НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

АЛІЛУЙКО Андрій Миколайович

УДК 517.93;531.36

Аналіз стійкості, стабілізація та порівняння динамічних систем

01.02.01 — теоретична механіка

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Мазко Олексій Григорович
доктор фізико–математичних наук,
старший науковий співробітник

Київ — 2007

ЗМІСТ

ВСТУП

Стійкість руху — це одна із головних характеристик якості динамічних об'єктів. Якщо рух реального об'єкта моделюється системою диференціальних або різницевих рівнянь, то його стійкість визначається за допомогою розв'язків системи. Основна проблема теорії стійкості полягає в тому, щоб описати умови стійкості або нестійкості руху механічної системи в термінах вихідних даних (параметрів, функцій, матричних коефіцієнтів і т. п.) побудованої математичної моделі.

Механічні системи, які досліджуються на стійкість, розрізняються за типами матеріальних об'єктів (абсолютно тверді та деформівні тіла, рідина, газ та ін.), за властивостями прикладених до них сил (дисипативних, гіроскопічних, потенціальних, неконсервативних та ін.), а також за характером кінематики рухів (поступальних, обертальних, коливальних та ін.). Відповідно математичні моделі таких систем, побудовані на основі законів механіки, мають свої особливості (див., наприклад, [1–9]), які у багатьох випадках зображуються аналітично. Наприклад, складові матричних коефіцієнтів диференціальних систем другого порядку, до яких приводять різноманітні задачі механіки і фізики, можуть мати властивості симетрії, кососиметрії, додатної визначеності та ін. (див., наприклад, [10–16]). Ці властивості коефіцієнтів обумовлюються, наприклад, наявністю в об'єкті дослідження відповідних типів сил. Для таких систем залишаються актуальними задачі побудови нових коефіцієнтних критеріїв стійкості та алгоритмів стабілізації, що враховують вказані особливості і структуру матричних коефіцієнтів.

При моделюванні складних технічних, біологічних та інших об'єктів використовуються диференціальні або різницеві системи рівнянь, у фазовому просторі яких існують інваріантні множини, зокрема, конуси. Такі особливості систем, як позитивність та монотонність, доцільно використовувати в якісних методах дослідження, в задачах аналізу стійкості та синтезу стабілізуючого керування. Диференціальні рівняння Ляпунова і Ріккаті, а також рівняння других моментів для стохастичної системи Іто є прикладами позитивних систем відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць. Класи позитивних і монотонних систем виникають в теорії стійкості при застосуванні методів порівняння, які узагальнюють метод функцій Ляпунова (див., наприклад, [17–19]). В результаті аналіз складних (великомасштабних) моделей зводиться до вивчення більш простих класів систем, що мають властивості типу квазімонотонності. Дослідження стійкості класів лінійних позитивних систем зводяться до розв'язання алгебраїчних рівнянь і нерівностей, які визначаються операторними коефіцієнтами даних систем [20, 21]. Основними результатами теорії M-матриць є конструктивні алгебраїчні та спектральні методи аналізу лінійних диференціальних систем позитивних відносно конуса невід'ємних векторів [22]. Окремі дослідження проведені для систем, позитивних відносно кругового та еліпсоїдального конусів [23, 24]. За аналогією доцільно розвивати та вдосконалювати методи дослідження стійкості та порівняння динаміки об'єктів різної природи відносно більш широких класів конусів (кругових, еліпсоїдальних та їх узагальнень).

Отже, **актуальність теми** дисертаційної роботи полягає в необхідності розвитку та вдосконалення методів аналізу стійкості, стабілізації та порівняння динамічних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України згідно із загальним планом науково-дослідних робіт в рамках держбюджетної теми №I–13–06 "Розробка методів дослідження некласичних задач динаміки та стійкості складних механічних систем"(номер держ. реєстрації 0106U000282), а також в межах науково-дослідної теми №II–23–05 "Математичні методи дослідження динаміки та стійкості об'єктів механіки, гідромеханіки та гемодинаміки"(номер держ. реєстрації 0105U001108) за програмою "Математичне моделювання фізичних і механічних процесів у сильно неоднорідних середовищах".

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розробка нових методів аналізу стійкості, стабілізації та порівняння динамічних систем, їх застосування при дослідженні механічних об'єктів.

Об'єктом дослідження є диференціальні, різницеві, диференціально-різницеві системи та моделі спеціальних механічних систем.

Предметом дослідження є властивості стійкості та позитивності динамічних систем, інваріантні множини, стабілізація та порівняння систем.

Методи дослідження. Використовуються перший і другий методи Ляпунова дослідження стійкості та їх узагальнення, методи лінійної алгебри, функціонального аналізу, якісної теорії диференціальних рівнянь та теорії керування.

Поставлена мета зумовлює розв'язання таких завдань:

1. Розробити методи аналізу стійкості та позитивності диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих систем відносно типових конусів та їх узагальнень.

2. Розвинути методику побудови інваріантних множин нелінійних диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей.

3. Розв'язати задачі позитивної стабілізації диференціальних та різницевих систем відносно заданих конусів.

4. Узагальнити принцип порівняння для скінченого сімейства незалежних диференціальних систем.

5. Розробити нові алгебраїчні методи дослідження стійкості та стабілізації диференціальних систем другого порядку.

6. Продемонструвати ефективність запропонованих матричних методів в задачах стійкості та побудови стабілізуючого керування для обертальних механічних систем типу роторів та моделей обертання балки.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

1. Розроблено нові алгебраїчні методи дослідження стійкості класів позитивних динамічних систем (диференціальних, різницевих та диференціальних систем із запізненням).

2. Встановлено умови позитивності диференціальних та різницевих систем відносно конусів типу кругових, еліпсоїдальних та їх узагальнень.

3. Розвинуто методику побудови інваріантних множин нелінійних диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей. Як наслідок, сформульовано узагальнений принцип порівняння для сімейства диференціальних систем, що функціонують у різних просторах.

4. Розроблено способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів.

5. Побудовано нові матричні методи аналізу стійкості та алгоритми стабілізації лінійних диференціальних систем другого порядку.

6. Досліджено спектральні властивості гіперболічних пучків матриць і наведено їх застосування в задачах стійкості обертальних рухів механічних систем.

7. Розроблені матричні методи аналізу стійкості та синтезу керування застосовано для типових моделей роторних систем.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в задачах аналізу та синтезу динамічних об'єктів, що мають особливу структуру та природні властивості (багатозв'язні моделі високої розмірності, позитивні системи з інваріантними конусами, механічні системи, що описуються диференціальними або різницевими рівняннями другого порядку та ін.), а також при порівнянні динаміки об'єктів різної природи.

Особистий внесок здобувача. В роботах, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок автора полягає в обговоренні постановок задач, виконанні всіх основних доведень, розрахунків та формулюванні висновків. Співавтору О.Г. Мазку належать постановка задач та рекомендації щодо методів їх розв'язування.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на семінарах відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України, відділу стійкості процесів Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка, а також на таких міжнародних конференціях: "Dynamical system modelling and stability investigation"(травень 2005 р., Київ); "International Workshop on Free Boundary

Flows and Related Problems of Analysis"(вересень 2005 р., Київ); VIII Кримська міжнародна математична школа "Метод функций Ляпунова и его приложения"(вересень 2006 р., Алушта, Крим); "Dynamical system modelling and stability investigation"(травень 2007 р., Київ).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 9 роботах. Серед них 5 статей [25–29] в наукових періодичних фахових виданнях та 4 тез доповідей [30–33] на міжнародних наукових конференціях.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У **вступі** до дисертації обгрунтовано актуальність теми, сформульовано мету дослідження, відображено наукову новизну, практичну цінність та апробацію роботи. Розглянуто структуру дисертації, а також наведено головні положення та результати, які виносяться на захист.

У **першому** розділі проведено огляд літератури та перелік основних задач, пов'язаних з темою дисертаційної роботи. Вказано також на деякі нерозв'язані проблеми з даного напрямку дослідження.

У **другому** розділі досліджуються позитивні динамічні системи з використанням теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі.

У першому підрозділі наведено основні поняття з теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі та деякі допоміжні твердження, які використовуються в дисертації.

У другому підрозділі розглянуто конуси невід'ємних та невід'ємно визначених матриць та наведені умови їх інваріантності в диференціальних системах.

У третьому підрозділі розглянуто множину

$$\mathcal{K}(Q,h) = \left\{ z \in R^{n+1} : z^T Q z \geq 0,\ z^T Q h \geq 0 \right\}, \tag{1}$$

де $Q = Q^T$ — симетрична матриця з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$, h — довільний вектор такий, що $h^T Q h > 0$. Зокрема, h може бути власним вектором матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Встановлено, що ця множина є еліпсоїдальним конусом (лема 2.2). Доведено необхідні та достатні умови існування інваріантного еліпсоїдального конуса для лінійних диференціальних (теорема 2.1) та різницевих (теорема 2.2) систем у вигляді матричних нерівностей.

Для лінійної диференціальної системи встановлено умови існування інваріантного світлового конуса (теореми 2.3, 2.4)

$$\mathcal{K}_a = \{z \in R^{n+1} : \, \|z\| \leq (a, z)\},$$

де $(a, z) = a^T z$ — скалярний добуток, a — заданий вектор з нормою $\|a\| > 1$.

У четвертому підрозділі для дослідження класу багатозв'язних систем введено нові типи конусів

$$\mathcal{K}_\mu(\alpha, p) = \{z \in R^{n+m} : \, z^T = [x^T, u^T], \; u \in R^m_+, \; \|x\|_p \leq \mu_\alpha(u)\},$$

$$\mathcal{K}_\sigma(\beta, q) = \{w \in R^{n+m} : \, w^T = [y^T, v^T], \; v \in R^m_+, \; \|y\|_q \leq \sigma_\beta(v)\},$$

де $\mu_\alpha(u) = \alpha \min\limits_k u_k$, $\sigma_\beta(v) = \beta \sum\limits_k v_k$, $R^m_+ \subset R^m$ — конус векторів з невід'ємними елементами, $\|x\|_p$ — одна із типових векторних норм. Встановлено, що при деяких обмеженнях наведені конуси є взаємно спряженими (лема 2.6).

У п'ятому підрозділі для нелінійної диференціальної системи

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

при умовах існування та єдиності розв'язків $X(t)$ в деякій області $\Omega \subset \mathcal{X}$ розроблено методику побудови інваріантних множин у вигляді

$$\mathcal{I}_t = \{X \in \Omega : \, V(X, t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0\}, \tag{3}$$

де $V : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$ — деякий оператор, $\overset{\mathcal{K}}{\geq}$ — нерівність, породжена заданим конусом або клином $\mathcal{K}$ у просторі $\mathcal{E}$. Доведено необхідні та достатні умови існування інваріантної множини (3) із застосуванням оператора диференціювання в силу системи і елементів спряженого конуса (теорема 2.5). Відомі результати стосовно інваріантності конусів є частинними випадками встановленого критерію.

Запропоновану методику побудови інваріантних множин розвинуто для диференціальних систем вищих порядків. За аналогією для таких систем встановлено критерій інваріантності множин типу (3) (теорема 2.6). Наведено приклади застосування запропонованої методики для диференціальних систем першого і другого порядків.

У шостому підрозділі побудовано умови інваріантності конусів типу $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$ для класу лінійних різницевих систем

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad u_{k+1} = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

У сьомому підрозділі розглянуто клас диференціальних систем із запізненням

$$\dot{x}(t) + Lx(t) = G(x(t-\tau)), \quad G(0) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \tag{4}$$

де L і G — відповідно лінійний та нелінійний оператори в просторі R^n, $\tau > 0$ — стале запізнення. Доведено критерій позитивності системи (4) (теорема 2.7), який узагальнює відомі аналогічні результати для конуса R^n_+.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню стійкості та стабілізації позитивних динамічних систем.

У першому підрозділі наведено означення та деякі допоміжні факти, які використовуються при дослідженні стійкості позитивних систем.

Встановлено алгебраїчні умови експоненціальної стійкості лінійної диференціальної системи у вигляді позитивної оборотності двох операторів (теорема 3.4).

У другому підрозділі доведено достатні умови стійкості лінійних диференціальних (теорема 3.5) та різницевих (теорема 3.6) систем з інваріантним еліпсоїдальним конусом у вигляді матричних нерівностей. Теорему 3.5 проілюстровано на чисельному прикладі.

У третьому підрозділі розглянуто диференціальну систему s-го порядку

$$A_0x(t) + A_1x^{(1)}(t) + \ldots + A_sx^{(s)}(t) = 0, \quad x^{(i)}(0) = x_0^{(i)},\ i = \overline{0, s-1}, \tag{5}$$

де $x(t) \in R^n$ — вектор фазових координат, $t \geq 0$, $A_i \in R^{n\times n}$ — коефіцієнти регулярного матричного полінома $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s$. Система (5) зводиться до диференціальної системи першого порядку, повний стан якої характеризує вектор-функція $y(t) = [x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(s-1)}(t)]^T$. Запропоновано визначати інваріантні множини і властивості позитивності даної системи відносно конусів у фазовому просторі R^{ns}:

$$y(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ x^{(1)}(0) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(0) \end{bmatrix} \in \hat{\mathcal{K}} \implies y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(t) \end{bmatrix} \in \hat{\mathcal{K}}, \quad \hat{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 \\ \mathcal{K}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{K}_{s-1} \end{bmatrix}, \ \ t \geq 0.$$

Доведено умови позитивності (лема 3.3) та експоненціальної стійкості системи (5) з використанням поняття максимальних власних пар матричного полінома $F(\lambda)$ (теореми 3.7 та 3.9). Доведено достатні умови експоненціальної стійкості системи (5) в термінах позитивної оборотності двох операторів (теорема 3.8). Теорему 3.7 проілюстровано на чисельних прикладах.

У четвертому підрозділі розв'язано задачу про абсолютну стійкість для систем типу (4). Методом функціоналу Ляпунова-Красовського встановлено достатні умови абсолютної стійкості позитивної системи (4) (теорема 3.10). Як наслідок, отримано алгебраїчні та спектральні умови абсолютної стійкості для лінійних позитивних систем із запізненням (теорема 3.11). Наведено приклади застосування сформульованих теорем.

У п'ятому підрозділі, користуючись отриманими в підрозділах 2.5, 2.6, 3.1 та 3.2 результатами, запропоновано способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів.

У шостому підрозділі розглядається сімейство незалежних систем

$$(\mathcal{S}_i): \quad \dot{X}_i = F_i(X_i, t), \quad X_i \in \mathcal{X}_i, \ t \geq 0, \ i = \overline{1, s}. \tag{6}$$

У деякому просторі $\mathcal{E}$ з клином $\mathcal{K}$ задається оператор $W: \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$, що названо оператором порівняння сімейства систем (6). Введено поняття порівнюваності систем (6) з використанням оператора порівняння W. Як наслідок теореми 2.5, доведено критерій порівнюваності систем (6) (теорема 3.12). Показано, що основні твердження відомого принципу порівняння для двох і трьох систем з нульовими положеннями рівноваги можна вважати наслідками теореми 3.12 (теореми 3.13 і 3.14). Сформульовано задачі впорядкування і виявлення домінуючої (у певному сенсі) системи сімейства $s \geq 2$ незалежних систем у вигляді загальної задачі порівняння.

Четвертий розділ присвячено розробці нових матричних методів дослідження стійкості механічних систем, лінеаризовані моделі яких описуються у вигляді систем диференціальних рівнянь другого порядку

$$C\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0, \quad t \geq 0, \tag{7}$$

де A, B і C — $n \times n$-матриці.

У першому підрозділі розглядається квадратичний пучок матриць

$$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C, \quad A = A^* \quad B = B^*, \quad C = C^* > 0 \tag{8}$$

та відповідна квадратична спектральна задача (КСЗ)

$$F(\lambda)z = 0, \quad \lambda \in \sigma(F), \quad z \neq 0. \tag{9}$$

Досліджено умови гіперблічності, майже гіперболічності та еліптичності КПМ (8). Доведено критерій майже гіперболічності КСЗ (9) в термінах її середніх власних значень (теорема 4.2).

У другому підрозділі проведено аналіз стійкості виродженої диференціальної системи (7) за допомогою розв'язків блочної спектральної задачі для квадратичного пучка (8). Сформульовано критерій асимптотичної стійкості системи (7) в термінах максимальних власних пар пучка (8) (теорема 4.3).

У третьому підрозділі розроблено алгебраїчні методи дослідження стійкості системи (7) та побудови функцій Ляпунова, в яких враховується структура матричних коефіцієнтів A, B і C. Отримано коефіцієнтні умови стійкості системи (7), що зводяться до розв'язання систем матричних нерівностей (теореми 4.4, 4.5 та 4.6). Як наслідок теорем 4.3 та 4.6, доведено достатні умови стійкості (асимптотичної стійкості) системи (7), що зводяться до оцінки середніх власних значень деякої майже гіперболічної (гіперболічної) спектральної задачі (наслідки 4.5 та 4.6).

У четвертому підрозділі розглядається система керування

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = Fu, \tag{10}$$

де x — n-вектор стану системи, u — l-вектор керування, A, B, C і F — відомі матриці відповідних розмірів. Для системи (10) отримано алгоритм стабілізації у вигляді зворотного зв'язку $u = -L_0 x - L_1 \dot{x}$. Невідомі матриці L_0 і L_1 будуються за допомогою розв'язків відповідних систем матричних нерівностей (теорема 4.7).

У п'ятому підрозділі розроблені матричні методи аналізу стійкості та синтезу керування застосовано при дослідженні обертальних механічних систем (ротора Лаваля та моделі обертання балки). Наведено аналітичні та чисельні результати досліджень.

Список використаних джерел нараховує 112 найменувань робіт, що цитуються в тексті дисертації.

При нагоді хочу висловити щиру подяку моєму науковому керівнику О.Г. Мазку та завідувачу відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем І.О. Луковському за постійну турботу та допомогу в роботі над дисертацією.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Розвиток теорії стійкості, засновником якої є О.М. Ляпунов [34], відбувається на основі результатів фундаментальних та прикладних досліджень у різних галузях. Зокрема, нові методи дослідження стійкості лінійних динамічних систем розробляються із застосуванням досягнень матричної алгебри та функціонального аналізу. Методи порівняння в теорії стійкості нелінійних систем, що узагальнюють метод функцій Ляпунова, пов'язані з розвитком якісної теорії диференціальних рівнянь у напівупорядкованому просторі.

Динамічна система, що має інваріантний конус у фазовому просторі, є позитивною відносно даного конуса. Властивості системи типу монотонності також визначаються відносно деякого конуса. Позитивність (монотонність) диференціальних та різницевих систем рівносильна позитивності (монотонності) деякого оператора, що описує їх рух відносно заданих конусів у фазовому просторі. Тому методи дослідження вказаних класів систем розвиваються на основі теорії конусів та операторів у напівупорядкованому просторі (див., наприклад, [35–38]).

Якщо коефіцієнти лінійної диференціальної системи

$$\dot{x} + Ax = 0 \tag{1.1}$$

утворюють M-матрицю A, то вона є асимптотично стійкою. Нагадаємо, що M-матриця задається умовами

$$a_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \tag{1.2}$$

$$A^{-1} = B, \quad b_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Умова (1.2) еквівалентна позитивності системи (1.1) відносно конуса невід'ємних векторів R^n_+ [22, 35]. Для позитивної системи (1.1) умова (1.3) позитивної оборотності матриці A еквівалентна позитивності всіх послідовних головних мінорів матриці A (умови Севастьянова-Котелянського) [22, 39].

Загальний розв'язок матричного диференціального рівняння Ляпунова

$$\dot{X} = A^T X + XA, \quad X(t_0) = X_0, \quad t \geq t_0, \tag{1.4}$$

має вигляд

$$X(t) = W(t, t_0)X_0, \quad W(t,\tau)X = e^{A^T(t-\tau)}Xe^{A(t-\tau)},$$

де $W(t,\tau)$ — еволюційний оператор, $t \geq \tau$. Тому дане рівняння має інваріантний конус симетричних невід'ємно визначених матриць, тобто позитивне відносно цього конуса. Аналогічно, диференціальне рівняння Ріккаті та його узагальнення

$$\dot{X} - A^T X - XA - \sum_k B_k^T X B_k = XCX + D, \quad C = C^T \geq 0, \quad D = D^T \geq 0 \tag{1.5}$$

є позитивними відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць.

Матричне диференціальне рівняння

$$\dot{X} = A^T X + XA + \sum_k B_k^T X B_k \tag{1.6}$$

відоме як рівняння других моментів для стохастичної системи Іто

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_k B_k x(t) dw_k(t),$$

де ω_k — компоненти стандартного вінерівського процесу. Дане рівняння має властивості позитивності і монотонності відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць та використовується в теорії стійкості стохастичних систем [40–42].

Зауважимо, що система (1.1) при умові (1.2), а також матричні рівняння (1.4), (1.5) і (1.6) позитивні відносно відповідних конусів, якщо матричні коефіцієнти неперервно залежать від часу.

Властивості позитивних систем використовуються в різних задачах аналізу і синтезу [35, 37, 43–45]. Дослідження стійкості класів лінійних позитивних систем зводяться до розв'язування алгебраїчних рівнянь, які визначені операторними коефіцієнтами даних систем [20, 21, 46, 47]. Властивості розв'язків нелінійних монотонних систем відносно заданих конусів вивчались в роботах [44, 45, 47, 48]. В роботі [49] доведено критерій абсолютної стійкості (при довільному сталому запізненні) позитивних диференціальних системи із запізненням відносно конуса невід'ємних векторів. Деякі моделі біологічних і соціальних систем володіють властивостями типу кооперативності та конкуренції, які визначені за допомогою конуса невід'ємних векторів [43, 50].

Для опису фізичних об'єктів і процесів в неоднорідному середовищі використовуються багатозв'язні (великомасштабні) системи зі складною внутрішньою структурою. При дослідженні умов стійкості таких систем успішно застосовуються методи векторних і матричних функцій Ляпунова, в яких враховується структура всіх підсистем і характер їх взаємодії [51–53]. Неоднорідність фазового простору, в якому функціонує багатозв'язна система, породжує властивості позитивності або монотонності відносно заданих конусів. В роботі [54] умови позитивності та монотонності багатозв'язних диференціальних систем відносно узагальненого кругового конуса описуються за допомогою елементів спряженого конуса, тобто лінійних позитивних функціоналів.

В роботах [24, 55] сформульовано умови існування інваріантного еліпсоїдального конуса у вигляді матричних нерівностей, коли симетрична матриця, що описує даний конус, є діагональною. В роботах [56, 57] сформульовано умови існування інваріантних тілесних конусів у просторі лінійних диференціальних та різницевих систем, які описуються за допомогою спектра матриці коефіцієнтів. Спектральні умови інваріантності еліпсоїдального конуса наведені в статті [23].

Задача позитивної стабілізації лінійних систем, тобто побудова керування з допомогою лінійного зворотного зв'язку по стану, у випадку конуса невід'ємних векторів вивчалась в [54, 58, 59]. В роботі [60] розглянуті класи систем, які описують процес зближення багатьох механічних об'єктів. Для таких систем побудовано керування, що забезпечує умову позитивності відносно еліпсоїдального конуса.

Класи позитивних і монотонних систем виникають також в теорії стійкості в результаті застосування методів порівняння систем, основи яких були започатковані В.М. Матросовим та Р. Белманом (метод вектор-функції Ляпунова [61, 62]). Метод порівняння грунтується на відображенні простору стану досліджуваної системи в простір станів допоміжних вивчених систем. В якості систем порівняння використовуються нелінійні системи, які задовольняють умовам теорем типу Чаплигіна і Важевського [17–19, 63]. Згодом в якості систем порівняння було запропоновано системи, що мають властивості позитивності і монотонності відносно відповідних конусів [47, 64].

