродинамічних характеристик є розв'язання рівняння Нав'є-Стокса, зокрема рівняння перенесення імпульсу:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (1)$$

Зазвичай вирішення таких рівняння програмно реалізуються за допомогою методів скінченних елементів/об'ємів чи методу решіткових рівнянь Больцмана. В даній роботі надано перевагу саме методу решіткових рівнянь.

Решітковий метод Больцмана було розроблено для моделювання динаміки рідини чи газу. Суть метода полягає в тому, що досліджувана область розбивається на скінченне число комірок, між якими