Принцип порівняння успішно використовується при дослідженні стійкості розв'язків широких класів диференціальних та різницевих систем [18, 19, 51, 52, 64] і полягає у наступному. Для диференціальної системи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in \mathcal{X}, \quad t \geq t_0 \tag{1.7}$$

будуються класи систем порівняння типу

$$\dot{X} = F(X,t), \quad X \in \mathcal{E}, \quad t \geq t_0, \tag{1.8}$$

де $\mathcal{E}$ — банаховий простір, який напівупорядкований нормальним тілесним конусом $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$.

Через $\overline{\mathcal{M}}$ позначимо клас систем (1.8), між розв'язками яких і розв'язками диференціальних нерівностей

$$\dot{Z} \overset{\mathcal{K}}{\leq} F(Z,t), \quad Z \in \mathcal{E}, \quad t \geq t_0,$$

можна встановити таке співвідношення, що із $Z(t_0) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X(t_0)$ випливає $Z(t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X(t)$ при $t > t_0$. Нехай $V(x,t)$ — оператор, який неперервно відображає деякий окіл точки $x = 0 \in \mathcal{X}$ при $t \geq t_0$ в простір $\mathcal{E}$. Якщо вираз $V(x,t)$ і його узагальнена похідна в силу системи (1.7) задовольняє нерівність

$$D_t V(x,t)|_{(1.7)} \overset{\mathcal{K}}{\leq} F(V(x,t),t),$$

то система (1.8) класу $\overline{\mathcal{M}}$ є верхньою системою порівняння для системи (1.7), тобто

$$V\left(x(t_0),t_0\right) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X(t_0) \implies V\left(x(t),t\right) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X(t), \quad t > t_0.$$

В результаті стійкість (асимптотична стійкість) вихідної системи (1.7) при деяких додаткових обмеженнях на оператор V випливає із стійкості (асимптотичної стійкості) системи порівняння (1.8).

З принципу порівняння випливає один із методів дослідження робастної стійкості деякого класу систем, що визначаються в термінах конусних нерівностей [64]. В роботах В.Л. Харитонова, Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова та ін. побудовано критерії робастної стійкості для інтервально заданих лінійних систем [65–67].

В задачах аналізу стійкості і синтезу керованих фізичних об'єктів (космічних, транспортних, електромеханічних та ін.) значна увага приділялася методам дослідження математичних моделей, які описуються системами лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$A(t)x + B(t)\dot{x} + C(t)\ddot{x} = f(u,t), \quad t \geq 0, \tag{1.9}$$

де $x \in R^n$ — вектор узагальнених координат, $u \in R^r$ — вектор керування, A, B і C — матриці розміру $n \times n$. В моделях механіки матриця $C = C^T > 0$ характеризує інерційні властивості системи, матриця $B = D + G$ складається з симетричої матриці дисипативних сил $D = D^T$ та кососиметричної матриці гіроскопічних сил $G = -G^T$. Матриця $A = K + S$ містить симетричну матрицю потенціальних сил $K = K^T$ та кососиметричну матрицю неконсервативних позиційних сил (НПС) $S = -S^T$. Вектор-функція f описує вплив зовнішніх сил на динаміку системи (див., наприклад, [11, 13, 68, 69]).

Система (1.9) виводиться з рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q,$$

де T — кінетична енергія системи, Π — потенціальна енергія системи, $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ — вектор узагальнених координат, $Q = [q_1, \ldots, q_n]^T$ — вектор узагальнених непотенціальних сил. При цьому кінетична і потенціальна енергії представляються у вигляді квадратичних форм від узагальнених координат

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^T C \dot{x}, \quad \Pi = \frac{1}{2}x^T K x,$$

а вектор узагальнених сил $Q = -D\dot{x} - G\dot{x} - Sx$ [10].

Механічні системи (1.9), на які діють всі перераховані вище сили, називаються системами загального виду. При аналізі стійкості таких систем розглядаються можливі комбінації сил. Відповідно до цього прийнято наступну загальну класифікацію систем [11, 13]:

1) консервативні або потенціальні ($D = 0$, $G = 0$ і $S = 0$);

2) гіроскопічні ($D = 0$ і $S = 0$);

3) циркуляторні ($D = 0$ і $G = 0$).

Для визначення умов стійкості системи (1.9) застосовуються алгебраїчні критерії Ерміта, Рауса-Гурвіца, Шура [39, 70] та в еквівалентній геометричній формі — критерії Найквіста і Міхайлова [71]. Ці критерії є цінними і корисними при дослідженні стійкості, але при їх застосуванні втрачається наочність пояснення впливу сил та параметрів в матрицях системи.

Перші теореми про стійкість, які задовольняють критерію наочності, були сформульовані Лагранжом і Діріхле. Але більшість таких теорем були сформульовані Томсоном і Тетом [72], які згодом буди доведені Четаєвим [73], так звані теореми Кельвіна-Четаєва. Вони використовуються для визначення стійкості систем з відсутніми НПС. За досить тривалий час інтерес до цих теорем відродився лише в 60-х роках минулого століття, коли були отримані результати, що уточнювали та узагальнювали формулювання цих теорем [74, 75].

Для аналізу стійкості системи (1.9) на сьогоднішній день використовується кілька методів. Перший метод полягає у виключенні матриці НПС за допомогою структурних перетворень динамічних систем, що дозволяє застосовувати теореми Кельвіна-Четаєва [76–78]. Другий метод аналізу стійкості полягає у використанні коефіцієнтів Релея [79–81].

Широкого застосування набули методи функцій Ляпунова та їх матричні інтерпретації при побудові коефіцієнтних критеріїв стійкості. Вони формулюються в термінах розбиття матриць A, B і C по механічній структурі сил у вигляді систем алгебраїчних нерівностей [13, 82–85]. При побудові таких критеріїв використовуються різні обмеження на матричні коефіцієнти, які враховують такі вимоги, як симетричність, невиродженість, знаковизначеність та ін. Деякі перші загальні результати про стійкість систем загального вигляду отримані в роботах Меркіна [12] і Метеліцина [86]. У роботі [87] знайдено критерії стійкості в особливому випадку, коли декілька матриць комутують. У роботах [88, 89] сформульовані теореми стійкості у випадках, коли гіроскопічна матриця пропорційна матриці НПС і матриця потенціальних сил додатно визначена. У роботах [84, 90] досліджувалась стійкість систем, у яких гіроскопічна матриця залежить від параметра. Метод матричних нерівностей використовуються при побудові критеріїв стійкості диференціальних моделей роторних систем [83].

Велика кількість робіт присвячена дослідженню систем виду (1.9), в яких відсутні деякі типи сил. Огляд робіт щодо стійкості потенціальних і дисипативних механічних систем міститься в [91]. Робота [14] присвячена аналізу і порівнянню отриманих в 1982-1992 рр. результатів щодо стійкості положення рівноваги і стаціонарних рухів голономних консервативних систем. Аналізу стійкості гіроскопічних систем присвячені роботи [92–94].

Починаючи з 60-х років минулого століття, розробляються методи аналізу стійкості диференціальних систем другого порядку, які зводяться до розв'язання квадратичної спектральної задачі (КСЗ). Вони виникають при дослідженні механічних, акустичних, гідромеханічних та інших типів систем [3, 6, 8, 15, 95].

У статті [15] наведено огляд робіт, у яких виникає КСЗ. Зокрема наводяться дослідження спектральних властивостей квадратичних пучків для класів сильно демпфованих та гіроскопічних систем, що зводиться до розв'язання гіперболічної КСЗ [96, 97].

Один із методів аналізу стійкості і спектральних властивостей системи зводиться до побудови і розв'язання матричних алгебраїчних рівнянь типу узагальненого рівняння Ляпунова [21]. При його обґрунтуванні використовується єдине обмеження — умова регулярності квадратичного пучка матриць $F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$.

Методи теорії стійкості лежать в основі побудови систем стабілізації. Параметри керування зазвичай визначаються у вигляді динамічного зворотного зв'язку по стану або лінійного зворотного зв'язку по виходу системи, що вимірюється додатковими пристроями.

В роботах [66, 98, 99] запропоновані методи стабілізації та розподілу спектра лінійних систем зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей. Для систем типу (1.9) розглядається аналогічна задача синтезу стабілізуючого керування у вигляді зворотного зв'язку по стану

$$f(u,t) = Fu, \quad u = L_0 x + L_1 \dot{x},$$

де L_0, $L_1 \in R^{m\times n}$, $F \in R^{n\times m}$, $m \leq n$. В роботах [100, 101] пропонуються алгоритми пошуку невідомих матриць керування L_0 та L_1 в частинному випадку, коли необхідно досягти лише деяких бажаних власних значень для системи (1.9). В роботі [102] запропоновано метод побудови оптимального керування для таких систем, що також зводиться до розв'язання КСЗ.

Зауважимо, що залишились не достатньо вивченими задачі, пов'язані з:

• аналізом стійкості важливих класів диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих систем, позитивних відносно заданих конусів (кругових, еліпсоїдальних та ін.);

• дослідженням стійкості диференціальних систем довільного порядку, зокрема, векторно-матричних диференціальних моделей механіки;

• позитивною стабілізацією керованих систем відносно заданих конусів;

• порівнянням сімейства динамічних систем.

РОЗДІЛ 2
ІНВАРІАНТНІ КОНУСИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У цьому розділі дисертації досліджуються позитивні динамічні системи з використанням теорії конусів та операторів у напівупорядкованому просторі.

Розглядаються конуси невід'ємних та невід'ємно визначених матриць, встановлюються критерії інваріантності еліпсоїдальних конусів. Вводяться нові типи конусів (узагальнення кругових та еліпсоїдальних) та формулюються критерії їх інваріантності для диференціальних та різницевих систем. Формулюється також критерій позитивності нелінійних диференціальних систем із запізненням.

Розвивається методика побудови інваріантних множин диференціальних систем, які описуються у вигляді конусних нерівностей із застосуванням оператора диференціювання в силу системи. Як наслідок, з даної методики випливають узагальнення відомих та наведених в підрозділах 2.2 і 2.3 умов інваріантності деяких типів конусів для лінійних систем. Наводяться приклади застосування запропонованої методики для диференціальних систем першого та другого порядків.

2.1. Позитивні та монотонні диференціальні системи відносно конуса

Наведемо основні поняття з теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі та деякі допоміжні означення, які використовуються в дисертації.

Означення 2.1. Опукла замкнута множина $\mathcal{K}$ дійсного нормованого простору $\mathcal{E}$ називається клином, якщо $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\ \forall\alpha, \beta \geq 0$. Клин $\mathcal{K}$ з лезом $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$ є конусом.

Спряжений конус $\mathcal{K}^*$ складають лінійні функціонали $\varphi \in \mathcal{E}^*$, що приймають невід'ємні значения на елементах $\mathcal{K}$, причому,

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{E} :\ \varphi(X) \geq 0,\ \forall\varphi \in \mathcal{K}^*\}.$$

Простір з конусом напівупорядкований: $X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y \iff Y - X \in \mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ з непорожньою множиною внутрішніх точок $\mathcal{K}^0 = \{X : X \overset{\mathcal{K}}{>} 0\}$ — тілесний. Конус $\mathcal{K}$ називається нормальним, якщо для $0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y$ виконується $\|X\| \leq \nu\|Y\|$, де ν — універсальна константа. Найменше таке число ν є константою нормальності конуса. Конус $\mathcal{K}$ є нормальним лише тоді, коли

$$X, Y \in \mathcal{K},\ \|X\| = \|Y\| = 1 \implies \|X + Y\| \geq \delta > 0,$$

де δ — константа, що не залежить від X і Y. Критерієм нормальності конуса є також умова

$$U \overset{\mathcal{K}}{\leq} X \overset{\mathcal{K}}{\leq} V \implies \|X\| \leq \nu_-\|U\| + \nu_+\|V\|,$$

де $\nu_\pm > 0$ — універсальні константи.

Якщо $\mathcal{E} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ є відтворюючим. Конус $\mathcal{K}$ є нормальним лише тоді, коли спряжений конус $\mathcal{K}^*$ — відтворюючий.

Нехай $X(t) = \Phi(t, t_0, X_0) \in \mathcal{E}$ — стан деякої динамічної системи при $t \geq t_0 \geq 0$. Оператор-функція Φ описує перехід з початкового стану $X(t_0) = X_0$ в стан $X(t)$ при $t > t_0$. Система має інваріантну множину $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$ із $X_0 \in \mathcal{K}$ випливає $X(t) \in \mathcal{K}$ при $t > t_0$.

Означення 2.2. Динамічна система називається:

а) позитивною відносно конус $\mathcal{K}$, якщо даний конус є інваріантним;

б) монотонною відносно конуса $\mathcal{K}$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$

$$X_{10} \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_{20} \implies X_1(t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_2(t), \quad t > t_0,$$

де $X_k(t) = \Phi(t, t_0, X_{k0})$, $k = 1, 2$.

Аналогічно означаються інваріантні множини, властивості позитивності і монотонності відносно конуса $\mathcal{K}$ для динамічних систем з дискретним часом.

Умови позитивності і монотонності класу диференціальних систем

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

відносно тілесних конусів описуються за допомогою елементів відповідних спряжених конусів. А саме, система (2.1) є позитивною і монотонною відносно тілесного конуса $\mathcal{K}$, якщо виконуються відповідні умови [47]

$$\begin{gathered} X \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0,\ \varphi \in \mathcal{K}^*,\ \varphi(X) = 0 \implies \varphi\left(F(X, t)\right) \geq 0, \\ X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y,\ \varphi \in \mathcal{K}^*,\ \varphi(X - Y) = 0 \implies \varphi\left(F(Y, t) - F(X, t)\right) \geq 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

де $\mathcal{K}^*$ — спряжений конус, $t \geq 0$.

Лінійна диференціальна система у банаховому просторі

$$\dot{X} = MX, \quad X \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

де $M : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — обмежений оператор, має інваріантний конус $\mathcal{K}$, тобто є позитивною відносно $\mathcal{K}$, якщо експоненціальний оператор e^{Mt} позитивний відносно $\mathcal{K}$:

$$e^{Mt}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad \forall t \geq 0.$$

Лінійна різницева система

$$X_{k+1} = MX_k, \quad X_k \in \mathcal{E}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{2.4}$$

має інваріантний конус $\mathcal{K}$, якщо оператор $M \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ — позитивний відносно $\mathcal{K}$.

Має місце наступне твердження [46].

Лема 2.1. *Якщо дві системи виду (2.3), які відповідають операторам M_1 і M_2, позитивні, то система (2.3) з оператором $M = M_1 + M_2$ також позитивна.*

Введемо клас лінійних операторів, які подаються у вигляді

$$M = P - L, \quad P\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\mathcal{K}, \tag{2.5}$$

де P і L – відповідно позитивний і позитивно оборотний оператори, а $\mathcal{K} \subset R^{n\times n}$ — нормальний відтворюючий конус.

Врахувавши, лему 2.1 та те, що з позитивності оператора P випливає позитивність оператор-функції e^{Pt}, $t \geq 0$, отримуємо важливе твердження. Якщо $\mathcal{K} \subset R^{n\times n}$ — нормальний відтворюючий конус і в просторі $R^{n\times n}$ діє оператор (2.5), то при виконанні умов

$$e^{-Lt}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad P\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad \forall t \geq 0$$

система (2.3) з оператором (2.5) є позитивною.

Умови існування інваріантних тілесних конусів у просторах скінченновимірних систем (2.3) і (2.4) описуються за допомогою спектра $\sigma(M)$ [56, 57]. Система (2.3) позитивна відносно деякого тілесного конуса тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\alpha(M) = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(M)\} \in \sigma(M),$$

$$\lambda \in \sigma(M),\ \operatorname{Re}\lambda = \alpha(M) \implies d(\lambda) \leq d(\alpha(M)),$$

де $d(\cdot)$ — кратність власного значення матриці як кореня її мінімального полінома. Аналогічно, система (2.4) позитивна відносно деякого тілесного конуса тоді і тільки тоді, коли

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M)\} \in \sigma(M),$$

$$\lambda \in \sigma(M),\ |\lambda| = \rho(M) \implies d(\lambda) \leq d(\rho(M)).$$

Якщо останні умови доповнити нерівністю $d(\rho(M)) \leq 3$ ($d(\rho(M)) \leq 2$ у випадку $\rho(M) = 0$) і вимагати, щоб жорданова канонічна форма матриці M

мала не більше одного блока порядку ≥ 2 з власними значеннями $\lambda \in \sigma(M)$ при $|\lambda| = \rho(M)$, то маємо критерій існування інваріантного еліпсоїдального конуса (2.14) для системи (2.4) [23].

2.2. Конуси невід'ємних та невід'ємно визначених матриць

Розглянемо в просторі $R^{n\times m}$ множину

$$R_+^{n\times m} = \left\{X \in R^{n\times m} : x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}\right\}.$$

Множина $R_+^{n\times m}$ є конусом невід'ємних матриць. При $m = 1$ ця множина перетворюється у конус невід'ємних векторів

$$R_+^n = \left\{x \in R^n : x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}\right\}.$$

Сформулюємо умови позитивності матричної диференціальної системи

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} A_i(t)XB_j(t), \quad X \in R^{n\times m}, \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

де A_i, B_j — задані матриці розмірів $n\times n$, $m\times m$ відповідно.

Систему (2.6) можна звести до еквівалентної векторної диференціальної системи

$$\dot{x} = G(t)x, \quad t \geq 0, \tag{2.7}$$

де

$$G(t) = \sum_{ij} A_i(t) \otimes B_j^T(t), \quad x = [x_{1*}, \ldots x_{n*}]^T.$$

У даному випадку вектор x складається з елементів матриці X, які впорядковані по стрічкам x_{i*}. При такому перетворенні дослідження на позитивність системи (2.6) відносно конуса невід'ємних матриць зводиться до дослідження на позитивність системи (2.7) відносно конуса R_+^{nm}.

Відомо [35], що система (2.7) позитивна відносно конуса невід'ємних векторів, якщо позадіагональні елементи матриці $G(t)$ невід'ємні:

$$g_{ij}(t) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad i \neq j.$$

Отже, останні умови є критерієм позитивності системи (2.6) відносно конуса $R_+^{n\times m}$. Зокрема, система

$$\dot{X} = A(t)XB(t)$$

позитивна відносно конуса $R_+^{n\times m}$, якщо виконуються умови

$$a_{ij}(t)b_{ks}(t) \geq 0, \quad i \neq j \vee k \neq s, \quad t \geq 0.$$

Розглянемо в просторі $R^{n\times n}$ множину невід'ємно визначених матриць

$$\mathcal{K} = \left\{X \in R^{n\times n} : X = X^T \geq 0\right\},$$

яка є конусом, і диференціальну систему

$$\dot{X} = A^T X + XA + \sum_{k=1}^{s} B_k^T X B_k, \quad A, B_k \in R^{n\times n}. \tag{2.8}$$

Систему (2.8) можна подати у вигляді (2.3) з оператором (2.5), де

$$LX = -A^T X - XA, \quad PX = \sum_{k=1}^{s} B_k^T X B_k.$$

Оскільки оператор-функції

$$e^{-Lt}X = e^{A^*t}Xe^{At}, \quad e^{Pt}X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}P^k X, \quad t \geq 0$$

позитивні, то, згідно з лемою 2.1, система (2.8) є позитивною відносно $\mathcal{K}$.

Розв'язки системи (2.8) з оператором (2.5) можна розглядати як матриці других моментів для стохастичної системи Іто

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_{k} B_k x(t) dw_k(t), \tag{2.9}$$

де w_k – компоненти стандартного вінерівського процесу [40–42].

2.3. Круговий та еліпсоїдальний конуси

Розглянемо в просторі R^{n+1} множину

$$\mathcal{K}(Q,h) = \left\{z \in R^{n+1} : z^T Qz \geq 0,\ z^T Qh \geq 0\right\}, \tag{2.10}$$

де $Q = Q^T$ — симетрична матриця з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$, h — довільний вектор такий, що $h^T Qh > 0$. Гіперплощина $\mathcal{P} = \{z : z^T Qh = 0\}$ розділяє два конуси $\mathcal{K}(Q, h)$ і $-\mathcal{K}(Q, h)$ і проходить через їх спільну вершину $z = 0$ (рис. 2.1).

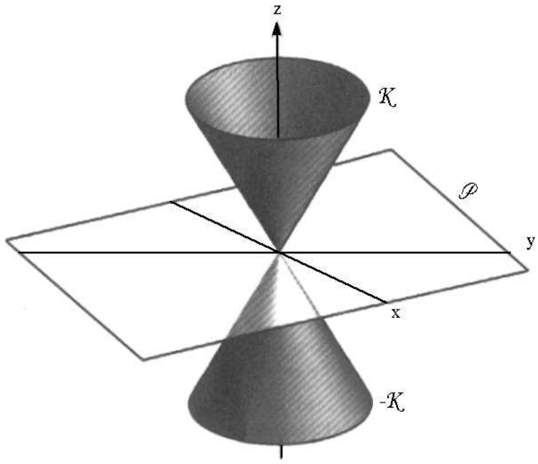


Рис. 2.1. Конуси $\pm\mathcal{K}(Q, h)$ в R^3.

Лема 2.2. *Множина $\mathcal{K}(Q, h)$ є конусом.*

Доведення. Відомо, що $i_+(Q) = 1$ лише тоді, коли [103]

$$S = Q - \frac{1}{\omega} Qhh^T Q \leq 0,$$

де $\omega = h^T Qh > 0$. Якщо $z_1 \in \mathcal{K}(Q, h)$ і $z_2 \in \mathcal{K}(Q, h)$, то, використовуючи розклад $S = -R^T R$ і нерівність Коші, маємо співвідношення

$$\frac{1}{\omega} z_1^T Qhh^T Qz_1 + z_1^T Sz_1 = \alpha^2 - a^T a \geq 0, \ \alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}} z_1^T Qh \geq 0, \ a = Rz_1,$$

$$\frac{1}{\omega} z_2^T Qhh^T Qz_2 + z_2^T Sz_2 = \beta^2 - b^T b \geq 0, \ \ \beta = \frac{1}{\sqrt{\omega}} z_2^T Qh \geq 0, \ b = Rz_2,$$

$$\frac{1}{\omega} z^T Qhh^T Qz + z^T Sz = \alpha^2 - a^T a + \beta^2 - b^T b + 2(\alpha\beta - a^T b) \geq 0,$$

де $z = z_1 + z_2$. Отже $z_1 + z_2 \in \mathcal{K}(Q, h)$.

Якщо $z \in \pm\mathcal{K}(Q, h)$, то $x^T Qh = 0$, $z^T Qz = z^T Sz = 0$, $Qz = Sz = 0$ і $z = 0$. Тут ми врахували невиродженість Q і наступну властивість матриці $S \leq 0$: $z^T Sz = 0 \Longleftrightarrow Sz = 0$.

Властивість конуса $\alpha\mathcal{K}(Q, h) \subset \mathcal{K}(Q, h)$ при $\alpha \geq 0$ очевидна.

Лема доведена.

Зазначимо, що $\mathcal{K}(Q,h) = \mathcal{K}(Q,h_1)$ для довільного вектора $h_1 \in \operatorname{int}\mathcal{K}(Q,h)$. Зокрема, h може бути власним вектором матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню [55].

Лема 2.3. *Множина внутрішніх точок конуса $\mathcal{K}(Q,h)$, його границя та спряжений конус відповідно мають вигляд*

$$\operatorname{int}\mathcal{K}(Q,h) = \left\{z \in \mathcal{K}(Q,h) : z^TQz > 0,\ z^TQh > 0\right\},$$

$$\partial\mathcal{K}(Q,h) = \left\{z \in \mathcal{K}(Q,h) : z^TQz = 0\right\},$$

$$\mathcal{K}^*(Q,h) = Q\mathcal{K}(Q,h).$$

Нехай T — невироджена матриця перетворення

$$T^TQT = \Delta = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = Tg.$$

Тоді $\mathcal{K}(Q,h) = T\mathcal{K}(\Delta,g)$. Якщо $g = e = [0,\ldots,0,1]^T$, то $\mathcal{K}(\Delta,g)$ співпадає з круговим конусом Мінковського [104]

$$\mathcal{K} = \left\{z \in R^{n+1} :\ z^T = [x^T,u],\ \|x\| \le u\right\}, \tag{2.11}$$

де $\|x\| = \sqrt{x^Tx}$. Отже, $\mathcal{K}(Q,h) = \alpha T\mathcal{K}$, де $\alpha = e^TT^{-1}h$, тобто $\mathcal{K}(Q,h)$ співпадає з $T\mathcal{K}$ $(-T\mathcal{K})$, якщо $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$.

Оскільки $\mathcal{K}$ є нормальним конусом з константою нормальності 1, то конус $\mathcal{K}(Q,h)$ також нормальний, його константа нормальності не перевищує $\sqrt{t_-/t_+}$, де $t_-(t_+)$ — мінімальне (максимальне) власне значення матриці TT^T.

Побудуємо матрицю перетворення T за допомогою спектрального розкладу

$$Q = \gamma hh^T - H\Gamma H^T = GDG^T, \quad \sigma(Q) = \{-\gamma_1,\ldots,-\gamma_n,\gamma\}, \tag{2.12}$$

де $\gamma > 0$, $\Gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\} > 0$, $D = \operatorname{diag}\{-\gamma_1,\ldots,-\gamma_n,\gamma\}$, $G = [H,h]$, $h^Th = 1$, $H^TH = I$, $h^TH = 0$, $GG^T = G^TG = I$. Конус (2.10) визначаємо у вигляді

$$\mathcal{K}(Q) = \left\{z \in R^{n+1} : z^TQz \ge 0,\ z^Th \ge 0\right\}, \tag{2.13}$$

де h — нормований власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню γ. При цьому виконуються такі співвідношення

$$\mathcal{K}^*(Q) = \left\{w \in R^{n+1} \colon w^T Q^{-1} w \geq 0, w^T h \geq 0\right\} = \mathcal{K}(Q^{-1}) = Q\mathcal{K}(Q),$$

$$\mathcal{K}(Q) = G\mathcal{K}(D) = T\mathcal{K}, \quad \mathcal{K}(D) = L\mathcal{K}(\Delta), \quad \mathcal{K}(\Delta) = \mathcal{K},$$
$$T = GL, \quad L = \mathrm{diag}\{{\gamma_1}^{-1/2}, \ldots, {\gamma_n}^{-1/2}, \gamma^{-1/2}\}.$$

Зазначимо, що належність вектора z конусу $\mathcal{K}$ описується в термінах невід'ємно визначених матриць [105]:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \iff u \geq 0, \ u^2 I \geq xx^T \iff \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0.$$

Аналогічно,

$$z \in \mathcal{K}(Q) \iff u_z \geq 0, \ \gamma u_z^2 \Gamma^{-1} \geq U_z U_z^T \iff \begin{bmatrix} u_z \Gamma^{-1} & U_z \\ U_z^T & u_z \gamma \end{bmatrix} \geq 0,$$

де $u_z = h^T z$, $U_z = H^T z$.

Лема 2.4. *Для кожного вектора $z \in \mathcal{K}(Q)$ квадратична форма $z^T \Omega z$ невід'ємна тоді і тільки тоді, коли $\Omega \geq \alpha Q$ для деякого $\alpha \geq 0$.*

Доведення. Відомо, що $w^T \Omega w \geq 0$ при $w \in \mathcal{K}$ лише тоді, коли існує таке $\alpha \geq 0$, що виконується нерівність $\Omega \geq \alpha\Delta$ [24]. Оскільки $\mathcal{K}(Q) = T\mathcal{K}$, то поклавши $z = Tw$ і використовуючи закон інерції маємо критерій невід'ємності квадратичної форми $z^T \Omega z$ на конусі $\mathcal{K}(Q)$ у вигляді матричної нерівності $\Omega \geq \alpha Q$.

Лема доведена.

Введемо наступні позначення

$$M = [R, l] = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix},$$

$$A = [a_1, \ldots, a_n], \quad b^T = [b_1, \ldots, b_n], \quad c^T = [c_1, \ldots, c_n].$$

Встановимо умови, при яких $\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом матриці M.

Лема 2.5. *$\mathcal{K}$ є інваріантним конусом матриці M тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$l \in \mathcal{K}, \quad M\Delta M^T \geq \alpha\Delta, \tag{2.14}$$

де $\alpha \geq 0$ — деяке невід'ємне число.

Доведення. Оскільки

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \iff \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0,$$

то включення $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ означає, що

$$S_z = \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0 \implies S_{Mz} = \begin{bmatrix} (c^T x + du)I & Ax + bu \\ x^T A^T + ub^T & c^T x + du \end{bmatrix} \geq 0,$$

тобто для довільних векторів $z \in \mathcal{K}$ і $g \in R^{n+1}$ повинні виконуватись співвідношення

$$g^T S_{Mz} g = l_g^T z \geq 0, \quad l_g^T = \left[g^T S_{r_1} g, \ldots, g^T S_{r_n} g, g^T S_l g\right],$$

$$S_l = \begin{bmatrix} dI & b \\ b^T & d \end{bmatrix}, \quad S_{r_i} = \begin{bmatrix} c_i I & a_i \\ a_i^T & c_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Враховуючи самоспряженість конуса $\mathcal{K}$, маємо $l_g \in \mathcal{K}$, тобто

$$g^T S_l g = w^T l \geq 0, \quad (g^T S_l g)^2 - \sum_{i=1}^{n} (g^T S_{r_i} g)^2 = w^T S w \geq 0,$$

де

$$g = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \ w = \Phi(g) = \begin{bmatrix} 2vy \\ y^T y + v^2 \end{bmatrix}, \ S = ll^T - RR^T = M\Delta M^T.$$

Легко встановити, що нелінійне перетворення $\Phi : R^{n+1} \to R^{n+1}$ зберігає конус $\mathcal{K}$, більше того, $\Phi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Тому можна скористатись лемою 2.4.

Отже, критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}$ для матриці M представляється у вигляді (2.14).

Лема доведена.

Теорема 2.1. *$\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом матриці M тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$h^T Mh \geq 0, \quad h^T MQ^{-1}M^T h \geq 0, \quad M^T QM \geq \alpha Q, \tag{2.15}$$

де $\alpha \geq 0$ — деяке невід'ємне число.

Доведення. Оскільки $\mathcal{K}(Q) = T\mathcal{K}$, то умови $M\mathcal{K}(Q) \subset \mathcal{K}(Q)$ і $M_T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, де $M_T = T^{-1}MT$, еквівалентні.

Застосуємо лему 2.5 до матриці M_T. Її останній стовпчик згідно з розкладом (2.12) має вигляд $l_T = \gamma^{-1/2}T^{-1}Mh$. Тому умови (2.14) для вектора l_T і матриці M_T зводяться до вигляду

$$h^T Mh \geq 0, \quad h^T M^T QMh \geq 0, \quad MQ^{-1}M^T \geq \alpha Q^{-1}. \tag{2.16}$$

Відомо, що матриця M має інваріантний конус $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли матриця M^T має інваріантний конус $\mathcal{K}^*$. В нашому випадку $\mathcal{K}^*(Q) = \mathcal{K}(Q^{-1})$. Отже, отриманий критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}(Q)$ типу (2.16) на основі закону інерції представляється у вигляді (2.15). Домноживши останню нерівність умов (2.15) зліва і справа на вектори h^T і h відповідно, отримаємо наступну оцінку $0 \leq \alpha \leq \gamma^{-1}h^T M^T QMh$.

Теорема доведена.

Зазначимо, що теорема 2.1 узагальнює основний результат роботи [55] для еліпсоїдальних конусів типу $\mathcal{K}(Q)$.

Розглянемо лінійну диференціальну систему

$$\dot{z} = Mz, \quad z \in R^{n+1}, \quad t \geq 0, \tag{2.17}$$

і сформулюємо умови її позитивності відносно конуса $\mathcal{K}(Q) \subset R^{n+1}$, тобто умов, при яких має місце включення $e^{Mt}\mathcal{K}(Q) \subset \mathcal{K}(Q)$ для будь-якого $t \geq 0$. В цьому випадку $\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом системи (2.17).

Теорема 2.2. *$\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом системи (2.17) тоді і тільки тоді, коли для деякого $\alpha \in R^1$ виконується матрична нерівність*

$$M^T Q + QM \geq \alpha Q. \tag{2.18}$$

Доведення. Критерій позитивності системи в термінах спряженого конуса $\mathcal{K}^*(Q) = \mathcal{K}(Q^{-1})$ має вигляд [47]

$$z \in \mathcal{K}(Q),\;\; w \in \mathcal{K}^*(Q),\;\; w^T z = 0 \quad \Longrightarrow \quad w^T M z \geq 0. \tag{2.19}$$

Покажемо, що із ортогональності ненульових векторів $z \in \mathcal{K}(Q)$ і $w \in \mathcal{K}^*(Q)$ випливає, що $w = \beta Q z$, де $\beta > 0$. Нехай $w = Qg$, де g — деякий вектор, і виконуються співвідношення

$$z^T Q z \geq 0, \quad w^T Q^{-1} w = g^T Q g \geq 0, \quad w^T z = g^T Q z = 0.$$

Тоді, якщо $V = [z, g]$ — матриця повного рангу, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon = V^T (Q + \varepsilon I) V = \begin{bmatrix} z^T Q z & 0 \\ 0 & g^T Q g \end{bmatrix} + \varepsilon V^T V > 0.$$

Звідси випливає, що вектори z і g повинні бути лінійно залежними. В противному випадку для деякого $\varepsilon > 0$ маємо протиріччя:

$$1 = i_+(Q) = i_+(Q + \varepsilon I) \geq i_+(G_\varepsilon) = 2.$$

Отже, $w = \beta Q z$, причому, $\beta > 0$, оскільки $z^T h > 0$ і $w^T h > 0$.

Умова (2.19) означає, що $z^T (M^T Q + Q M) z \geq 0$ для довільного $z \in \mathcal{K}(Q)$, що згідно з лемою 2.4 еквівалентно умові (2.18).

Зауважимо, що в даному випадку $z \in \partial\mathcal{K}(Q)$, тобто $z^T Q z = 0$. Тому умова (2.18) забезпечує інваріантність конуса $\mathcal{K}(Q)$ для системи (2.17) при деякому $\alpha \in R^1$. Домноживши нерівність (2.18) зліва і справа на вектори h^T і h відповідно, отримаємо наступну оцінку $\alpha \leq 2 h^T M h$.

Теорема доведена.

Розглянемо один із способів знаходження інваріантного еліпсоїдального конуса $\mathcal{K}(Q)$ для системи (2.17). Будемо вимагати виконання строгої нерівності (2.18), яку перепишемо у вигляді

$$\left(M - \frac{\alpha}{2} I\right)^T Q + Q \left(M - \frac{\alpha}{2} I\right) > 0. \tag{2.20}$$

Згідно з теоремою інерції (див., наприклад, [21]) її розв'язок повинен задовольняти умови

$$i^{+}(M) = i_{+}(Q), \quad i^{-}(M) = i_{-}(Q), \quad i_0(Q) = 0,$$

де $i^{+}(M)$ ($i^{-}(M)$) — кількість власних значень матриці M, розташованих справа (зліва) від прямої $2\mathrm{Re}\lambda = \alpha$. Виберемо α так, щоб $i^{+}(M) = 1$ і $i^{-}(M) = n-1$. Тоді можна розв'язати нерівність (2.18) відносно матриці Q, яка описує шуканий еліпсоїдальний конус, інваріантний для системи (2.17). При цьому $i(Q) = \{1, n-1, 0\}$.

Приклад 2.1. Розглянемо диференціальну систему

$$\dot{z} = Mz, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

При $\alpha = 5$ маємо $\sigma\left(M - \frac{\alpha}{2}I\right) = \{0.5, -0.0858, -2.9142\}$. Розв'язуючи нерівність (2.18) відносно Q для відомих M і α, отримаємо

$$Q = 10^8 \cdot \begin{bmatrix} -0.2882 & 1.1526 & 1.5369 \\ 1.1526 & -3.5540 & -5.1869 \\ 1.5369 & -5.1869 & -7.3961 \end{bmatrix}, \; h = \begin{bmatrix} 0.6682 \\ 0.6691 \\ -0.3252 \end{bmatrix}, \; i(Q) = \{1, 2, 0\}.$$

Класу конусів типу $\mathcal{K}(Q)$ належить так званий світловий конус [106]

$$\mathcal{K}_a = \{z \in R^{n+1} : \; \|z\| \le (a, z)\}, \tag{2.21}$$

де $(a, z) = a^T z$ — скалярний добуток, a — заданий вектор з нормою $\|a\| > 1$. Дійсно, множина (2.21) описується у вигляді (2.13), якщо покласти

$$Q = aa^T - I, \quad h = \|a\|^{-1} a.$$

При цьому $\gamma = a^T a - 1$, $i(Q) = \{1, n, 0\}$. Оскільки $Q^{-1} = \frac{1}{\gamma} aa^T - I$, то $\mathcal{K}_a^* = \mathcal{K}_b$, де $b = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} a$. У випадку $\|a\| = \sqrt{2}$ конус $\mathcal{K}_a$ самоспряжений.

Знайдемо умови інваріантності світлового конуса для системи (2.17).

Нехай R ортогональне доповнення вектора a, тобто $a^T R = 0$, $R^T R = I$. Нерівність (2.18) еквівалентна нерівності $G^T(M^T Q + QM - \alpha Q)G \geq 0$, де $G = [R, a]$.

Перетворивши її, отримаємо

$$\begin{bmatrix} -A^T - A + \alpha I & \gamma c - b \\ \gamma c^T - b^T & 2\gamma d - \alpha\gamma(\gamma+1) \end{bmatrix} \geq 0, \tag{2.22}$$

де

$$A = R^T M R, \quad b = R^T M a, \quad c^T = a^T M R, \quad d = a^T M a.$$

Якщо $\alpha < \frac{2d}{\gamma+1}$, то на основі леми Шура отримаємо еквівалентну нерівність

$$\alpha^2 S_0 + \alpha S_1 + S_2 \geq 0, \tag{2.23}$$

де

$$S_0 = -\gamma(\gamma+1)I, \quad S_1 = 2\gamma d I + \gamma(\gamma+1)(A^T + A),$$
$$S_2 = -2\gamma d(A^T + A) - (\gamma c - b)(\gamma c - b)^T.$$

Матрична нерівність (2.23) виконується лише тоді, коли для довільного $q \in R^n$ $(q^T q = 1)$

$$\alpha^2 q^T S_0 q + \alpha q^T S_1 q + q^T S_2 q \geq 0, \tag{2.24}$$

де коефіцієнти квадратного тричлена обмежені найменшим (λ_{min}) і найбільшим (λ_{max}) власними значеннями відповідних матриць.

Введемо позначення

$$\lambda_1 = \gamma(\gamma+1) > 0, \quad \lambda_2 = 2\gamma d + \gamma(\gamma+1)\lambda_{min}\left(A^T + A\right),$$

$$\lambda_3 = \lambda_{max}\left(2\gamma d(A^T + A) + (\gamma c - b)(\gamma c - b)^T\right).$$

Для того, щоб виконувалась нерівність (2.24) достатньо виконання нерівності $-\alpha^2\lambda_1 + \alpha\lambda_2 - \lambda_3 > 0$. Вона буде мати розв'язок $\alpha \in R^1$ тоді і тільки тоді, коли $\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3 \geq 0$. У цьому випадку α буде лежати в інтервалі

$$\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_1} \leq \alpha \leq \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_1}.$$

Отже, маємо наступне твердження.

Теорема 2.3. *Якщо виконуються нерівності*

$$\frac{2d}{\gamma+1} > \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_1}, \quad \lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3 \geq 0,$$

то $\mathcal{K}_a$ є інваріантним світловим конусом системи (2.17).

Теорема 2.4. *Нехай $(M - M^T)a = 0, \quad a^T a = 2$. Тоді $\mathcal{K}_a$ – інваріантний конус системи (2.17) тоді і тільки тоді, коли $\alpha_m \leq a^T Ma$, де α_m – максимальне власне значення матриці $R^T(M + M^T)R$.*

Доведення. Нехай в (2.22) $\gamma c - b = 0$, $\gamma = 1$, тобто $R^T M^T a - R^T Ma = 0$, $a^T a = 2$. Рівність $R^T(M^T - M)a = 0$ буде мати місце при $(M^T - M)a = 0$. Це можливо, якщо матриця M непарного порядку. Тоді нерівність (2.22) еквівалентна системі нерівностей $-A^T - A + \alpha I \geq 0$, $d - \alpha \geq 0$. Сумісність системи зберігається при $\alpha_m \leq \alpha \leq a^T Ma$, де $\alpha_m = \max \sigma(A + A^T)$.

Теорема доведена.

2.4. Конуси типу $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$ і $\mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$

Розглянемо у просторі R^{n+m} множини векторів

$$\mathcal{K}_\mu(\alpha, p) = \{z \in R^{n+m} : \ z^T = [x^T, u^T], \ u \in R^m_+, \ \|x\|_p \leq \mu_\alpha(u)\}, \qquad (2.25)$$

$$\mathcal{K}_\sigma(\beta, q) = \{w \in R^{n+m} : \ w^T = [y^T, v^T], \ v \in R^m_+, \ \|y\|_q \leq \sigma_\beta(v)\}, \qquad (2.26)$$

де $\mu_\alpha(u) = \alpha \min\limits_k u_k$, $\sigma_\beta(v) = \beta \sum\limits_k v_k$, $R^m_+ \subset R^m$— конус векторів з невід'ємними елементами, $\|x\|_p$ — одна з таких векторних норм:

$$\|x\|_\infty = \max_k |x_k|, \quad \|x\|_1 = \sum_k |x_k|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_k x_k^2} \ \text{— евклідова норма,}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} \ \text{— норма Гельдера.}$$

Нехай параметри α, β, p і q задовольняють співвідношення

$$\alpha\beta = 1, \ \alpha > 0, \ \beta > 0, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \ p \geq 1, \ q \geq 1. \qquad (2.27)$$

Тоді для кожної із введених норм множини (2.25) і (2.26) є тілесними конусами, причому виконуються нерівності

$$|y^T x| \le \|x\|_p \|y\|_q, \quad v^T u \ge \mu_\alpha(u)\sigma_\beta(v). \tag{2.28}$$

У випадку $p > 1 (q > 1)$ перша нерівність (2.28) є нерівність Гельдера.

Лема 2.6. *При умовах (2.27)* $\mathcal{K}^*_\mu(\alpha, p) = \mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$.

Доведення. Якщо $z \in \mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$ і $w \in \mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$, то згідно з (2.27) і (2.28) маємо

$$y^T x + v^T u \ge -\|x\|_p \|y\|_q + \mu_\alpha(u)\sigma_\beta(v) \ge 0.$$

Це означає, що $\mathcal{K}_\sigma(\beta, q) \subset \mathcal{K}^*_\mu(\alpha, p)$.

Зворотне включення $\mathcal{K}_\sigma(\beta, q) \supset \mathcal{K}^*_\mu(\alpha, p)$ також виконується. Дійсно, нехай $y^T x + v^T u \ge 0$ для довільного вектора $z \in \mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$. Тоді, очевидно, $v \in R^m_+$ і для встановлення нерівності $\|y\|_q \le \sigma_\beta(v)$ слід розглянути такі випадки:

$$1)\ p = 1,\ q = \infty, \quad x_k = \begin{cases} -y_s, & k = s \\ 0, & k \ne s \end{cases}, \quad u = \beta \|x\|_1 e,$$

$$2)\ p = \infty,\ q = 1, \quad x_k = \begin{cases} -1, & y_k \ge 0 \\ 1, & y_k < 0 \end{cases}, \quad u = \beta \|x\|_\infty e,$$

$$3)\ p > 1,\ q > 1, \quad x_k = \begin{cases} -|y_k|^{q/p}, & y_k \ge 0 \\ |y_k|^{q/p}, & y_k < 0 \end{cases}, \quad u = \beta \|x\|_p e,$$

де $|y_s| = \|y\|_\infty$, $e = [1, \ldots, 1]^T$. Для кожного з них виконується співвідношення

$$y^T x + v^T u = -\|x\|_p \|y\|_q + \|x\|_p\, \sigma_\beta(v) \ge 0,$$

звідки випливає, що $\|y\|_q \le \sigma_\beta(v)$, тобто $w \in \mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$.

Лема доведена.

Зазначимо, що при умовах $\alpha = \beta = 1$, $m = 1$ і $p = q = 2$ множини $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$ і $\mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$ співпадають з круговим конусом Мінковського (2.11).

2.5. Методи побудови інваріантних множин

Розглянемо у банаховому просторі диференціальну систему

$$\dot{X} = F(X,t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{2.29}$$

де $F : \mathcal{X} \times [0,\infty) \to \mathcal{X}$ — оператор, що задовольняє умови існування та єдиності розв'язків $X(t)$ в деякій області $\Omega \subset \mathcal{X}$ з початковими умовами $X(t_0) = X_0 \in \Omega$. Система (2.29) має інваріантну множину $\mathcal{I}_t \subset \mathcal{X}$, якщо із $X(t_0) \in \mathcal{I}_{t_0}$ випливає $X(t) \in \mathcal{I}_t$ при $t > t_0 \geq 0$.

Будемо шукати інваріантні множини системи (2.29) у вигляді

$$\mathcal{I}_t = \{X \in \Omega : V(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0\}, \tag{2.30}$$

де $V : \mathcal{X} \times [0,\infty) \to \mathcal{E}$ — деякий оператор, $\overset{\mathcal{K}}{\geq}$ — нерівність, породжена заданим конусом або клином $\mathcal{K}$ у просторі $\mathcal{E}$. Для цього визначимо оператор диференціювання D_t в силу системи як (сильну) похідну складної функції:

$$D_t V(X,t) = \frac{d}{d\tau} V\left(\Psi(\tau,t,X),\tau\right)|_{\tau=t},$$

де $X(\tau) = \Psi(\tau,t,X)$ – розв'язок системи з початковою умовою $X(t) = X$. Будемо припускати, що $V(X,t)$ є неперервною функцією разом зі своїми частинними похідними в області $\Omega\times[0,\infty)$. Наприклад, якщо $\mathcal{X} = R^n$ і $\mathcal{E} = R^m$, то

$$D_t V(X,t) = V_X'(X,t)F(X,t) + V_t'(X,t),$$

де $V_X'(X,t)$ – матриця Якобі розміру $m \times n$, складена із частинних похідних функції V по X. По аналогії можна розглядати узагальнення даного співвідношення на основі застосування похідних нелінійного оператора типу Гато і Фреше. Наприклад, можна вважати, що $V_t'(X,t)$ є сильною похідною функції по t, а $V_X'(X,t)$ – похідна Гато по X, тобто лінійний обмежений оператор типу

$$V_X'(X,t)H = \frac{d}{d\tau} V\left(X + \tau H, t\right)|_{\tau=0}.$$

Зауваження 2.1. В теорії порівняння систем застосовуються верхні праві та ліві похідні в силу системи типу Діні

$$D_t^{\pm} V(X,t) = \limsup_{\tau\to 0\pm} \frac{1}{\tau}\left[V\left(X + \tau F(X,t), t+\tau\right) - V(X,t)\right]$$

при умовах, коли $V(X,t)$ не є диференційованою, а лише неперервною і локально ліпшицевою по X функцією.

Теорема 2.5. *Нехай $\mathcal{K}$ — тілесний конус. Тоді $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи (2.29) тоді і тільки тоді, коли при кожному $t \geq 0$ виконується умова*

$$X \in \mathcal{I}_t, \quad \varphi \in \mathcal{K}^*, \quad \varphi\left(V(X,t)\right) = 0 \implies \varphi\left(D_t V(X,t)\right) \geq 0. \tag{2.31}$$

Доведення. Нехай $X(t)$ — розв'язок системи (2.29) з початковою умовою $X(t_0) = X_0 \in I_{t_0}$. Тоді оператор D_t діє як диференціювання за часом складної функції $V(X(t),t)$ і виконується рівністть

$$\int_{t_0}^{t} D_\tau V(X(\tau),\tau)\, d\tau = V(X(t),t) - V(X_0,t_0).$$

Звідси, зокрема, випливає, що $V(X(t),t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} V(X_0,t_0)$, якщо $D_t V(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $X \in \mathcal{I}_t$ і $t \geq t_0$. При цьому $V(X(t),t) \overset{\mathcal{K}}{>} 0$, якщо $V(X_0,t_0) \overset{\mathcal{K}}{>} 0$.

Нехай в деякий момент часу $\tau \geq t_0$ значення функції $V(X_\tau,\tau)$, де $X_\tau = X(\tau)$, досягає границі конуса $\mathcal{K}$. Тоді для деякого ненульового функціоналу $\varphi \in \mathcal{K}^*$ маємо $\varphi(V(X_\tau,\tau)) = 0$.

Разом з (2.30) розглянемо множину

$$\mathcal{I}_t^\varepsilon = \{X \in \mathcal{X} : V_\varepsilon(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0\}, \quad V_\varepsilon(X,t) = V(X,t) + \varepsilon\omega(t)Y,$$

де $\varepsilon > 0$, $Y \overset{\mathcal{K}}{>} 0$, $\omega(t)$ — невід'ємна неперервно-диференційовна функція така, що $\omega(\tau) = 0$ і $\dot{\omega}(\tau) > 0$. Покладемо, наприклад, $\omega(t) = \arctan(t-\tau)$. Тоді, очевидно, $\mathcal{I}_t \subset \mathcal{I}_t^\varepsilon$, причому, $\mathcal{I}_t^\varepsilon \to \mathcal{I}_t$ при $\varepsilon \to 0$, $t \geq \tau$.

Оскільки $V_\varepsilon(X_\tau,\tau) = V(X_\tau,\tau)$ і $\varphi(Y) > 0$, то для деякого $\delta > 0$ згідно з умовою (2.31) маємо співвідношення

$$\varphi\left(D_t V_\varepsilon(X,t)\right) = \varphi\left(D_t V(X,t)\right) + \frac{\varepsilon}{1+(t-\tau)^2}\,\varphi(Y) \geq 0, \quad \tau \leq t \leq \tau+\delta,$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta} \varphi\left(D_t V_\varepsilon(X(t),t)\right) dt = \varphi(V_\varepsilon(X(\tau+\delta),\tau+\delta)) \geq 0.$$

Це означає, що траєкторія $X(t)$ в момент часу τ не може залишати множину $\mathcal{I}_\tau^\varepsilon$, тобто $V_\varepsilon(X(t),t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $\tau \leq t \leq \tau+\delta$. Інакше для деякого $\varphi \in \mathcal{K}^*$

і як завгодно малого $\delta > 0$ повинна виконуватись протилежна нерівність $\varphi(V_\varepsilon(X(\tau+\delta), \tau+\delta)) < 0$.

В силу замкнутості конуса $\mathcal{K}$ при $\varepsilon \to 0$ маємо

$$V_\varepsilon(X(t), t) \to V(X(t), t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta.$$

Отже, $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи (2.29).

Зворотне твердження є наслідком теореми Лагранжа:

$$\varphi(V(X(\tau+\delta), \tau+\delta)) - \varphi(V(X(\tau), \tau)) = \delta\, \varphi(D_\xi V(X(\xi), \xi)),$$

де $\xi \in (\tau, \tau+\delta)$. Якщо $\varphi(V(X(\tau), \tau)) = 0$ і $X(\tau+\delta) \in \mathcal{I}_{\tau+\delta}$, то при достатньо малому $\delta > 0$ необхідно, щоб виконувалась нерівність $\varphi(D_\tau V(X(\tau), \tau)) \geq 0$.

Теорема доведена.

Зауваження 2.2. Умова (2.31) має місце, якщо для деякого $\alpha \geq 0$ виконується конусна нерівність

$$D_t V(X, t) + \alpha V(X, t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad X \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0. \tag{2.32}$$

Наведемо приклади застосування теореми 2.5 при побудові інваріантних множин і, зокрема, конусів типу (2.30) для деяких класів систем.

Приклад 2.2. Розглянемо квазілінійну систему

$$\dot{x} = A(x, t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0. \tag{2.33}$$

Множину (2.30) визначимо за допомогою конуса невід'ємних векторів $\mathcal{K} = R^n_+$ і вектор-функції $V(x, t) = R(t)x$, де $R(t)$ — невироджена неперервно-диференційовна матрична функція. Тоді умова (2.32) виконується, якщо для деякої функції $\alpha(x, t)$ всі елементи матриці

$$B_\alpha(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t) + R(t)[A(x, t) + \alpha(x, t)I]R^{-1}(t)$$

є невід'ємними функціями. Останнє обмеження зводиться до вигляду

$$b_{ij}(x, t) \geq 0, \quad i \neq j, \quad x \in \partial\mathcal{K}, \quad t \geq 0, \tag{2.34}$$

де $b_{ij}(x, t)$ — елементи матриці $B_\alpha(t)$ при $\alpha = 0$. В частинному випадку $R(t) \equiv I$ множина (2.30) є конусом $\mathcal{K}$, а нерівності (2.34) еквівалентні відомі умови позитивності лінійних систем відносно $\mathcal{K}$ [35].

Приклад 2.3. Розглянемо випадок, коли множину (2.30) описує функція

$$V(x,t) = x^T P(t)x + q^T(t)x + r(t),$$

де симетрична матриця $P(t)$, вектор-функція $q(t)$ і скалярна функція $r(t)$ є неперервними і диференційовними при $t \geq 0$. Нерівність (2.32), що забезпечує інваріантність цієї множини для системи (2.33), має вигляд

$$x^T P_\alpha(x,t)x + q_\alpha^T(x,t)x + r_\alpha(x,t) \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{2.35}$$

де

$$P_\alpha(x,t) = \dot{P}(t) + \alpha(x,t)P(t) + A^T(x,t)P(t) + P(t)A(x,t),$$

$$q_\alpha(x,t) = \dot{q}(t) + \alpha(x,t)q(t) + A^T(x,t)q(t),$$

$$r_\alpha(x,t) = \dot{r}(t) + \alpha(x,t)r(t).$$

Зокрема, можна вимагати, щоб виконувались співвідношення $P_\alpha(x,t) \geq 0$, $q_\alpha(x,t) \equiv 0$ і $r_\alpha(x,t) \geq 0$, із яких випливає інваріантність множини (2.30) в системі (2.33).

Приклад 2.4. Для нелінійної системи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in R^{n+1}, \quad t \geq 0, \tag{2.36}$$

побудуємо умови інваріантності змінного еліпсоїдального конуса $\mathcal{I}_t$, що описується у вигляді (2.30) при умовах

$$V(x,t) = \begin{bmatrix} x^T Q(t)x \\ h^T(t)x \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = R_+^2,$$

де $h(t)$ — власний вектор симетричної матриці $Q(t)$ з інерцією $i(Q(t)) \equiv \{1, n, 0\}$, що відповідає її єдиному додатному власному значенню.

Перевіримо умову (2.31), де

$$D_t V(x,t) = \begin{bmatrix} x^T \dot{Q}(t)x + f^T(x,t)Q(t)x + x^T Q(t)f(x,t) \\ \dot{h}^T x + h^T(t)f(x,t) \end{bmatrix}.$$

Для цього достатньо використати лише два функціонали із $\mathcal{K}^*$. Якщо $\varphi(y) = y_1$, то згідно з (2.31) отримаємо обмеження

$$x^T\dot{Q}(t)x + f^T(x,t)Q(t)x + x^TQ(t)f(x,t) \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{2.37}$$

де $\partial\mathcal{I}_t = \{x \in \mathcal{I}_t : x^TQ(t)x = 0\}$. Якщо взяти $\varphi(y) = y_2$, то приходимо до нерівності

$$h^T(t)f(0,t) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{2.38}$$

Тут враховується той факт, що із $x^TQ(t)x \geq 0$ і $h^T(t)x = 0$ випливає $x = 0$. Таку властивість мають симетричні матриці із вказаною інерцією.

Умови (2.37) і (2.38) забезпечують інваріантність множини $\mathcal{I}_t$ в системі (2.36). Умова (2.38) завжди виконується для систем з нульовим положенням рівноваги, тобто $f(0,t) \equiv 0$. Такою є, наприклад, диференціальна система (2.33). Згідно з (2.32) маємо матричну нерівність

$$\dot{Q}(t) + \alpha(t)Q(t) + A^T(x,t)Q(t) + Q(t)A(x,t) \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{2.39}$$

виконання якої із заданою неперервною функцією $\alpha(x,t)$ забезпечує інваріантність множини $\mathcal{I}_t$ для системи (2.33).

Нерівність (2.39) є узагальненням відомих умов інваріантності еліпсоїдального конуса для лінійних систем [23, 25].

Приклад 2.5. Розглянемо лінійну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ \dot{u} = C(t)x + D(t)u, \end{cases} \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad t \geq 0, \tag{2.40}$$

де $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і $D(t)$ — матричні функції відповідних розмірів $n\times n$, $n\times m$, $m \times n$ і $m \times m$ з елементами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} і d_{ij}. Знайдемо умови інваріантності множини

$$\mathcal{I}_t = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} : \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s u_s \right\}, \tag{2.41}$$

де $\alpha(x,t) > 0$ — диференційовна функція. Ця множина є нормальним тілесним конусом і може бути представлена у вигляді (2.30) з оператором

$$V: R^{n+m} \times [t_0, \infty) \to R^{nm+m}, \quad V(x,u,t) = \begin{bmatrix} u_1^2 e - x^2 \\ \vdots \\ u_m^2 e - x^2 \\ u \end{bmatrix},$$

де $e = \alpha^2[1, \dots, 1]^T$, $x^2 = [x_1^2, \dots, x_n^2]^T$. Роль конуса $\mathcal{K}$ в теоремі 2.5 виконує конус невід'ємних векторів R_+^{nm+m}.

Перепишемо умову (2.31) у вигляді

$$V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad u_s = 0 \implies c_s^T x + d_s^T u \geq 0, \tag{2.42}$$

$$V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \alpha^2 u_s^2 = x_k^2 \implies \alpha\dot{\alpha} u_s^2 + \alpha^2 u_s (c_s^T x + d_s^T u) - x_k (a_k^T x + b_k^T u) \geq 0, \tag{2.43}$$

де a_k^T, b_k^T, c_s^T і d_s^T — стрічки відповідних матриць, $k = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, m$. В умові (2.42) $x = 0$ і вона зводиться до вигляду $d_{sj} \geq 0$, $j \neq s$. В умові (2.43) $|x_i| \leq |x_k| = \alpha u_s \leq \alpha u_j$ $\forall i, j$. Якщо $x_k > 0$, то (2.43) є наслідком співвідношень

$$\alpha d_{sj} - b_{kj} \geq 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|.$$

Дійсно,

$$\alpha\dot{\alpha} u_s^2 + \alpha^2 u_s (c_s^T x + d_s^T u) - x_k (a_k^T x + b_k^T u) = \alpha u_s w_{sk},$$

$$w_{sk} = [\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks}]\, u_s + \sum_{i \neq k} (\alpha c_{si} - a_{ki}) x_i + \sum_{j \neq s} (\alpha d_{sj} - b_{kj}) u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks} - \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\right] u_s + \sum_{j \neq s} (\alpha d_{sj} - b_{kj}) u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) - \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\right] u_s \geq 0.$$

Якщо $x_k < 0$, то із (2.43) отримаємо обмеження на коефіцієнти

$$\alpha d_{sj} + b_{kj} \geq 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha} - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} + b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} + a_{ki}|,$$

використовуючи аналогічні оцінки

$$w_{sk} = [\dot{\alpha} - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \alpha d_{ss} + b_{ks}]\, u_s + \sum_{i \neq k} (\alpha c_{si} + a_{ki}) x_i + \sum_{j \neq s} (\alpha d_{sj} + b_{kj}) u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot{\alpha} - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \alpha d_{ss} + b_{ks} - \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} + a_{ki}|\right] u_s + \sum_{j \neq s} (\alpha d_{sj} + b_{kj}) u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot{\alpha} - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} + b_{kj}) - \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} + a_{ki}|\right] u_s \geq 0.$$

Отже, необхідні та достатні умови позитивності системи (2.40) відносно конуса (2.41) мають вигляд

$$\begin{gathered} \alpha d_{sj} \geq |b_{kj}|, \quad j \neq s, \\ \dot{\alpha} \pm \alpha(\alpha c_{sk} \mp a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} \mp b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} \mp a_{ki}|, \end{gathered} \tag{2.44}$$

де $k, i = \overline{1, n}$, $s, j = \overline{1, m}$. Для встановлення необхідності даних умов слід покласти

$$x_k = \pm \alpha\, u_s, \quad x_i = -\mathrm{sign}(\alpha c_{si} \mp a_{ki}) \alpha u_s, \quad i \neq k,$$

та розглянути наступні випадки: 1) всі компоненти вектора u співпадають, 2) одна із компонент u значно перевищує всі інші компоненти.

Кожній функції $\alpha(t) > 0$, що задовольняє систему нерівностей (2.44), відповідає інваріантний конус (2.41) системи (2.40).

Зазначимо, що систему нерівностей (2.44) можна використовувати при побудові керування у вигляді динамічного компенсатора, що забезпечує позитивну стабілізацію системи (2.40).

Запропоновану методику побудови інваріантних множин можна розвинути для випадку диференціальних систем вищих порядків.

Розглянемо диференціальну систему $(s+1)$-го порядку

$$X^{(s+1)} = F(X, X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}, t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0. \tag{2.45}$$

де $F : \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{X}$ — оператор, що задовольняє умови існування та єдиності розв'язку $X(t) = X^{(0)}(t)$ з початковими умовами $X^{(i)}(t_0) = X_0^{(i)} \in$

Ω_i, $i = 0, \ldots, s$. Повний стан системи характеризують функції $X^{(i)}(t)$, що задовольняють диференціальну систему першого порядку

$$\begin{cases} \dot{X}_0 & = X_1, \\ & \vdots \\ \dot{X}_{s-1} & = X_s, \\ \dot{X}_s & = F(X_0, \ldots, X_s, t). \end{cases} \tag{2.46}$$

Тому інваріантні множини системи (2.45) будемо визначати у розширеному фазовому просторі, тобто у просторі системи (2.46), у вигляді

$$\mathcal{I}_t = \left\{ (X_0, \ldots, X_s) \in \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X} : \; V(X_0, \ldots, X_s, t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0 \right\}, \tag{2.47}$$

де $V : \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$ — деякий оператор, $\overset{\mathcal{K}}{\geq}$ — нерівність, породжена заданим конусом або клином $\mathcal{K}$ у просторі $\mathcal{E}$. Множину $\mathcal{I}_t$ будемо називати інваріантною множиною системи (2.45), якщо її розв'язки $X(t)$ мають наступну властивість:

$$(X_0^{(0)}, \ldots, X_0^{(s)}) \in \mathcal{I}_{t_0} \implies (X^{(0)}(t), \ldots, X^{(s)}(t)) \in \mathcal{I}_t, \quad t > t_0 \geq 0.$$

Будемо припускати, що функція V неперервна разом зі своїми частинними похідними в області $\Omega_0 \times \cdots \times \Omega_s \times [0, \infty)$ і побудуємо оператор диференціювання $D_t V(X_0, \ldots, X_s, t)$ в силу системи (2.46).

Теорема 2.6. *Нехай $\mathcal{K}$ — тілесний конус. Тоді $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи (2.45) тоді і тільки тоді, коли при кожному $t \geq 0$ виконується умова*

$$(X_0, \ldots, X_s) \in \mathcal{I}_t, \; \varphi\left(V(X_0, \ldots, X_s, t)\right) = 0 \implies \varphi\left(D_t V(X_0, \ldots, X_s, t)\right) \geq 0, \tag{2.48}$$

де $\varphi \in \mathcal{K}^*$.

Доведення теорем 2.6 і 2.5 аналогічні. Оскільки системи (2.45) і (2.46) еквівалентні, то теорему 2.6 можна вважати наслідком теореми 2.5.

Приклад 2.6. Розглянемо диференціальну систему другого порядку

$$\ddot{x} + B(t)\dot{x} + A(t)x = 0, \tag{2.49}$$

де $A(t)$ і $B(t)$ — обмежені матриці. Побудуємо систему (2.46) і функцію V, що описує множину $\mathcal{I}_t$ типу (2.47), у вигляді

$$\dot{z} = M(t)z, \quad V(x,y,t) = z^T Q(t) z,$$

де

$$M(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A(t) & -B(t) \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} P(t) & L^T(t) \\ L(t) & R(t) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Вираховуючи вираз

$$D_t V(x,y,t) + \alpha V(x,y,t) = z^T(\dot{Q} + \alpha Q + M^T Q + QM)z = z^T H z,$$

маємо достатні умови інваріантності множини $\mathcal{I}_t$ для системи (2.45) у вигляді матричної нерівності

$$H = \begin{bmatrix} \dot{P} + \alpha P - A^T L - L^T A & \dot{L}^T + \alpha L^T - L^T B - A^T R + P \\ \dot{L} + \alpha L - B^T L - RA + P & \dot{R} + \alpha R - B^T R - RB + L + L^T \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.50}$$

Тут для спрощення опущена залежність від аргументів всіх параметрів.

Розглянемо випадок автономної системи і покладемо

$$Q = \begin{bmatrix} S + B^T R B & B^T R \\ RB & R \end{bmatrix}, \tag{2.51}$$

де S і R — симетричні матриці. Тоді нерівність (2.50) набуває вигляд

$$H = \begin{bmatrix} \alpha(S + B^T R B) - A^T R B - B^T R A & \alpha B^T R + S - A^T R \\ \alpha R B + S - R A & \alpha R \end{bmatrix} \geq 0.$$

Застосуємо відомий критерій невід'ємної визначеності блочної матриці з невиродженим діагональним блоком:

$$\begin{bmatrix} P & L^T \\ L & R \end{bmatrix} \geq 0 \iff R > 0, \quad P \geq L^T R^{-1} L.$$

Стосовно матриці H отримаємо наступний результат.

Наслідок 2.1. *Нехай $R = R^T < 0$ і для деякого $\alpha < 0$ виконується матрична нерівність*

$$\alpha^2 S - \alpha(B^T S + SB) - (S - A^T R)R^{-1}(S - RA) \leq 0. \tag{2.52}$$

Тоді автономна система (2.49) має інваріантну множину

$$\mathcal{I} = \{(x, y) \in R^n \times R^n : \ x^T(S + B^T RB)x + 2y^T RBx + y^T Ry \geq 0\}. \tag{2.53}$$

Зауваження 2.3. При умові $S < 0$ завжди існує таке $\alpha < 0$, що задовольняє нерівності (2.52). Але в цьому випадку $Q < 0$ і $\mathcal{I} = \{0\}$. Якщо $i(S) = \{1, n-1, 0\}$, то $i(Q) = \{1, 2\,n-1, 0\}$ і множина (2.53) є об'єднанням двох протилежних еліпсоїдальних конусів у розширеному фазовому просторі системи (2.49). Цікавим є також випадок, коли $S = A^T R + RA > 0$. Тоді вираз (2.52) дещо спрощується і при умовах наслідку 2.1 за теоремою Ляпунова необхідно, щоб матриці A і B були гурвіцевими.

Наслідок 2.2. *Якщо для деякої функції $\alpha(t)$ при $t \geq 0$ виконуються система нерівностей*

$$\begin{gathered} b_{sj}(t) \leq -\frac{1}{\alpha(t)} < 0, \quad j \neq s, \\ \dot{\alpha}(t) - \alpha(t) \sum_j b_{sj}(t) \geq |\alpha^2(t) a_{sk}(t) + 1| + \alpha^2(t) \sum_{i \neq k} |a_{si}(t)|, \end{gathered} \tag{2.54}$$

де $i, j, k, s = \overline{1, n}$, то система (2.49) має інваріантний конус

$$\mathcal{I}_t = \left\{(x, y) \in R^n \times R^n : \ \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s y_s \right\}. \tag{2.55}$$

Останнє твердження є наслідком критерію (2.44) позитивності системи (2.40) (див. приклад 2.5).

2.6. Інваріантні конуси різницевих систем

Побудуємо умови інваріантності деяких конусів для класу різницевих систем. Різницева система

$$z_{k+1} = f(z_k, k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.56}$$

має інваріантний конус $\mathcal{K}$, якщо із $z_0 \in \mathcal{K}$ випливає $z_k \in \mathcal{K}$ при $k > 0$. Це означає, що виконуються включення

$$\mathcal{K}_0 = f(\mathcal{K}, 0) \subset \mathcal{K}, \ \ \mathcal{K}_k = f(\mathcal{K}_{k-1}, k) \subset \mathcal{K}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Зокрема, необхідні та достатні умови інваріантності конуса $\mathcal{K}$ для лінійної системи

$$z_{k+1} = M_k z_k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{2.57}$$

зводяться до вигляду $W_k \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, де $W_k = M_k M_{k-1} \cdots M_0$, $k = 0, 1, \dots$.

Розглянемо стаціонарну різницеву систему

$$z_{k+1} = M z_k, \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots\ , \tag{2.58}$$

де $A = \|a_{ij}\|_1^n$, $B = \|b_{ij}\|_1^{n,m}$, $C = \|c_{ij}\|_1^{m,n}$, $D = \|d_{ij}\|_1^m$. Ця система має інваріантний конус $\mathcal{K}$ лише тоді, коли $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Введемо такі позначення:

$$A = [a_{*1}, \dots, a_{*n}] = \begin{bmatrix} a_{1*}^T \\ \vdots \\ a_{n*}^T \end{bmatrix}, \ \ B = [b_{*1}, \dots, b_{*m}] = \begin{bmatrix} b_{1*}^T \\ \vdots \\ b_{n*}^T \end{bmatrix},$$

$$C = [c_{*1}, \dots, c_{*n}] = \begin{bmatrix} c_{1*}^T \\ \vdots \\ c_{m*}^T \end{bmatrix}, \ \ D = [d_{*1}, \dots, d_{*m}] = \begin{bmatrix} d_{1*}^T \\ \vdots \\ d_{m*}^T \end{bmatrix}.$$

1. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\mu(\alpha, \infty)$. Включення $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ означає, що

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \Longrightarrow |a_{s*}^T x + b_{s*}^T u| \le \alpha(c_{k*}^T x + d_{k*}^T u), \ \ s = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}.$$

Останні нерівності подамо у вигляді

$$(\alpha c_{k*} \pm a_{s*})^T x + (\alpha d_{k*} \pm b_{s*})^T u \ge 0.$$

Отже,

$$M\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \iff \begin{bmatrix} \alpha c_{k*} \pm a_{s*} \\ \alpha d_{k*} \pm b_{s*} \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K}_\sigma(\beta, 1), \ \ s = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}.$$

Критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha,\infty)$ для системи (2.58) зводиться до системи нерівностей

$$d_{kj} \geq \beta|b_{sj}|, \quad \sum_{i=1}^{n} |\alpha c_{ki} \pm a_{si}| \leq \sum_{j=1}^{m} (d_{kj} \pm \beta b_{sj}), \quad k,j=\overline{1,m}, \;\; s=\overline{1,n}. \quad (2.59)$$

2. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\mu(\alpha,1)$. Знайдемо умови того, що

$$\|x\|_1 \leq \mu_\alpha(u) \Longrightarrow \|Ax+Bu\|_1 \leq \mu_\alpha(Cx+Du).$$

В наших позначеннях виконуються співвідношення

$$\|Ax+Bu\|_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{k*}^T x| + |b_{k*}^T u|\right) \leq \|A\|_\infty \|x\|_1 + \sum_{k,j=1}^{n,m} |b_{kj}| u_j \leq h^T u,$$

$$h^T = \left[\frac{\alpha}{m}\|A\|_\infty + \|b_{*1}\|_1, \ldots, \frac{\alpha}{m}\|A\|_\infty + \|b_{*m}\|_1\right],$$

$$\|A\|_\infty = \sum_{k=1}^{n} \|a_{k*}\|_\infty.$$

Враховуючи, що $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_\sigma(\beta,\infty)$, прагнемо задовольнити нерівності

$$\alpha c_{s*}^T x + (\alpha d_{s*} - h)^T u \geq 0, \quad \alpha\|c_{s*}\|_\infty \leq \sigma_\beta(\alpha d_{s*} - h), \quad s=\overline{1,m}.$$

Отже, умови інваріантності конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha,1)$ для системи (2.58) мають вигляд

$$\begin{gathered} \|A\|_\infty + \beta \sum_{j=1}^{m} \|b_{*j}\|_1 + \alpha\|c_{s*}\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{m} d_{sj}, \\ d_{sj} \geq \frac{1}{m}\|A\|_\infty + \beta\|b_{*j}\|_1, \quad s=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,m}. \end{gathered} \quad (2.60)$$

3. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\mu(\alpha,2)$. Цей конус описується в термінах невід'ємно визначених матриць:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_\alpha(u) I & x \\ x^T & \mu_\alpha(u) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Тому включення $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ означає, що

$$w^T L_k w = l_k^T z \geq 0, \quad \forall w \in R^{n+1}, \; z \in \mathcal{K}, \; k=\overline{1,m},$$

де

$$L_k = \begin{bmatrix} \alpha(c_k^T x + d_k^T u)I & Ax + Bu \\ x^T A^T + u^T B^T & \alpha(c_k^T x + d_k^T u) \end{bmatrix} \geq 0, \quad l_k = \begin{bmatrix} w^T P_{k1} w \\ \vdots \\ w^T P_{kn} w \\ \\ w^T Q_{k1} w \\ \vdots \\ w^T Q_{km} w \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^*,$$

$$P_{ki} = \begin{bmatrix} \alpha c_{ki} I & a_{*i} \\ a_{*i}^T & \alpha c_{ki} \end{bmatrix}, \ Q_{kj} = \begin{bmatrix} \alpha d_{kj} I & b_{*j} \\ b_{*j}^T & \alpha d_{kj} \end{bmatrix}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}.$$

Належність вектора l спряженому конусу $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_\sigma(\beta, 2)$ описується у вигляді

$$l = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^* \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_\beta(v) I & y \\ y^T & \sigma_\beta(v) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Тому достатньою умовою інваріантності конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha, 2)$ для системи (2.58) є система матричних співвідношень [47]

$$S_k = \begin{bmatrix} Q_k & \cdots & 0 & P_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_k & P_{kn} \\ P_{k1} & \cdots & P_{kn} & Q_k \end{bmatrix} \geq 0, \quad Q_k = \beta \sum_{j=1}^{m} Q_{kj}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.61}$$

Якщо матриці Q_k невироджені, то ця умова зводиться до вигляду

$$Q_k > 0, \quad Q_k \geq \sum_{i=1}^{n} P_{ki} Q_k^{-1} P_{ki}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Необхідні та достатні умови інваріантності конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha, 2)$ для системи (2.58) можуть бути представлені у вигляді (див. доведення леми 4)

$$l_j \in \mathcal{K}_\mu(\alpha, 2), \quad M_k \Delta M_k^T \geq \alpha_k \Delta, \tag{2.62}$$

де

$$l_j = \begin{bmatrix} b_{*j} \\ d_{*j} \end{bmatrix}, \ M_k = \begin{bmatrix} A & \beta \sum\limits_j b_{*j} \\ \alpha c_{k*}^T & \sum\limits_j d_{kj} \end{bmatrix}, \ \alpha_k \geq 0, \ j, k = 1, \ldots, m.$$

4. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\mu(\alpha, p),\ p > 1$. Аналогічно, як і у випадку $p = 1$, маємо співвідношення

$$\|Ax + Bu\|_p \le \|A\|_p \|x\|_p + \sum_{j=1}^{m} |b_{*j}| u_j \le h^T u,$$
$$h^T = \left[\frac{\alpha}{m}\|A\|_p + \|b_{*1}\|_p, \ldots, \frac{\alpha}{m}\|A\|_p + \|b_{*m}\|_p\right],$$
$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p.$$

Враховуючи, що $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$, прагнемо задовольнити нерівності

$$\alpha c_{s*}^T x + (\alpha d_{s*} - h)^T u \ge 0, \quad \alpha \|c_{s*}\|_q \le \sigma_\beta(\alpha d_{s*} - h), \quad s = \overline{1, m}.$$

Отже, умови інваріантності конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$ для системи (2.58) мають вигляд

$$\begin{gathered} \|A\|_p + \beta \sum_{j=1}^{m} \|b_{*j}\|_p + \alpha \|c_{s*}\|_q \le \sum_{j=1}^{m} d_{sj}, \\ d_{sj} \ge \frac{1}{m}\|A\|_p + \beta \|b_{*j}\|_p, \quad s = \overline{1, m},\ j = \overline{1, m}. \end{gathered} \tag{2.63}$$

де $p > 1$, $q > 1$, $\alpha\beta = 1$, $1/p + 1/q = 1$, $\|A\|_p$ — узгоджена матрична норма з векторною нормою $\|x\|_p$. Зокрема,

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|,\ \ \|A\|_2 = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2},\ \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Отримані умови інваріантності конусів (2.59) – (2.63) для системи (2.58) можна узагальнити, розглянувши конуси типу

$$\mathcal{K} = \{z \in R^N :\ z^T = [x_1^T, \ldots, x_n^T, u^T],\ \max_i \|x_i\|_p \le \mu_\alpha(u)\},$$
$$\mathcal{K}^* = \{w \in R^N :\ w^T = [y_1^T, \ldots, y_n^T, v^T],\ \sum_i \|x_i\|_q \le \sigma_\beta(v)\},$$

де $x_i, y_i \in R^{n_i}$, $u, v \in R^m$, $N = n_1 + \cdots + n_n + m$. При цьому, як і раніше, рівності $p^{-1} + q^{-1} = 1$ і $\alpha\beta = 1$ є умовами спряження конусів $\mathcal{K}$ і $\mathcal{K}^*$, а матриця багатозв'язної системи (2.58) має таку блочну структуру:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} & B_n \\ C_1 & \cdots & C_n & D \end{bmatrix},$$

де $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$, $B_i \in R^{n_i \times m}$, $C_j \in R^{m \times n_j}$, $D \in R^{m \times m}$.

2.7. Позитивність диференціальних систем із запізненням

Розглянемо клас диференціальних систем

$$\dot{x}(t) + Lx(t) = G(x(t-\tau)), \quad G(0) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \tag{2.64}$$

де L і G — відповідно лінійний та нелінійний оператори в просторі R^n, $\tau > 0$ — стале запізнення. Вважаємо, що виконується умова існування єдиного розв'язку $x(t) \in R^n$ при початкових умовах

$$x(\theta) = \eta(\theta), \quad t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0. \tag{2.65}$$

Якщо $\eta(\theta) \equiv 0$, то $x \equiv 0$ — тривіальний розв'язок системи (2.64).

Означення 2.3. Система (2.64) називається позитивною відносно конуса $\mathcal{K} \subset R^{n\times m}$, якщо для довільного $t_0 \geq 0$ із $\eta(\theta) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при всіх $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$ виконується $x(t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $t > t_0$.

Разом з системою (2.64) розглянемо лінійну систему без запізнення

$$\dot{x}(t) + Lx(t) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0. \tag{2.66}$$

Теорема 2.7. *Диференціальна система (2.64) позитивна відносно конуса $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли для довільних $t_0 \geq 0$ і $t \geq t_0$ виконуються включення*

$$e^{-L(t-t_0)}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad G(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}, \tag{2.67}$$

де $e^{-L(t-t_0)}$ — експоненціальний оператор системи (2.66).

Доведення. Означимо послідовність $t_k = t_0 + k\tau$, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді розв'язок системи (2.64) при умовах (2.65) на кожному інтервалі $[t_k, t_{k+1}]$ задовольняє інтегральним співвідношенням

$$x(t) = e^{-L(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{-L(t-\theta)}G(x(\theta-\tau))d\theta, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}. \tag{2.68}$$

Справедливість даних співвідношень можна безпосередньо встановити шляхом диферeнціювання, використовуючи визначення експоненціального оператора як розв'язоку задачі Коші

$$\frac{d}{dt}e^{-L(t-\theta)} = -Le^{-L(t-\theta)}, \quad t \geq \theta. \tag{2.69}$$

Отже, якщо в (2.65) $\eta(\theta) \in \mathcal{K}$, то $x(t) \in \mathcal{K}$ при $t_k \le t \le t_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Покажемо, що включення (2.67) необхідне для позитивності системи (2.64). Якщо

$$x(\theta) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \le \theta \le t_k - \varepsilon \\ \eta(\theta), & t_k - \varepsilon < \theta \le t_k \end{cases},$$

де $\varepsilon > 0$, $\eta(\theta) \in \mathcal{K}$, то згідно з (2.68)

$$x(t) = e^{-L(t-t_k)} x(t_k) \in \mathcal{K}, \quad t_k \le t \le t_{k+1} - \varepsilon.$$

В силу замкнутості конуса $\mathcal{K}$ при $\varepsilon \to 0$ маємо перше включення (2.67) на інтервалі $t_k \le t \le t_{k+1}$. Його виконання при довільному $t \ge t_0$ є наслідком мультиплікативного представлення

$$e^{-L(t-t_0)} = e^{-L(t-t_k)} e^{-L(t_k - t_{k-1})} \cdots e^{-L(t_1 - t_0)},$$

де k — деяке натуральне число.

Якщо $x(t_0) = 0$, то для деякого $\xi \in (t_0, t)$ маємо

$$x(t) = (t - t_0) e^{-L(t-\xi)} G(x(\xi - \tau)), \quad t > t_0.$$

Звідси, якщо $x(\xi - \tau) \in \mathcal{K}$, то виконується включення $e^{-L(t-\xi)} G(x(\xi - \tau)) \in \mathcal{K}$. При цьому, якщо $t \to t_0$, то $\xi \to t_0$ і $e^{-L(t-\xi)} \to E$, де E — тотожний оператор. В силу замкнутості конуса і неперервної залежності експоненціального оператора і оператора G від своїх аргументів, маємо $G(x) \in \mathcal{K}$, якщо $x = x(t_0 - \tau) \in \mathcal{K}$. Отже, друге включення (2.67) також є необхідним для позитивності системи (2.64).

Теорема доведена.

Теорема 2.7 узагальнює критерій позитивності диференціальних систем типу (2.64) відносно конуса R^n_+ [49].

Приклад 2.7. Нелінійна матрична система

$$\dot{X}(t) + M^T X(t) + X(t) M = B X(t - \tau) B^T + X(t - \tau) C X(t - \tau)$$

позитивна відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць $\mathcal{K}$, якщо $C \overset{\mathcal{K}}{\ge} 0$. В даному випадку систему (2.64) описує оператор Ляпунова

$LX = MX + XM^T$, а оператори

$$e^{-L(t-t_0)}X = e^{-M(t-t_0)}Xe^{-M^T(t-t_0)}, \quad G(X) = BXB^T + XCX$$

є позитивними відносно конуса $\mathcal{K}$.

2.8. Висновки до розділу

Основні результати даного розділу опубліковано у статтях [25, 26, 28] і полягають у наступному:

- встановлено умови позитивності лінійних диференціальних та різницевих систем відносно конусів типу кругових, еліпсоїдальних та їх узагальнень;
- розроблено методику побудови та дослідження інваріантних множин диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей;
- доведено необхідні і достатні умови позитивності нелінійних диференціальних систем із запізненням.

РОЗДІЛ 3
СТІЙКІСТЬ ТА СТАБІЛІЗАЦІЯ ПОЗИТИВНИХ СИСТЕМ

У даному розділі досліджуються задачі стійкості та стабілізації позитивних динамічних систем.

Пропонуються нові алгебраїчні методи дослідження стійкості лінійних позитивних систем. Для аналізу стійкості таких систем використовуються розроблені у розділі 2 спеціальні методи, що базуються на спектральних властивостях позитивних та позитивно оборотних операторів. Пропонуються умови стійкості лінійних диференціальних і різницевих систем з інваріантним еліпсоїдальним конусом у вигляді матричних нерівностей. З огляду на поняття максимальних власних пар матричного полінома формулюються алгебраїчні умови експоненціальної стійкості лінійних диференціальних систем довільного порядку. Методом функціоналу Ляпунова-Красовського встановлюються достатні умови абсолютної стійкості позитивних диференціальних систем із запізненням.

Знайдені умови стійкості позитивних систем дозволили, зокрема, розв'язувати задачу позитивної стабілізації систем відносно даних конусів. Дана задача передбачає побудову керування у вигляді зворотного зв'язку або динамічного компенсатора, що забезпечує одночасно властивості позитивності та стійкості відповідної замкнутої системи відносно заданого конуса.

Як наслідок викладеного методу побудови інваріантних множин (підрозділ 2.5), наводиться узагальнена методика порівняння диференціальних систем. Ця методика дозволяє порівнювати динамічні властивості двох і більше двох динамічних систем, що функціонують у різних просторах.

3.1. Алгебраїчні умови стійкості лінійних позитивних систем

Нехай $X(t)$ — стан деякої динамічної системи, що функціонує у просторі $\mathcal{E}$ з конусом $\mathcal{K}$.

Означення 3.1. Ізольований стан рівноваги $X \equiv 0$ динамічної системи називаємо:

а) стійким в $\mathcal{K}$, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що із $X_0 \in \mathcal{S}_\delta(t_0)$ випливає $X(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t > t_0$, де $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K} : \|X\| \leq \varepsilon\}$;

б) асимптотично стійкий в $\mathcal{K}$, якщо він є стійким в $\mathcal{K}$ та при цьому для певного $\delta_0 > 0$ із $X_0 \in \mathcal{S}_{\delta_0}(t_0)$ випливає $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$;

Якщо стан $X \equiv 0$ системи з інваріантним конусом $\mathcal{K}$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, то він стійкий (асимптотично стійкий) в $\mathcal{K}$.

Розглянемо лінійну диференціальну систему у банаховому просторі

$$\dot{z} = Mz, \quad z \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

де $M : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — обмежений оператор, та лінійну різницеву систему

$$z_{k+1} = Mz_k, \quad z_k \in \mathcal{E}, \quad k = 0, 1, \dots , \tag{3.2}$$

які мають інваріантний конус $\mathcal{K}$.

Умови стійкості систем (3.1) і (3.2), позитивних відносно нормальних відтворюючих конусів, описуються в термінах позитивних розв'язків алгебраїчних рівнянь [20, 46]. Зокрема, критерієм асимптотичної стійкості позитивної системи (3.2) є включення $\mathcal{K} \subset (E - M)\mathcal{K}$, де E — тотожній оператор. Для системи (3.1) мають місце наступні твердження [46, 47].

Теорема 3.1. *Позитивна система (3.1) експоненціально стійка тоді і тільки тоді, коли оператор $-M$ позитивно оборотний: $\mathcal{K} \subset -M\mathcal{K}$. Якщо $\mathcal{K} \subset (\gamma E - M)\mathcal{K}\ \forall \gamma \geq 0$, то система (3.1) експоненціально стійка і позитивна відносно $\mathcal{K}$.*

Теорема 3.2. *Якщо система (3.1) позитивна відносно нормального тілесного конуса $\mathcal{K}$, то наступні твердження еквівалентні:*

1) система (3.1) експоненціально стійка;

2) $\forall\, Y \in \operatorname{int}\mathcal{K},\ \exists\, X \in \operatorname{int}\mathcal{K}:\ \mathrm{MX} = -\mathrm{Y}$*;*

3) $\exists\, X, Y \in \operatorname{int}\mathcal{K}:\ \mathrm{MX} = -\mathrm{Y}$.

Якщо оператор M представлено у регулярному вигляді (2.5), то кожне із тверджень 1)–3) еквівалентне спектральній умові

4) $\rho(T) < 1$, де $\rho(T)$ — спектральний радіус пучка операторів $T(\lambda) = \lambda L - P$.

Аналогічні твердження можна сформулювати для системи (3.2).

Теорема 3.3. *Якщо система (3.2) позитивна відносно нормального тілесного конуса $\mathcal{K}$, то наступні твердження еквівалентні:*

1) система (3.2) асимптотично стійка;

2) $\forall\, Y \in \operatorname{int}\mathcal{K},\ \exists\, X \in \operatorname{int}\mathcal{K}:\ \mathrm{X} - \mathrm{MX} = \mathrm{Y}$*;*

3) $\exists\, X, Y \in \operatorname{int}\mathcal{K}:\ \mathrm{X} - \mathrm{MX} = \mathrm{Y}$.

Можна сформулювати ряд важливих наслідків теореми 3.1 і леми 2.1. Зокрема, система (2.8) є експоненціально стійкою відносно конуса невід'ємно визначених матриць тоді і тільки тоді, коли оператор $-M$, означений в (2.5), позитивно оборотний. Також можна стверджувати, що експоненціальна стійкість системи (3.1) еквівалентна експоненціальній стійкості в середньому квадратичному нульового розв'язку стохастичної системи Іто (2.9) [40, 42].

Встановимо достатні умови експоненціальної стійкості системи (3.1) у вигляді позитивної оборотності двох операторів.

Теорема 3.4. *Якщо для деякого γ_0 виконуються умови*

$$\mathcal{K} \subset -M\mathcal{K} \cap (\gamma_0 E - M)\mathcal{K}, \quad \gamma_0 > \frac{\rho^2(M) - r^2(M)}{2r(M)}, \tag{3.3}$$

де $\rho(M)$ — спектральний радіус оператора M, $r(M) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M)\}$, то система (3.1) експоненціально стійка.

Доведення. Із (3.3) випливає, що оператори $-M^{-1}$ і $(\gamma_0 E - M)^{-1}$ мають інваріантний конус $\mathcal{K}$. Їх спектри складається із відповідних чисел $-1/\lambda$ і

$1/(\gamma_0 - \lambda)$ при $\lambda \in \sigma(M)$. За теоремою про спектральний радіус позитивного оператора маємо нерівності

$$|\lambda| \geq -\alpha, \quad |\gamma_0 - \lambda| \geq \gamma_0 - \beta, \quad \lambda \in \sigma(M),$$

де $\alpha, \beta \in \sigma(M)$ — деякі дійсні точки спектра. Якщо $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$, то $-M \overset{\mathcal{K}}{\leq} \gamma E - M \overset{\mathcal{K}}{\leq} \gamma_0 E - M$ і кожний оператор $\gamma E - M$ повинен бути позитивно оборотним (теорема про двосторонню оцінку позитивно оборотного оператора [35]). Отже, в нашому випадку α і β співпадають і рівні числу $-r(M)$.

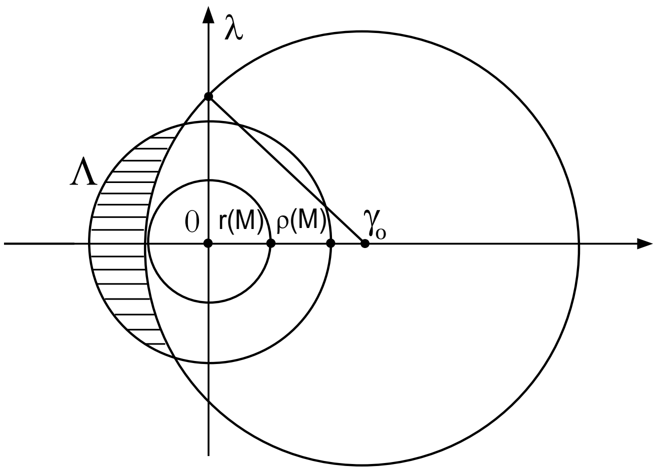


Рис. 3.1. Λ — область розміщення спектра $\sigma(M)$.

Якщо виконується оцінка для γ_0 в (3.3), то спектр оператора M належить деякій області Λ, що знаходиться зліва від уявної осі (рис. 3.1). Це є критерієм експоненціальної стійкості системи (3.1).

Теорема доведена.

3.2. Застосування еліпсоїдальних конусів в задачах стійкості

Розглянемо системи (3.1) і (3.2) та еліпсоїдальний конус $\mathcal{K}(Q)$, заданий в (2.13).

Теорема 3.5. *Нехай існують симетрична матриця Q з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$ і константи $\alpha \in R^1$ і $\beta > 0$, для яких виконуються нерівності*

$$M^T Q + QM \geq \alpha Q, \;\; M^T QM \leq \beta Q, \;\; h^T M^{-1} h \leq 0, \;\; h^T (M^T QM)^{-1} h \geq 0, \quad (3.4)$$

де h — власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Тоді диференціальна система (3.1) експоненціально стійка і позитивна відносно конуса $\mathcal{K}(Q)$.

Даний результат є наслідком теорем 2.1, 2.2 і 3.1. Аналогічне твердження має місце для системи (3.2).

Теорема 3.6. *Нехай існують симетрична матриця Q з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$ і константи $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, для яких разом з (2.15) виконуються нерівності*

$$M_1^T Q M_1 \leq \beta Q, \quad h^T M_1^{-1} h \geq 0, \quad h^T \left(M_1^T Q M_1\right)^{-1} h \geq 0, \tag{3.5}$$

де $M_1 = I - M$. Тоді різницева система (3.2) асимптотично стійка і позитивна відносно конуса $\mathcal{K}(Q)$.

Приклад 3.1. Розглянемо диференціальне рівняння третього порядку

$$\frac{d^3\omega}{dt^3} + (4-a)\frac{d^2\omega}{dt^2} + (5-a)\frac{d\omega}{dt} - 5a\omega = 0,$$

де a — дійсний параметр. Дане рівняння представляється у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{z} = Mz, \quad z = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\omega} \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5a & 4a-5 & a-4 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

Оскільки $\sigma(M) = \{-2 \pm i,\, a\}$, то система має інваріантний еліпсоїдальний конус $\mathcal{K}(Q)$ лише тоді, коли $\alpha(M) = a \in \sigma(M)$.

Разом з матричною нерівністю (2.18) розглянемо матричне рівняння

$$M^T Q + QM - \alpha Q = I. \tag{3.7}$$

Згідно з теоремою інерції його розв'язок повинен задовольняти умови

$$i_\alpha^+(M) = i_+(Q), \quad i_\alpha^-(M) = i_-(Q), \quad i_0(Q) = 0,$$

де $i_\alpha^+(M)$ $(i_\alpha^-(M))$ — кількість власних значень матриці M, розташованих справа (зліва) від прямої $2\mathrm{Re}\,\lambda = \alpha$. Будемо вважати, що $\alpha = a - 2$, тоді $i(Q) = \{1, 2, 0\}$.

Якщо $a = -1$, то $\alpha = -3$ і з рівняння (3.7) отримуємо

$$Q = \begin{bmatrix} 27 & 17 & 8 \\ 17 & -3.8 & 1.2 \\ 8 & 1.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0.89719 \\ 0.38737 \\ 0.21211 \end{bmatrix}, \quad i(Q) = \{1, 2, 0\}.$$

Розв'язуючи систему нерівностей (3.4) відносно a, α і β при знайдених Q і h, отримуємо $a = -0.81697$, $\alpha = -2.9682$, $\beta = 1.07585$. Отже, виконуються умови теореми 3.5, при яких система (3.6) експоненціально стійка і має інваріантний конус $\mathcal{K}(Q)$.

3.3. Умови стійкості позитивних диференціальних систем вищих порядків

Розглянемо диференціальну систему s-го порядку

$$A_0 x(t) + A_1 x^{(1)}(t) + \ldots + A_s x^{(s)}(t) = 0, \quad x^{(i)}(0) = x_0^{(i)},\ i = \overline{0, s-1}, \tag{3.8}$$

де $x(t) \in R^n$ — вектор фазових координат, $t \geq 0$, $A_i \in R^{n\times n}$ — коефіцієнти регулярного матричного полінома $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s$. Повний стан системи (3.8) характеризує вектор-функція $y(t)$, що є розв'язком диференціальної системи першого порядку

$$Ay(t) = B\dot{y}(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \tag{3.9}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_{s-1} & A_s \\ I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Тому інваріантні множини і властивості позитивності даної системи відносно конусів будемо визначати у фазовому просторі R^{ns}:

$$y(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ x^{(1)}(0) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(0) \end{bmatrix} \in \hat{\mathcal{K}} \implies y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(t) \end{bmatrix} \in \hat{\mathcal{K}}, \quad \hat{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 \\ \mathcal{K}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{K}_{s-1} \end{bmatrix}, \ t \geq 0.$$

При цьому значення $x(t)$ будуть належати множині $\mathcal{K}_0$.

Нехай (U, T) — довільна (права) власна пара матричного полінома $F(\lambda)$, що визначається з умов [21]

$$A_0 T + A_1 TU + \cdots + A_s TU^s = 0, \quad \operatorname{rang} E = m, \quad E = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

де $T \in C^{n\times m}$, $U \in C^{m\times m}$. Тоді спектр матриці U є підмножиною спектра $\sigma(F)$ матричного полінома $F(\lambda)$. Відомо також, що (U, T) є власною парою $F(\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли (U, E) — власна пара лінійного пучка $L(\lambda) = A - \lambda B$, тобто

$$AE = BEU, \quad \operatorname{rang} E = m. \tag{3.11}$$

Зазначимо, що спектри $\sigma(L)$ і $\sigma(F)$ співпадають.

Власну пару (U, T) матричного полінома $F(\lambda)$ будемо називати максимальною, якщо у співвідношеннях (3.10) число m набуває максимально можливого значення. Якщо (U, T) — максимальна власна пара матричного полінома $F(\lambda)$, то m співпадає з кількістю власних значень $F(\lambda)$, враховуючи кратності.

Лема 3.1. *Власна пара (U, T) матричного полінома $F(\lambda)$ є максимальною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\operatorname{rang}\, [F(\lambda), \Phi(\lambda)] \equiv n, \quad \Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} A_j TU^{j-i}, \quad \lambda \in \sigma(F). \tag{3.12}$$

Доведення. Нехай (U, T) — максимальна власна пара матричного полінома $F(\lambda)$. Тоді (U, E) є максимальною власною парою пучка $L(\lambda)$. Використаємо канонічну форму Кронекера регулярного пучка [39] і структуру матриці E в (3.11):

$$P(A - \lambda B)Q = \begin{bmatrix} J - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{bmatrix}, \quad E = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad JR = RU, \tag{3.13}$$

де $J \in C^{m \times m}$, $\sigma(J) = \sigma(L)$, P і Q — невироджені матриці, N — нільпотентна матриця, всі елементи якої нульові за виключенням можливо одиниць, розміщених на головній наддіагоналі. У нашому випадку R є квадратною невиродженою матрицею і неважко встановити тотожність

$$\operatorname{rang}\,[A - \lambda B, BE] \equiv ns, \quad \lambda \in C^1,$$

яка за допомогою еквівалентних блочних перетворень зводиться до вигляду (3.12).

Умови (3.12) можна переписати у вигляді

$$v^T F(\lambda) = 0, \quad v \neq 0 \implies v^T \Phi(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(F),$$

а матричне рівняння в (3.10) еквівалентне тотожності

$$F(\lambda)T \equiv \Phi(\lambda)(\lambda I - U), \quad \lambda \in C^1.$$

Нехай v^T — лівий власний вектор матричного полінома $F(\lambda)$, що відповідає власному значенню $\lambda \in \sigma(F)$. Тоді із останньої тотожності при умовах (3.12) випливає, що $u^T = v^T \Phi(\lambda)$ є лівим власним вектором матриці U, що відповідає її власному значенню $\lambda \in \sigma(U)$. Це означає, що (U, T) — максимальна власна пара матричного полінома $F(\lambda)$.

Лема доведена.

Наступне твердження може бути корисним для чисельного знаходження власних пар матричного полінома.

Лема 3.2. *Якщо $n \times m$-матриці $R_0, \ldots, R_s$ задовольняють умови*

$$A_0 R_0 + A_1 R_1 + \cdots + A_s R_s = 0, \tag{3.14}$$

$$\operatorname{rang} S_0 = \operatorname{rang}[S_0, S_1] = m \le sn, \quad S_0 = \begin{bmatrix} R_0 \\ \vdots \\ R_{s-1} \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_s \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

то матриці

$$U = (S_0^T S_0)^{-1} S_0^T S_1, \quad T = R_0, \tag{3.16}$$

складають власну пару матричного полінома $F(\lambda)$, тобто задовольняють співвідношення (3.10).

Доведення. При умовах (3.15) існує єдиний розв'язок рівняння $S_0 U = S_1$, що визначений в (3.16). При цьому S_0 співпадає з E, а матричне рівняння (3.14) зводиться до вигляду (3.10).

Лема доведена.

Лема 3.3. *Нехай (U, T) — власна пара матричного полінома $F(\lambda)$. Тоді $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K}$ є інваріантною множиною системи (3.8) тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{K}$ — інваріантна множина системи*

$$\dot{z} = Uz, \quad z(0) = z_0, \quad t \ge 0. \tag{3.17}$$

Зокрема, система (3.8) позитивна відносно конуса $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K}$ лише тоді, коли система (3.17) позитивна відносно конуса $\mathcal{K}$.

Доведення. Будуємо розв'язок системи (3.9) у вигляді $y(t) = Ez(t)$. Враховуючи (3.11) і (3.13), маємо співвідношення

$$BE(\dot{z} - Uz) = 0, \quad BE = P^{-1} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\operatorname{rang}(BE) = \operatorname{rang} E = m$, то $y(t)$ є розв'язком системи (3.9) тоді і тільки тоді, коли $z(t)$ задовольняє (3.17). Тому система (3.9) (а разом з нею і (3.8)) має інваріантний конус типу $E\mathcal{K}$ лише тоді, коли $\mathcal{K}$ є інваріантним конусом системи (3.17).

Лема доведена.

Наступне твердження є наслідком теореми 3.1 і того факту, що максимальна власна пара матричного полінома повністю визначає його спектр, тобто $\sigma(U) = \sigma(F)$.

Теорема 3.7. *Нехай (U,T) — максимальна власна пара матричного полінома $F(\lambda)$ така, що система (3.17) позитивна відносно нормального тілесного конуса $\mathcal{K}$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1) система (3.8) експоненціально стійка;

2) $\operatorname{Re}\lambda < 0 \ \forall \lambda \in \sigma(U)$*;*

3) $\mathcal{K} \subset -U\mathcal{K}$*;*

4) $\exists\, z_0 \in \operatorname{int}\mathcal{K} \ : \ \mathrm{Uz_0} \in -\operatorname{int}\mathcal{K}$*.*

Сформулюємо достатні умови позитивності і експоненціальної стійкості системи (3.8). Припустимо, що виконується включення

$$B\hat{\mathcal{K}} \subset (\gamma B - A)\,\hat{\mathcal{K}} \quad \forall \gamma \geq 0, \tag{3.18}$$

де $\hat{\mathcal{K}} \subset R^{ns}$ — деяка множина. Тоді згідно з (3.13) маємо такі включення:

$$\hat{\mathcal{K}}_1 \subset (\gamma I - J)\,\hat{\mathcal{K}}_1, \quad -(N + \gamma N^2 + \cdots + \gamma^{\nu-2}N^{\nu-1})\,\hat{\mathcal{K}}_2 \subset \hat{\mathcal{K}}_2,$$

де $\hat{\mathcal{K}} = Q_1\hat{\mathcal{K}}_1 + Q_2\hat{\mathcal{K}}_2$, $Q = [Q_1, Q_2]$, ν — індекс нільпотентності матриці N. Множина $\hat{\mathcal{K}}$ буде інваріантною для системи (3.9) лише тоді, коли $\hat{\mathcal{K}}_2 = \{0\}$. Якщо $\hat{\mathcal{K}}_1$ — нормальний відтворюючий конус, то за теоремою 3.1 перше включення забезпечує позитивність відносно $\hat{\mathcal{K}}_1$ і експоненціальну стійкість системі $\dot{z} = Jz$. В цьому випадку система (3.9) експоненціально стійка і має інваріантну множину $\hat{\mathcal{K}} = Q_1\hat{\mathcal{K}}_1$, що є конусом розмірності $\dim\hat{\mathcal{K}} = m$ лише тоді, коли $\hat{\mathcal{K}}_1$ — відтворюючий конус. Аналогічну структуру має множина $\hat{\mathcal{K}} = M_\alpha^\nu\mathcal{K} = Q_1(\alpha I - J)^{-\nu}\mathcal{K}_1$, де $M_\alpha = (\alpha B - A)^{-1}B$, $\mathcal{K} = Q_1\mathcal{K}_1 + Q_2\mathcal{K}_2$, $\alpha \notin \sigma(F)$. Зокрема, можна покласти $\alpha = 0$.

На основі теореми 3.4 і наведених міркувань маємо наступні твердження.

Теорема 3.8. *Якщо для деякого γ_0 виконуються умови*

$$B\hat{\mathcal{K}} \subset -A\hat{\mathcal{K}} \cap (\gamma_0 B - A)\hat{\mathcal{K}}, \quad \gamma_0 > \frac{\rho^2(F) - r^2(F)}{2r(F)}, \tag{3.19}$$

де $\rho(F) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(F)\}$, $r(F) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(F)\}$, $\hat{\mathcal{K}} = M_\alpha^\nu\mathcal{K}$ — нормальний конус розмірності m, то система (3.8) експоненціально стійка.

Теорема 3.9. *Якщо для деякої максимальної власної пари (U,T) матричного полінома $F(\lambda)$ виконується включення*

$$\mathcal{K} \subset (\gamma I - U)\,\mathcal{K} \quad \forall \gamma \geq 0, \tag{3.20}$$

де $\mathcal{K}$ — нормальний відтворюючий конус, то система (3.8) експоненціально стійка і має інваріантний конус $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K}$.

Зауважимо, що включення (3.20) випливає із (3.18), якщо покласти $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K} = Q_1 R\mathcal{K}$ і врахувати рівність $JR = RU$.

Приклад 3.2. Розглянемо диференціальну систему другого порядку

$$A_0 x + A_1 \dot{x} + A_2 \ddot{x} = 0, \tag{3.21}$$

де

$$A_0 = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Їй відповідає матричний квадратичний пучок

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 8 & \lambda + 1 \\ -4\lambda - 9 & \lambda + 1 \end{bmatrix},$$

спектр якого $\sigma(F) = \{-4 \pm i,\, -1\}$. Використовуючи в системі MATHCAD конструкцію "Given ... Find", знайдено максимальну власну пару цього пучка

$$U = \begin{bmatrix} -1.525 & 0.53 & 0 \\ 0.688 & -3.686 & 1.595 \\ 3.448 & 0 & -3.79 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -0.13 & 0.26 & -0.103 \\ 3.299 & 1.309 & -0.073 \end{bmatrix}.$$

Позадіагональні елементи матриці U невід'ємні, а її обернена

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} -0.822 & -0.118 & -0.05 \\ -0.476 & -0.34 & -0.143 \\ -0.748 & -0.108 & -0.309 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{K}}{\leq} 0,$$

де $\mathcal{K} = R^3_+$ — конус невід'ємних векторів.

Отже, виконуються умови теореми 3.7 і система (3.21) експоненціально стійка. Більше того, згідно з лемою 3.2 вона має інваріантний конус

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 \\ \mathcal{K}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_0 = T\mathcal{K}, \quad \mathcal{K}_1 = TU\mathcal{K}. \tag{3.22}$$

На основі теореми 3.5 знайдено максимальну власну пару (U, T) квадратичного пучка $F(\lambda)$ і параметри еліпсоїдального конуса $\mathcal{K}(Q) \subset R^3$, що задовольняють теорему 3.7. Систему нерівностей

$$U^TQ + QU \geq \alpha Q, \quad U^TQU \leq \beta Q, \quad h^TU^{-1}h \leq 0, \quad h^T(U^TQU)^{-1}h \geq 0$$

задовольняють наступні значення параметрів:

$$U = \begin{bmatrix} -1.67 & 0.479 & 0.037 \\ 0.071 & -3.343 & 1.028 \\ 7.627 & 0.245 & -3.987 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.148 & 0.022 & -0.066 \\ 2.208 & 0.395 & -0.027 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 27 & 17 & 8 \\ 17 & -3.8 & 1.2 \\ 8 & 1.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0.897 \\ 0.387 \\ 0.212 \end{bmatrix}, \quad \alpha = -2.96, \quad \beta = 1.115.$$

Тут (U, T) є максимальною власною парою $F(\lambda)$, $i(Q) = \{1, 2, 0\}$, а h — власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню.

Отже, згідно з теоремою 3.7 система (3.21) експоненціально стійка і має інваріантний конус типу (3.22), де $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q)$ — еліпсоїдальний конус.

3.4. Абсолютна стійкість позитивних диференціальних систем із запізненням

Розглянемо клас диференціальних систем

$$\dot{x}(t) + Lx(t) = G(x(t-\tau)), \quad G(0) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \tag{3.23}$$

де L і G — відповідно лінійний та нелінійний оператори в просторі R^n, $\tau > 0$ — стале запізнення. Вважаємо, що виконується умова існування єдиного розв'язку $x(t) \in R^n$ при початкових умовах

$$x(\theta) = \eta(\theta), \quad t_0 - \tau \le \theta \le t_0. \tag{3.24}$$

Якщо $\eta(\theta) \equiv 0$, то $x \equiv 0$ — тривіальний розв'язок системи (3.23).

Означення 3.2. Розв'язок $x \equiv 0$ системи (3.23) називається:

а) стійкий за Ляпуновим, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \ge 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що, як тільки $\|x_0\|_\tau < \delta$, то $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всіх $t > t_0$, де $\|x_0\|_\tau = \max\limits_{t_0-\tau\le\theta\le t_0} \|x(\theta)\|, \quad x_0 = x(t_0)$.

б) асимптотично стійким, якщо він стійкий за Ляпуновим і для довільного $t_0 \ge 0$ існує $\delta = \delta(t_0) > 0$ таке, що для всіх розв'язків $x(t)$ системи (3.23), для яких $\|x_0\|_\tau < \delta$, виконується $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

в) абсолютно стійким, якщо він асимптотично стійкий при довільному $\tau \ge 0$.

Означення 3.3. Лінійний функціонал φ називається рівномірно позитивним, якщо для деякого $\gamma > 0$ виконується нерівність $\varphi(x) \ge \gamma\|x\|$, $x \ge 0$.

Теорема 3.10. *Нехай виконуються умови*

$$e^{-L(t-t_0)}x \overset{\mathcal{K}}{\ge} 0, \quad 0 \overset{\mathcal{K}}{\le} G(x) \overset{\mathcal{K}}{\le} Px, \quad x \in \mathcal{K}, \tag{3.25}$$

де P — лінійний позитивний оператор, та існують лінійні рівномірно позитивні функціонали $\varphi, \psi \in \mathcal{K}^*$, які задовольняють рівняння

$$M^*\varphi = \psi, \quad M = L - P. \tag{3.26}$$

Тоді розв'язок $x \equiv 0$ системи (3.23) абсолютно стійкий.

Доведення. Згідно з теоремою 2.7 система (3.23) при умовах (3.25) є позитивною. Побудуємо функціонал Ляпунова-Красовського

$$V(x_t) = \varphi(x(t)) + \int_{-\tau}^{0} \varphi\left(G(x(t+\theta))\right) d\theta, \tag{3.27}$$

де $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\varphi \in \mathcal{K}^*$. Вираз (3.27) є узагальненням функціонала Ляпунова-Красовського, запропонованого в роботі [49] у випадку конуса R^n_+.

Зауважимо, що для довільного позитивного функціоналу виконується оцінка [35]

$$\gamma_-\|x\| \le \varphi(x) \le \gamma_+\|x\|, \quad x \in \mathcal{K},$$

де $\gamma_\pm > 0$ — деякі константи, що не залежать від x. Тому має місце нерівність $V(\eta) \ge \varphi(\eta(0)) \ge \gamma_-\|\eta(0)\|$.

Похідна функціоналу (3.27) на розв'язках системи (3.23), враховуючи (3.25) і (3.26), задовольняє співвідношенням

$$\dot{V}(x_t) = \varphi(-Lx(t) + G(x(t))) \le \varphi - (Mx(t)) = -\psi(x(t)) \le -\gamma\|x(t)\|,$$

де $\gamma > 0$. Отже, позитивна диференціальна система (3.23) є асимптотично стійкою для довільного $\tau \ge 0$ [107].

Теорема доведена.

Теорема 3.10 узагальнює критерій абсолютної стійкості диференціальних систем типу (3.23), позитивних відносно конуса R^n_+ [49].

Нехай конуси $\mathcal{K}$ та $\mathcal{K}^*$ є тілесними у відповідних просторах. При умовах теореми 3.10 оператор M^* повинен бути позитивно оборотним, причому $(M^{-1})^* = (M^*)^{-1}$. Тому при побудові критеріїв абсолютної стійкості лінійної системи

$$\dot{x}(t) + Lx(t) = Px(t-\tau), \quad t \ge t_0 \ge 0. \tag{3.28}$$

замість рівняння (3.26) можна розглядати аналогічне рівняння з оператором M.

Теорема 3.11. *Для позитивної системи (3.28) відносно тілесного конуса $\mathcal{K}$ наступні твердження еквівалентні:*

1) розв'язок $X \equiv 0$ системи (3.28) абсолютно стійкий;

2) оператор $M = L - P$ позитивно оборотний;

3) існують $X, Y \in int\,\mathcal{K}$, які задовольняють рівняння $MX = Y$;

4) $Re\,\lambda \le \alpha < 0 \quad \forall\,\lambda \in \sigma(M)$.

Зауваження 3.1. Якщо $P\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \subseteq L\mathcal{K}$, то в теоремі 3.11 кожне з тверджень 1)–4) є еквівалентним твердженню (див. також теорему 3.2)

5) $\rho(T) < 1$, де $\rho(T)$ — спектральний радіус лінійного пучка $T(\lambda) = \lambda L - P$.

Приклад 3.3. Лінійна диференціальна система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad x \in R^n \tag{3.29}$$

є позитивною відносно конуса невід'ємних векторів $\mathcal{K} = R^n_+$ тоді і тільки тоді, коли позадіагональні елементи матриці A і всі елементи матриці B невід'ємні [49]. Абсолютна стійкість розв'язку $x \equiv 0$ системи (3.29) еквівалентна сумісності системи нерівностей $(A+B)x \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} x$.

Приклад 3.4. Лінійна матрична система

$$\dot{X}(t) + AX(t) + X(t)A^T = BX(t-\tau)B^T, \quad X = X^T \tag{3.30}$$

позитивна відносно конуса симетричних невід'ємно визначених матриць $\mathcal{K}$. В даному випадку експоненціальний оператор $e^{L(t-t_0)}X = e^{A(t-t_0)}Xe^{A^T(t-t_0)}$ лінійної системи (3.23) без запізнення з оператором Ляпунова $LX = AX + XA^T$ та оператор $G(X) = BXB^T$ є позитивними відносно конуса $\mathcal{K}$. Нульовий розв'язок позитивної системи (3.30) абсолютно стійкий, якщо для деякої матриці $Y = Y^T > 0$ матричне алгебраїчне рівняння

$$AX + XA^T - BXB^T = Y$$

має розв'язок $X = X^T > 0$.

3.5. Задачі позитивної стабілізації систем.

Розглянемо систему керування

$$\dot{X} = F(X, U, t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq t_0, \tag{3.31}$$

де X – стан системи, а керування U може формувати динамічний компенсатор

$$\dot{U} = G(X, U, t), \quad U \in \mathcal{U}, \quad t \geq t_0, \tag{3.32}$$

або мати вигляд зворотного зв'язку по вимірному виходу

$$U = L(Y, t), \quad Y = H(X, t), \quad U \in \mathcal{U}, \quad Y \in \mathcal{Y}. \tag{3.33}$$

Якщо H – тотожний оператор, то в (3.33) вимірюється весь вектор стану X. У випадку лінійних операторів L і H зворотний зв'язок (3.33) називається лінійним.

Означення 3.4. Систему (3.31) будемо називати позитивно керованою відносно конуса $\mathcal{K} \in \mathcal{X}$ ($\mathcal{K} \in \mathcal{E} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}$), якщо існує керування (3.32) ((3.33)), при якому відповідна замкнута система має даний інваріантний конус.

Означення 3.5. Систему (3.31) будемо називати позитивно стабілізованою відносно конуса $\mathcal{K} \in \mathcal{X}$ ($\mathcal{K} \in \mathcal{E} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}$), якщо існує керування (3.32) ((3.33)), при якому відповідна замкнута система асимптотично стійка і має даний інваріантний конус.

Аналогічно визначаються поняття монотонної керованості і стабілізації системи (3.31) за допомогою керувань (3.32) і (3.33), при цьому замінюючи вимогу інваріантності конуса $\mathcal{K}$ властивістю монотонності замкнутої системи відносно даного конуса.

Розглянемо лінійну диференціальну систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m. \tag{3.34}$$

Будемо шукати керування у вигляді зворотного зв'язку

$$u = Ly, \quad y = Cx, \quad y \in R^r. \tag{3.35}$$

Тут A, B і C — відомі матриці відповідно розмірів $n \times n$, $n \times m$ і $r \times m$. Невідома матриця коефіцієнтів підсилення L лінійного зворотного зв'язку по виходу, що забезпечує системі властивості асимптотичної стійкості та позитивності відносно еліпсоїдального конуса $\mathcal{K}(Q)$, визначається із системи матричних нерівностей

$$\begin{gathered}(A+BLC)^T Q + Q(A+BLC) \geq \alpha Q, \quad (A+BLC)^T Q (A+BLC) \leq \beta Q, \\ h^T (A+BLC)^{-1} h \leq 0, \quad h^T [(A+BLC)^T Q (A+BLC)]^{-1} h \geq 0,\end{gathered} \tag{3.36}$$

де $\alpha \in R^1$ і $\beta > 0$, а h — власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Умови (3.36), які забезпечують позитивну стабілізацію системи (3.34) випливають з теореми 3.5.

Розглянемо керування у вигляді динамічного компенсатора

$$\dot{u} = Cx + Du. \tag{3.37}$$

Тоді систему рівнянь (3.34), (3.37) можна записати у вигляді

$$\dot{z} = Mz, \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

де $A = \|a_{ij}\|_1^n$, $B = \|b_{ij}\|_1^{n,m}$, $C = \|c_{ij}\|_1^{m,n}$, $D = \|d_{ij}\|_1^m$. Ця система є позитивною відносно конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли виконується система нерівностей (див. приклад 2.5)

$$\begin{gathered} \alpha d_{sj} \geq |b_{kj}|, \quad j \neq s, \\ \pm\alpha(\alpha c_{sk} \mp a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} \mp b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i \neq k} |\alpha c_{si} \mp a_{ki}|, \end{gathered} \tag{3.39}$$

де $k, i = \overline{1, n}$, $s, j = \overline{1, m}$. При цьому замкнута система (3.38), згідно з теоремою 3.1, асимптотично стійка, якщо матриця

$$-\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix}$$

зберігає конус $\mathcal{K}_\mu(\alpha, \infty)$, тобто має місце включення $-\mathcal{K}_\mu(\alpha, \infty) \subset M\mathcal{K}_\mu(\alpha, \infty)$. Для цього достатньо, щоб виконувалась система нерівностей (підрозділ 2.5)

$$\alpha \hat{d}_{sj} \geq |\hat{b}_{kj}|, \quad \sum_i |\alpha \hat{c}_{si} \pm \hat{a}_{ki}| \leq \sum_j (\hat{d}_{sj} \pm \beta \hat{b}_{kj}), \quad k, i = \overline{1, n}, \ s, j = \overline{1, m}, \tag{3.40}$$

де $\hat{a}_{ij}$, $\hat{b}_{ij}$, $\hat{c}_{ij}$ і $\hat{d}_{ij}$ — відповідно елементи матриць $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ і $\widehat{D}$, які, враховуючи формули Фробеніуса обертання блочної матриці [39], задовольняють наступним співвідношенням

$$\widehat{A} = -S^{-1}, \quad \widehat{B} = S^{-1}BD^{-1}, \quad \widehat{C} = D^{-1}CS^{-1},$$

$$\widehat{D} = -D^{-1} - D^{-1}CS^{-1}BD^{-1}, \quad S = A - BD^{-1}C.$$

У співвідношеннях (3.39), (3.40) параметри α і β задовольняють умови (2.27).

Отже, метод побудови стабілізуючого керування у вигляді динамічного компенсатора для системи (3.38) зводиться до розв'язання системи нерівностей (3.39), (3.40) відносно елементів невідомих матриць C і D. Побудову такого керування можна здійснювати також в термінах позитивних розв'язків алгебраїчних рівнянь. Для того, щоб система (3.38) була позитивно стабілізованою необхідно і достатньо, щоб разом з (3.39) виконувалось одне з тверджень теореми 3.2.

Аналогічно, для стаціонарної різницевої системи

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_k \in R^n, \quad u_k \in R^m, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

можна побудувати стабілізуюче керування у вигляді динамічного компенсатора

$$u_{k+1} = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

відносно конусів типу $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$. Відповідно до цього розглянемо різницеву систему

$$z_{k+1} = Mz_k, \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots \;, \tag{3.41}$$

Відомо, що дана система буде асимптотично стійкою відносно деякого конуса $\mathcal{K}$, якщо виконуються включення $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ і $(I - M)^{-1}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$. Використавши умови інваріантності конусів типу $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$ (підрозділ 2.4) для системи (3.41), можна отримати системи алгебраїчних нерівностей для знаходження елементів невідомих матриць керування C і D. Можна також шукати матриці C і D в термінах позитивних розв'язків алгебраїчних рівнянь (див. теорему 3.3).

Приклад 3.5. Розглянемо лінійну диференціальну систему (3.34)-(3.35) з матрицями

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = I.$$

Систему нерівностей (3.36) задовольняють наступні значення параметрів

$$Q = \begin{bmatrix} 27 & 17 & 8 \\ 17 & -3.8 & 1.2 \\ -8 & 1.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0.8971 \\ 0.3873 \\ 0.2121 \end{bmatrix}, \quad \alpha = -2.9, \quad \beta = 2,$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.0294 & 0.0083 & 0.0659 \\ 0.0977 & 0.1131 & -0.3064 \end{bmatrix}.$$

Тут $i(Q) = \{1, 2, 0\}$, а h — власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Спектр відповідної замкнутої системи має вигляд $\{-2.2250 \pm 0.9859i,\ -0.8186\}$.

Отже, система (3.34)-(3.35) є позитивно стабілізованою відносно еліпсоїдального конуса $\mathcal{K}(Q)$.

Розглянемо диференціальну систему другого порядку

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = Fu, \quad u = -L_0 x - L_1 \dot{x}, \tag{3.42}$$

де $A, B, C \in R^{n\times n}$, $F \in R^{n\times m}$, $L_0, L_1 \in R^{m\times n}$.

Перепишемо систему (3.42) у вигляді

$$\dot{z} = Mz, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}(A + FL_0) & -C^{-1}(B + FL_1) \end{bmatrix}, \ z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Оскільки

$$-M^{-1} = \begin{bmatrix} (A + FL_0)^{-1}(B + FL_1) & (A + FL_0)^{-1}C \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

то умови позитивності матриці $-M^{-1}$ відносно конусів R_+^{2n} та $\mathcal{K}_\mu(\alpha, \infty)$ не виконуються. Тому теорему 3.4 для вказаних конусів застосувати не можна.

Введемо перетворення $z = Tw$, де T — невироджена матриця. Тоді система (3.43) набуває вигляду

$$\dot{w} = \hat{M}w, \quad \hat{M} = T^{-1}MT. \tag{3.44}$$

Зрозуміло, що система (3.43) стійка і позитивна відносно конуса $\mathcal{K} = T\hat{\mathcal{K}}$ лише тоді, коли перетворена система (3.44) також стійка і позитивна відносно конуса $\hat{\mathcal{K}}$. Тому в задачі позитивної стабілізації системи (3.42) разом з матрицями керування L_0 і L_1 необхідно шукати матрицю перетворення T для заданого конуса $\hat{\mathcal{K}}$.

3.6. Задачі порівняння та впорядкування динамічних систем.

Розглянемо сімейство незалежних систем

$$(\mathcal{S}_i): \quad \dot{X}_i = F_i(X_i, t), \quad X_i \in \mathcal{X}_i, \; t \geq 0, \; i = \overline{1, s}. \tag{3.45}$$

Для спрощення запису введемо наступні позначення:

$$X = (X_1, \ldots, X_s), \quad F(X, t) = (F_1(X_1, t), \ldots, F_s(X_s, t)), \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_s.$$

Нехай $\mathcal{E}$ — деякий простір, що містить конус $\mathcal{K}$, і задано оператор $W : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$. Припустимо, що кожній початковій умові $X(t_0) = X_0 \in \Omega$ відповідає єдиний розв'язок $X(t)$ сімейства систем (3.45) в деякій області $\Omega \subset \mathcal{X}$ при $t \geq t_0 \geq 0$, а $W(X, t)$ є неперервною функцією разом зі своїми частинними похідними в області $\widehat{\Omega} = \Omega \times [0, \infty)$. Крім того, доцільно вважати, що оператор W не є всюди позитивним відносно $\mathcal{K}$.

Означення 3.6. Системи (3.45) називаємо порівнянними, якщо для довільного $t_0 \geq 0$ виконується умова

$$W(X(t_0), t_0) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0 \implies W(X(t), t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad t > t_0. \tag{3.46}$$

При цьому W є оператором порівняння даних систем.

Побудуємо оператор диференціювання $D_t W(X, t)$ в силу систем (3.45) і сформулюємо наступний результат.

Теорема 3.12. *Нехай $\mathcal{K}$ — тілесний конус. Тоді системи (3.45) є порівнянними тоді і тільки тоді, коли при кожному $t \geq 0$ виконується умова*

$$W(X, t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}^*, \quad \varphi\left(W(X, t)\right) = 0 \implies \varphi\left(D_t W(X, t)\right) \geq 0. \tag{3.47}$$

Останнє твердження є очевидним наслідком теореми 2.5.

Сформулюємо основні твердження відомого принципу порівняння для двох і трьох систем з нульовими положеннями рівноваги, які можна вважати наслідками теореми 3.12.

Нехай спочатку $s = 2$. Покладемо $W(X,t) = X_2 - V(X_1,t)$, де $V : \mathcal{X}_1 \times [0,\infty) \to \mathcal{X}_2$ — всюди позитивний оператор відносно нормального тілесного конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}_2$. Тоді із конусної нерівності

$$D_t V(X_1,t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} F_2(V(X_1,t),t) \tag{3.48}$$

і належності F_2 класу квазімонотонних операторів $F \in \mathcal{F}$, що визначається умовою (2.2), випливає наступна властивість розв'язків систем:

$$0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} V(X_1(t_0),t_0) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_2(t_0) \implies 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} V(X_1(t),t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_2(t),\ \ t > t_0 \geq 0.$$

Це означає, що виконується умова (3.46), тобто системи (3.45) є порівнянними в сенсі означення 3.6.

Припустимо, що оператор порівняння V має додаткові властивості

$$V(0,t) \equiv 0, \quad \|V(X,t)\| \geq v(X) > 0, \quad X \neq 0, \quad t \geq 0, \tag{3.49}$$

де $v(x) \geq 0$ — неперервна функція така, що $v(0) = 0$ і $v(X) \leq v(Y) \implies \|X\| \leq \|Y\|$. Тоді виконується наступне твердження [28].

Теорема 3.13. *Нехай всюди позитивний оператор V задовольняє співвідношення (3.48), (3.49), причому, $F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1(0,t) \equiv F_2(0,t) \equiv 0$. Тоді розв'язок $X_1 \equiv 0$ системи $(\mathcal{S}_1)$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стійкий (асимптотично стійкий) в $\mathcal{K}$ розв'язок $X_2 \equiv 0$ системи $(\mathcal{S}_2)$.*

Розглянемо випадок $s = 3$ і побудуємо оператор порівняння у блочному вигляді

$$W(X,t) = [V(X_2,t) - X_1,\ X_3 - V(X_2,t)],$$

де $V : \mathcal{X}_2 \times [0,\infty) \to \mathcal{X}_1$ — деякий оператор. Нехай простори $\mathcal{X}_1$ і $\mathcal{X}_3$ співпадають і містять нормальний тілесний конус $\mathcal{K}_1$. Тоді, якщо $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_3 \in \mathcal{F}$ і виконуються конусні нерівності типу

$$F_1(V(X_2,t),t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} D_t V(X_2,t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} F_3(V(X_2,t),t), \tag{3.50}$$

то розв'язки системи ($\mathcal{S}_2$) можна порівняти з розв'язками систем ($\mathcal{S}_1$) і ($\mathcal{S}_3$) у вигляді

$$X_1(t_0) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} V(X_2(t_0), t_0) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_3(t_0) \implies X_1(t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} V(X_2(t), t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_3(t),\ t > t_0 \geq 0.$$

Це означає, що виконується умова (3.46) з конусом $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_1$, тобто системи (3.45) є порівнянними в сенсі означення 3.6. Легко бачити, що в цьому випадку умова (3.47) теореми 3.12 є наслідком співвідношень (3.50) і $F_1, F_3 \in \mathcal{F}$. Тому теорема 3.12 узагальнює відомий принцип порівняння диференціальних систем. При умові (3.46) система ($\mathcal{S}_1$) є нижньою, а система ($\mathcal{S}_3$) — верхньою системою порівняння для системи ($\mathcal{S}_2$) [18, 64].

Теорема 3.14. *Нехай оператор V задовольняє співвідношення (3.49), (3.50), причому, $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_3 \in \mathcal{F}$ і $F_i(0,t) \equiv 0$, $i = \overline{1,3}$. Тоді розв'язок $X_2 \equiv 0$ системи ($\mathcal{S}_2$) стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стійкий (асимптотично стійкий) в $-\mathcal{K}_1$ розв'язок $X_1 \equiv 0$ системи ($\mathcal{S}_1$) і стійкий (асимптотично стійкий) в $\mathcal{K}_1$ розв'язок $X_3 \equiv 0$ системи ($\mathcal{S}_3$).*

Можна сформулювати задачі впорядкування і виявлення домінуючої (у певному розумінні) системи сімейства $s \geq 2$ незалежних систем у вигляді загальної задачі порівняння. Дійсно, розглянемо блочний оператор

$$W(X,t) = \Big[\ V_2(X_2,t) - V_1(X_1,t),\ \ldots\ , V_s(X_s,t) - V_{s-1}(X_{s-1},t)\ \Big], \qquad (3.51)$$

де $V_i : \mathcal{X}_i \times [0,\infty) \to \mathcal{E}_1$ — деякі оператори, $i = \overline{1,s}$. Нехай простір $\mathcal{E}_1$ містить конус $\mathcal{K}_1$ і виконується властивість порівняння систем (3.46), де $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_1$. Тоді розв'язки сімейства систем (3.45) впорядковані у вигляді

$$V_1(X_1(t),t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} V_2(X_2(t),t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} \cdots \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} V_s(X_s(t),t), \quad t > t_0, \qquad (3.52)$$

при умові, що дане впорядкування виконується в початковий момент $t = t_0$. Зокрема, якщо $V_i(X_i,t) = \|X_i\|_{\mathcal{X}_i}$ — норма у просторі $\mathcal{X}_i$, то розв'язки систем (3.45) впорядковані у вигляді

$$\|X_1(t_0)\|_{\mathcal{X}_1} \leq \cdots \leq \|X_s(t_0)\|_{\mathcal{X}_s} \quad \implies \quad \|X_1(t)\|_{\mathcal{X}_1} \leq \cdots \leq \|X_s(t)\|_{\mathcal{X}_s}, \quad t > t_0.$$

У випадку тотожних операторів $V_i = E$ будемо мати

$$X_1(t_0) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_2(t_0) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} \cdots \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_s(t_0) \quad \Longrightarrow \quad X_1(t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_2(t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} \cdots \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_s(t), \;\; t > t_0.$$

При цьому система $(\mathcal{S}_s)$ є домінуючою в сімействі систем (3.45).

У випадку тілесного конуса $\mathcal{K}$ теорема 3.12 дає критерій вказаного типу впорядкування сімейства систем (3.45) у вигляді (3.47).

Приклад 3.6. Розглянемо сімейство систем

$$\dot{X}_i = A_i(X_i, t)X_i, \;\; X_i \in R^{n_i}, \;\; t \geq 0, \quad i = \overline{1, s}, \tag{3.53}$$

де A_i — матриці розмірів $n_i \times n_i$, неперервно залежні від X_i і t.

Задамо оператор (3.51), поклавши

$$V_i(X_i, t) = X_i^T Q_i(t) X_i, \quad Q_i(t) \equiv Q_i^T(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Тоді

$$\lambda_{min}(H_i) X_i^T X_i \leq D_t V_i(X_i, t) = X_i^T H_i X_i \leq \lambda_{max}(H_i) X_i^T X_i,$$

де $H_i = A_i^T Q_i + Q_i A_i + \dot{Q}_i$. Застосовуючи теорему 3.12, можна встановити, що для впорядкованості систем (3.53) у вигляді (3.52) з конусом $\mathcal{K} = R_+^{s-1}$ достатньо, щоб в області $\widehat{\Omega}$ виконувались співвідношення

$$H_j \leq \beta_j Q_j, \quad \alpha_{j+1} Q_{j+1} \leq H_{j+1}, \quad \beta_j \leq \alpha_{j+1}, \quad j = \overline{1, s-1}, \tag{3.54}$$

де $\beta_j(X_j, t)$ і $\alpha_{j+1}(X_{j+1}, t)$ — деякі неперервні скалярні функції. Якщо всі матриці $Q_i > 0$ — додатно визначені, то в (3.54) виконуються оцінки

$$\beta_j \geq \lambda_{\max}(H_j - \lambda Q_j), \quad \alpha_{j+1} \leq \lambda_{\min}(H_{j+1} - \lambda Q_{j+1}), \quad j = \overline{1, s-1},$$

де $\lambda_{\max}(\cdot)$ ($\lambda_{\min}(\cdot)$) — максимальне (мінімальне) власне значення відповідного пучка матриць. В цьому випадку маємо достатні умови впорядкованості систем (3.53) у вигляді (3.52):

$$\lambda_{\max}(H_j - \lambda Q_j) \leq \lambda_{\min}(H_{j+1} - \lambda Q_{j+1}), \quad j = \overline{1, s-1}.$$

Нехай всі матриці Q_i не залежать від часу і є додатно визначеними. Тоді при виконанні матричних нерівностей в (3.54) спектри матриць A_i мають бути розміщені у відповідних областях рис. 3.2. Причому, сусідні області можуть мати спільні точки лише на лініях границь.

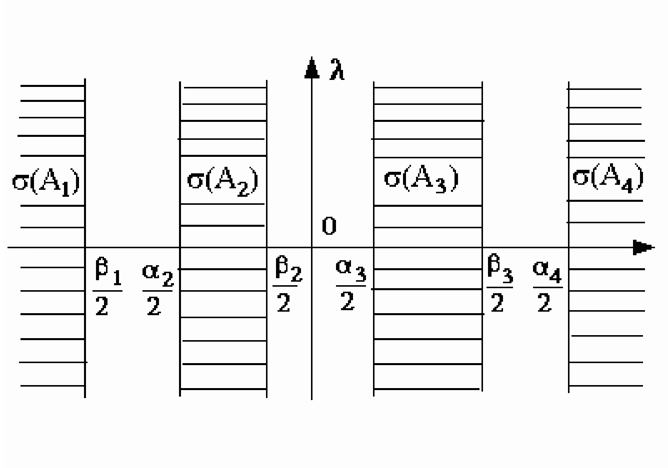


Рис. 3.2. Області можливого розміщення спектрів $\sigma(A_i)$ при умовах впорядкованості (3.54) $s = 4$ систем.

Якщо $Q_i \equiv I$ і в області $\widehat{\Omega}$ виконуються нерівності

$$\lambda_{max}(A_j^T + A_j) \leq \lambda_{min}(A_{j+1}^T + A_{j+1}), \quad j = \overline{1, s-1},$$

то розв'язки систем (3.53) впорядковані по нормі, тобто

$$\|X_1(t_0)\| \leq \cdots \leq \|X_s(t_0)\| \quad \Longrightarrow \quad \|X_1(t)\| \leq \cdots \leq \|X_s(t)\|, \quad t > t_0.$$

3.7. Висновки до розділу

Основні результати даного розділу полягають у наступному:

- доведено достатні умови стійкості лінійних позитивних диференціальних та різницевих систем відносно еліпсоїдального конуса у вигляді матричних нерівностей;
- отримано алгебраїчні умови позитивності та експоненціальної стійкості диференціальних систем довільного порядку;
- встановлено алгебраїчні та спектральні умови абсолютної стійкості позитивних диференціальних систем із запізненням;
- запропоновано способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів;

- сформульовано узагальнений принцип порівняння сімейства диференціальних систем.

Основні результати розділу опубліковано у статтях [26, 28].

РОЗДІЛ 4
АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ І СТАБІЛІЗАЦІЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

У даному розділі розробляються нові методи дослідження стійкості та стабілізації механічних систем, лінеаризовані моделі яких описуються диференціальними системами другого порядку. На практиці важливу роль виконують коефіцієнтні критерії стійкості, які формулюються в термінах матричних коефіцієнтів у вигляді систем алгебраїчних рівнянь і нерівностей. В таких дослідженнях застосовуються методи функцій Ляпунова та їх матричні інтерпретації.

Формулюються умови стійкості диференціальної системи другого порядку за допомогою розв’язків блочної спектральної задачі та в термінах матричних коефіцієнтів системи. Вивчаються умови гіперболічності (майже гіперболічності) квадратичного пучка матриць, що відповідає даній системі. Це дало можливість звести коефіцієнтні умови стійкості даного класу систем до оцінки середніх власних значень відповідної гіперболічної спектральної задачі.

Будується клас регуляторів, що стабілізують диференціальну систему другого порядку. Ефективність методів демонструється на прикладах моделей механічних систем (ротора Лаваля та моделі обертання балки). Проводяться аналітичні та чисельні дослідження.

4.1. Гіперболічні та еліптичні спектральні задачі

Розглянемо квадратичний пучок матриць (КПМ)

$$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C, \quad A = A^* \quad B = B^*, \quad C = C^* > 0 \tag{4.1}$$

та відповідну квадратичну спектральну задачу (КСЗ)

$$F(\lambda)\, z = 0, \quad \lambda \in \sigma(F), \quad z \neq 0. \tag{4.2}$$

Будемо використовувати наступні позначення:

$$\delta(z) \triangleq (z^* B z)^2 - 4 z^* A z z^* C z, \quad D = B C^{-1} B - A, \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

КСЗ (4.2) називається:

1) гіперболічною, якщо $\delta(z) > 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in C^n$;

2) майже гіперболічною, якщо $\delta(z) \geq 0, \quad \forall z \in C^n$;

3) квазігіперболічною, якщо $\delta(u) \geq 0$ для довільного власного вектора u;

4) еліптичною, якщо $\delta(z) < 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in C^n$.

КПМ (4.1), якому відповідає гіперболічна, майже гіперболічна, квазігіперболічна та еліптична КСЗ будемо також називати відповідно гіперболічним, майже гіперболічним, квазігіперболічним та еліптичним. При додаткових обмеженнях $B > 0$, $A \geq 0$ гіперболічний КПМ (4.1) називається сильно демпфованим.

В роботі [97] встановлено наступний результат.

Теорема 4.1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) КСЗ (4.2) є гіперболічною;

2) $\exists\, \alpha \in R^1 : F(\alpha) < 0$*;*

3) КПМ $F(\lambda)$ *має дійсні власні значення* $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n < \lambda_{n+1} \leq \ldots \leq \lambda_{2n}$ *і* $F(\alpha) < 0$ *при* $\lambda_n < \alpha < \lambda_{n+1}$.

Встановимо аналог теореми 4.1 для майже гіперболічної спектральної задачі.

Теорема 4.2. *Наступні твердження еквівалентні:*
1) КСЗ (4.2) є майже гіперболічною;
2) $\exists\, \alpha \in R^1 : F(\alpha) \leq 0$*;*
3) КПМ $F(\lambda)$ *має дійсні власні значення* $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \ldots \leq \lambda_{2n}$ *і* $F(\alpha) \leq 0$ *при* $\lambda_n \leq \alpha \leq \lambda_{n+1}$.

Доведення. Покажемо, що:

1) $\Longrightarrow$ 2). Якщо $\delta(z) \geq 0$, $z \neq 0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$\delta_\varepsilon(z) = (z^* Bz)^2 - 4z^*(A - \varepsilon I)zz^* Cz > 0.$$

За теоремою 4.1 для деякого $\alpha \in R^1$ повинна виконуватись матрична нерівність

$$F_\varepsilon(\alpha) = F(\alpha) - \varepsilon I < 0.$$

В силу замкнутості конуса невідємно визначених матриць при $\varepsilon \longrightarrow 0$ маємо $F(\alpha) \leq 0$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Нехай $F(\alpha) \leq 0$, тоді для довільного $z \neq 0$

$$f_z(\alpha) = z^* Az + \alpha z^* Bz + \alpha^2 z^* Cz \leq 0, \quad z^* Cz > 0$$

і квадратне рівняння $f_z(\lambda) = 0$ має дійсні корені $\omega_1(z)$ і $\omega_2(z)$. Зокрема $f_{z_i}(\lambda_i) = 0$, де z_i — власний вектор КПМ (4.1), що відповідає власному значенню $\lambda_i \in \sigma(F)$. Отже, $\lambda_i \in \{\omega_1(z_i), \omega_2(z_i)\}$ — дійсне число. Оскільки C — невироджена матриця, то КПМ (4.1) має $2n$ дійсних власних значень $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{2n}$.

Вивчимо залежність від α кількості додатних власних значень $i_+(F(\alpha))$ ермітової матриці $F(\alpha)$ із урахуванням кратностей. Якщо α^2 — достатньо велике число, то $i_+(F(\alpha)) = n$. Ця рівність виконується на інтервалах $(-\infty, \lambda_1)$ і (λ_{2n}, ∞), оскільки тут матриця $F(\alpha)$ невироджена, а власні значення неперервно залежать від α. Точка λ_i є власним значенням КПМ $F(\lambda)$ лише тоді, коли 0 — власне значення матриці $F(\alpha)$. Причому, алгебраїчна кратність точки λ_i (як власного значення КПМ $F(\lambda)$) рівна алгебраїчній кратності n_i точки 0 (як власного значення матриці $F(\lambda_i)$) [97].

Отже, число $i_+(F(\alpha))$ може змінюватись лише в точках $\alpha = \lambda_i \in \sigma(F)$ не більше, ніж на n_i. При умові 2) для деякого α повинна виконуватись рівність $i_+(F(\alpha)) = 0$, яка можлива лише на інтервалі $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$. Більше того,

$$i_+(F(\alpha)) \equiv 0, \quad \alpha \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}].$$

3) $\Longrightarrow$ 2). Це твердження тривіальне.

2) $\Longrightarrow$ 1). Якщо $F(\alpha) \leq 0$, то квадратне рівняння $f_z(\lambda) = 0$ має дійсні корені і його дискримінант $\delta(z) \geq 0$ при довільному $z \neq 0$.

Теорема доведена.

Зауваження 4.1. Якщо КПМ (4.1) не є гіперболічним, а лише майже гіперболічним, то в умовах 3) теореми 4.1 $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \alpha$ — єдина точка, де $F(\alpha) \leq 0$. При цьому [97]

$$\alpha = -\frac{z_0^* B z_0}{2 z_0^* C z_0}, \quad \min_{\|z\|=1} \delta(z) = \delta(z_0) = 0.$$

Якщо $F(\lambda)$ — гіперболічний пучок, то $F(\lambda + \alpha)$ є сильно демпфованим для деякого α. Гіперболічний КМП (4.1) є сильно демпфованим лише тоді, коли $\lambda_{2n} \leq 0$, тобто всі його власні значення знаходяться на півосі $(-\infty, 0]$. Для того, щоб пучок матриць $F(\lambda)$ був еліптичним, необхідно і достатньо виконання нерівності $\delta(u) < 0$ для довільного власного вектора u.

Використовуючи наступні співвідношення

$$F(\alpha) = -D + (B + \alpha C)C^{-1}(B + \alpha C), \quad L(\alpha) = \begin{bmatrix} D & B + \alpha C \\ B + \alpha C & C \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C^{-1}B & I \end{bmatrix},$$

можна встановити наступні факти. Для гіперболічного пучка $F(\lambda)$ виконуються умови $D > 0$ та $i(M) = \{n, n, 0\}$. Якщо $D < 0 \, (\leq 0)$, то $F(\alpha) > 0 \, (\geq 0)$ для довільного α. Якщо $D < 0$, то $F(\lambda)$ — еліптичний пучок і всі його власні значення комплексні. Якщо $D = 0$, то всі власні значення $F(\lambda)$ дійсні і кратні: $\sigma(F) = \sigma(B + \lambda C) \cup \sigma(B + \lambda C)$. Нерівності $F(\alpha) < 0 \, (\leq 0)$ та $L(\alpha) > 0 \, (\geq 0)$ еквівалентні. Для майже гіперболічного пучка $F(\lambda)$ виконується нерівність $D \geq 0$.

4.2. Блочна спектральна задача для вироджених диференціальних систем другого порядку

Розглянемо автономну диференціальну систему другого порядку

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = 0, \quad A, B, C \in C^{n\times n}, \quad t \geq 0. \tag{4.3}$$

Незалежні від часу матричні коефіцієнти системи (4.3) визначають регулярний квадратичний пучок $F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$: $\det F(\lambda) \not\equiv 0$. Матриця коефіцієнтів C може бути виродженою.

Нехай матриці $U \in C^{m\times m}$ і $T \in C^{m\times n}$ складають ліву власну пару (U, T) квадратичного пучка $F(\lambda)$, тобто виконуються співвідношення [21]

$$TA + UTB + U^2TC = 0, \quad \operatorname{rank}[T, UT] = m. \tag{4.4}$$

Якщо при цьому m набуває максимально можливе значення, то власна пара (U, T) є максимальною.

Співвідношення (4.4) визначають блочну ліву спектральну задачу для квадратичного пучка $F(\lambda)$. Аналогічно формулюється блочна права спектральна задача. Відомо, що спектр матриці U в (4.4) є підмножиною спектра $\sigma(F)$ [21]. Зокрема, для максимальної власної пари (U, T) маємо $\sigma(U) = \sigma(F)$.

Подамо систему (4.3) у вигляді

$$\hat{B}\dot{y} = \hat{A}y, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Спектр лінійного пучка $\hat{F}(\lambda) = \hat{A} - \lambda\hat{B}$ співпадає з $\sigma(F)$, а співвідношення (4.4) зводяться до вигляду

$$E\hat{A} = UE\hat{B}, \quad \operatorname{rank} E = m, \quad E = [TB + UTC, T]. \tag{4.6}$$

При побудові власних пар пучків $F(\lambda)$ і $\hat{F}(\lambda)$ можна використовувати розв'язки алгебраїчної системи

$$\hat{A}Z\hat{B} = \hat{B}Z\hat{A}, \quad Z = Z\hat{B}Z. \tag{4.7}$$

Матриця Z в (4.7) має наступну структуру

$$Z = \begin{bmatrix} T_1B + T_2C & T_1 \\ -T_1A & T_2 \end{bmatrix},$$

де T_1 і T_2 знаходяться із матричної системи

$$\begin{aligned} AT_1B - BT_1A &= CT_2A - AT_2C, \\ AT_1C - CT_1A &= CT_2B - BT_2C, \\ T_1 &= T_1BT_1 + T_1CT_2 + T_2CT_1, \\ T_2 &= T_2CT_2 - T_1AT_1. \end{aligned}$$

Домножаючи перше рівняння в (4.7) зліва на Z, згідно з (4.6) маємо

$$E = Z, \quad U = Z\hat{A} = \begin{bmatrix} -T_1A & T_2C \\ -T_2A & -T_1A - T_2B \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}.$$

У випадку, коли матриця C невироджена, можна покласти $T_1 = 0$ і $T_2 = C^{-1}$. Тоді

$$E = \hat{B}^{-1}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}B \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1} \end{bmatrix}.$$

Теорема 4.3. *Нехай (U, T) — максимальна ліва власна пара квадратичного пучка матриць $F(\lambda)$. Тоді диференціальна система (4.3) асимптотично стійка в тому і лише в тому випадку, коли існують матриці $X = X^* > 0$ і $Y = Y^* > 0$, що задовольняють рівняння*

$$U^*X + XU = -Y. \tag{4.8}$$

При цьому функція Ляпунова визначається у вигляді

$$v(y) = y^*R^*XRy, \quad R = [TB + UTC, TC], \quad y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

і на нетривіальних розв'язках системи задовольняє співвідношення

$$v(y) > 0, \quad \frac{dv(y)}{dt} = -y^*R^*YRy < 0.$$

Доведення. Згідно з (4.5) і (4.6) маємо систему

$$R\dot{y} = URy.$$

Функцію Ляпунова будемо шукати у вигляді квадратичної форми (4.9), де X — розв'язок рівняння (4.8). Оскільки на нетривіальних розв'язках системи $Ry \neq 0$ [21], то похідна в силу системи від'ємна лише тоді, коли $Y > 0$. При цьому $v(y) > 0$, якщо $X > 0$.

Теорема доведена.

Застосування теореми 4.3 (як критерія асимптотичної стійкості системи (4.3)) зводиться до знаходження максимальної власної пари квадратичного пучка матриць і розв'язання рівняння Ляпунова (4.8).

Приклад 4.1. Розглянемо механічну систему (4.3) з матричними коефіцієнтами

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Їй відповідає матричний квадратичний пучок

$$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 8 & \lambda + 1 \\ -4\lambda - 9 & 0.1\lambda^2 + \lambda + 1 \end{bmatrix},$$

спектр якого $\sigma(F) = \{-4.17628,\ -3.3778 \pm 5.16727i,\ -1.06812\}$. Використовуючи в системі MATHCAD конструкцію "Given ... Find", знайдено максимальну власну пару цього пучка

$$U = \begin{bmatrix} -1.193 & 1.088 & -0.044 & -0.387 \\ 0.922 & -3.149 & 0.985 & -0.023 \\ 0.029 & 0.567 & -3.184 & 0.81 \\ -0.172 & 0.122 & 0.939 & -1.515 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0.354 & 0.326 \\ 0.13 & 0.759 \\ 0.441 & 0.252 \\ 0.633 & 1.04 \end{bmatrix}.$$

З рівняння (4.8) знайдемо

$$X = \begin{bmatrix} 0.8969 & 0.3052 & 0.0417 & -0.1525 \\ 0.3052 & 0.3617 & 0.0985 & -0.0002 \\ 0.0417 & 0.0985 & 0.3244 & 0.1945 \\ -0.1525 & -0.0002 & 0.1945 & 0.6649 \end{bmatrix} > 0,$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.5223 & 0.0081 & -0.0023 & 0.0164 \\ 0.0081 & 1.5019 & 0.0284 & 0.0201 \\ -0.0023 & 0.0284 & 1.5099 & 0.0390 \\ 0.0164 & 0.0201 & 0.0390 & 1.5815 \end{bmatrix} > 0.$$

Отже, виконуються умови теореми 4.3 і система (4.3) є асимптотично стійкою.

4.3. Коефіцієнтні умови стійкості механічних систем

Розглянемо диференціальну систему (4.3) з невиродженою матрицею C при старших похідних. За теоремою Ляпунова вона є стійкою тоді і тільки тоді, коли існують матриці $X_1 = X_1^* > 0$, $X_2 = X_2^* > 0$ і V, що задовольняють системі нерівностей

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad -\hat{A}^* X \hat{B} - \hat{B}^* X \hat{A} = Y \geq 0, \tag{4.10}$$

де блочні матриці $\hat{A}$ і $\hat{B}$ визначені в (4.5), а матриця Y має наступну структуру

$$Y = \begin{bmatrix} A^*V^* + VA & -X_1 + A^*X_2C + VB \\ -X_1 + C^*X_2A + B^*V^* & B^*X_2C + C^*X_2B - VC - C^*V^* \end{bmatrix}.$$

Співвідношення (4.10) у випадку $Y > 0$ є критерієм асимптотичної стійкості системи (4.3).

Припустимо, що C є ермітовою додатно визначеною матрицею і покладемо

$$X_1 = \alpha(A + A^*) + \gamma VCV^*, \quad X_2 = (\alpha + \beta)C^{-1},$$

де α, β і γ — скалярні параметри. Тоді співвідношення (4.10) мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \alpha(A + A^*) + \gamma VCV^* & V \\ V^* & (\alpha + \beta)C^{-1} \end{bmatrix} > 0, \tag{4.11}$$

$$\begin{bmatrix} A^*V^* + VA & \beta A^* - \alpha A - \gamma VCV^* + VB \\ \beta A - \alpha A^* - \gamma VCV^* + B^*V^* & (\alpha + \beta)(B + B^*) - VC - CV^* \end{bmatrix} \geq 0. \tag{4.12}$$

Теорема 4.4. *Нехай існують матриця* $V \in C^{n\times n}$ *і скаляри* $\alpha > 0$, $\beta > -\alpha$ *і* $\gamma > 1/(\alpha+\beta)$, *що задовольняють матричну нерівність (4.12), і виконуються співвідношення*

$$A + A^* \geq 0, \quad C = C^* > 0, \quad \operatorname{rank}[A + A^*, V] = n. \tag{4.13}$$

Тоді диференціальна система (4.3) стійка за Ляпуновим. Якщо до того ж в (4.12) виконується строга нерівність, то система (4.3) асимптотично стійка.

Доведення. Застосуємо відомий критерій додатної визначеності блочної матриці:

$$\begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 > 0, \quad X_1 > V X_2^{-1} V^*. \tag{4.14}$$

Тоді матрична нерівність (4.11) зводиться до наступних умов

$$C > 0, \quad \alpha(A + A^*) + \gamma_1 V C V^* = L \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \gamma_1 C \end{bmatrix} L^* > 0,$$

де $\gamma_1 = \gamma - 1/(\alpha + \beta)$, $L = [A_1, V]$, A_1 — матриця з розкладу невід'ємно визначеної матриці $A + A^* = A_1 A_1^*$. Рангове обмеження в (4.13) еквівалентне рівності $\operatorname{rank} L = n$, яка забезпечує виконання матричної нерівності (4.11). Зокрема, дане обмеження буде виконуватись, якщо $A + A^* > 0$ або V є невиродженою матрицею.

Отже, виконуються умови (4.10) і система (4.3) стійка. Якщо разом з (4.13) вимагати виконання строгої нерівності (4.12), то має місце асимптотична стійкість системи. При цьому матриці A і V повинні бути невиродженими.

Теорема доведена.

Теорема 4.5. *Нехай* $C = C^* > 0$ *та існують матриці* H *і* $U \in C^{n\times n}$, *що задовольняють систему матричних нерівностей*

$$H = H^* > 0, \quad U + U^* > 0, \quad (L^* - H)W(L - H) \leq E, \tag{4.15}$$

де

$$W = (U + U^*)^{-1}, \quad L = A + U^* C^{-1}(B - U),$$

$$E = A^*C^{-1}(B-U) + (B-U)^*C^{-1}A.$$

Тоді диференціальна система (4.3) стійка за Ляпуновим. Якщо до того ж в (4.15) остання матрична нерівність є строгою, то система (4.3) асимптотично стійка.

Доведення. В нерівностях (4.10) покладемо

$$X_1 = VX_2^{-1}V^* + H, \quad X_2 = C^{-1}, \quad V = B^*X_2 - U^*C^{-1} = (B-U)^*C^{-1}.$$

Тоді співвідношення (4.10) мають вигляд

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} (B-U)^*C^{-1}(B-U) + H & (B-U)^*C^{-1} \\ C^{-1}(B-U) & C^{-1} \end{bmatrix} > 0, \\ \begin{bmatrix} E & L^* - H \\ L - H & W^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Застосуємо критерій додатної визначеності блочної матриці (4.14) і його узагальнення у випадку невиродженого блока X_2:

$$\begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 > 0, \quad X_1 \geq VX_2^{-1}V^*.$$

Тоді, як неважко бачити, матричні нерівності (4.16) зводяться до вигляду (4.15).

Отже, виконуються умови (4.10) і система (4.3) стійка. Якщо в (4.16) всі нерівності строгі, то має місце асимптотична стійкість системи.

Теорема доведена.

Наслідок 4.1. *При умовах теореми 4.5 функція Ляпунова для системи (4.3) визначається у вигляді*

$$v(x,\dot{x}) = x^*[(B-U)^*C^{-1}(B-U) + H]x + x^*(B-U)^*\dot{x} + \dot{x}^*(B-U)x + \dot{x}^*C\dot{x}.$$

Отриманий результат випливає із доведення теореми 4.5. Функцію Ляпунова для еквівалентної системи (4.5) можна побудувати у вигляді

$$v(y) = y^*\hat{B}^*X\hat{B}y,$$

яка на її нетривіальних розв'язках задовольняє співвідношення

$$v(y) > 0, \quad \dot{v}(y) = -y^* Y y \le 0.$$

Наслідок 4.2. *Нехай $C = C^* > 0$ і для деякої матриці $H = H^* > 0$ виконується одна із наступних систем співвідношень:*

$$B + B^* > 0, \quad A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \ge 0, \quad T_\delta(H) \ge 0, \quad 0 \le \delta \le \frac{1}{4}; \tag{4.17}$$

$$B + B^* > 0, \quad A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \le 0, \quad T_\delta(H) \ge 0, \quad \delta \le 0; \tag{4.18}$$

$$B + B^* < 0, \quad A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \ge 0, \quad T_\delta(H) \le 0, \quad \delta < 0; \tag{4.19}$$

де

$$T_\delta(H) = \delta(A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A) -$$

$$-(A^* + \delta B^*C^{-1}B - H)(B + B^*)^{-1}(A + \delta B^*C^{-1}B - H).$$

Тоді система (4.3) стійка.

Доведення. Покладемо в теоремі 4.5 $U = \theta B$, де $\theta \ne 0$. Тоді умови (4.15) перепишемо у вигляді

$$H = H^* > 0, \quad \theta(B + B^*) > 0, \quad (1 - \theta)(A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\theta}[A^* + \theta(1-\theta)B^*C^{-1}B - H](B + B^*)^{-1}[A + \theta(1-\theta)B^*C^{-1}B - H]. \tag{4.20}$$

Позначимо $\delta = \theta(1-\theta)$ і розглянемо випадки, при яких система (4.20) сумісна:

1) якщо $B + B^* > 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \ge 0$, то необхідно виконання нерівності $0 < \theta \le 1$, тобто $0 \le \delta \le \frac{1}{4}$;

2) якщо $B + B^* > 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \le 0$, то необхідно виконання нерівності $\theta \ge 1$, тобто $\delta \le 0$;

3) якщо $B + B^* > 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \ge 0$, то необхідно виконання нерівності $\theta < 0$, тобто $\delta < 0$.

Якщо $B + B^* < 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \le 0$, то необхідно виконання нерівностей $\theta < 0$ і $\theta \ge 1$, що не можливо.

Отже, у випадках 1)–3) приходимо до умов (4.17)–(4.19), виконання яких забезпечує стійкість системи (4.3).

Теорема доведена.

Зауваження 4.2. У випадку $\theta = 1$ отримаємо відому систему матричних нерівностей

$$C = C^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad A = A^* > 0,$$

яка забезпечує стійкість системі (4.3).

Теорема 4.6. *Нехай для деякого $\xi \in R^1$ виконуються умови*

$$\xi(A + A^*) \geq 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0, \tag{4.21}$$

$$\Gamma_\xi = \xi^2 P + \xi R + Q \geq 0 \ (> \ 0), \tag{4.22}$$

де

$$P = -(A + A^*)(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$

$$R = 2(A + A^*)(B + B^*)^{-1}A + 2A^*(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$

$$Q = A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - 4A^*(B + B^*)^{-1}A.$$

Тоді диференціальна система (4.3) стійка (асимптотично стійка).

Доведення. В умовах (4.17) покладемо

$$H = \frac{\xi}{2}(A + A^*) + \delta B^*C^{-1}B > 0, \quad \delta = \frac{1}{4}, \quad \xi(A + A^*) \geq 0.$$

Тоді

$$\Gamma_\xi = 4T_\delta(H) = A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A -$$

$$-[2A^* - \xi(A + A^*)](B + B^*)^{-1}[2A - \xi(A + A^*)] = \xi^2 P + \xi R + Q \geq 0.$$

Отже, згідно наслідку 4.2, система (4.3) при умовах (4.21) стійка (асимптотично стійка), якщо в (4.22) виконується нерівність $\geq$ ($>$).

Теорема доведена.

Зауважимо, що матричну нерівність $\Gamma_\xi > 0$ завжди можна задовольнити шляхом вибору параметра $\xi > 0$, якщо $Q > 0$.

Умови стійкості, представлені в теоремі 4.6, узагальнюють аналогічні результати робіт [27] і [83].

Наслідок 4.3. *При умовах теореми 4.6 функція Ляпунова для системи (4.3) визначається у вигляді*

$$v(x,\dot{x}) = x^*[\xi(A+A^*) + B^*C^{-1}B]x + x^*B^*\dot{x} + \dot{x}^*Bx + 2\dot{x}^*C\dot{x}, \qquad (4.23)$$

для якої виконуються нерівності (4.21) і (4.22).

Структура функції Ляпунова (4.23) випливає з теореми 4.6 при

$$H = \frac{\xi}{2}(A+A^*) + \delta B^*C^{-1}B > 0, \quad U = \theta B, \quad \delta = \frac{1}{4}.$$

Наслідок 4.4. *Якщо $C = C^* > 0$, $B + B^* > 0$ і виконується одна із наступних умов:*

1) $Q \geq 0 \ (> 0)$;

2) $A + A^* \geq 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - (A^* - A)(B+B^*)^{-1}(A - A^*) \geq 0\,(> 0)$;

3) $A + A^* \geq 0$, $\quad A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - 4A(B+B^*)^{-1}A^* \geq 0 \ (> 0)$;

4) $A + A^* \leq 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - (3A^* + A)(B+B^*)^{-1}(3A + A^*) \geq 0\,(> 0)$;

5) $\lambda_{min}(Q) \leq 0, \quad \lambda_{min}(R) > 2\sqrt{\lambda_{min}(P)\,\lambda_{min}(Q)}$,

де $\lambda_{min}(\cdot)$ — найменше власне значення ермітової матриці, то диференціальна система (4.3) стійка (асимптотично стійка).

Останнє твердження з умовами 1)–4) випливає із теореми 4.6 відповідно при $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\xi = 2$ і $\xi = -1$. Матрична нерівність $\Gamma_\xi > 0$ при деякому ξ є наслідком умов 5), оскільки для довільного вектора $x \in C^n$ з нормою 1 виконується нерівність

$$x^*\Gamma_\xi x \geq \lambda_{min}(P)\,\xi^2 + \lambda_{min}(R)\,\xi + \lambda_{min}(Q),$$

де, згідно з (4.21), $\lambda_{min}(P) \leq 0$.

Відомо [80] що, якщо виконуються умови

$$C = C^T > 0, \quad B + B^T > 0, \quad A + A^T = 0, \quad \gamma < \sqrt{\alpha}\beta, \qquad (4.24)$$

де $\alpha = \lambda_{min}(C^{-1/2}(A + A^T)C^{-1/2}) > 0$, $\beta = \lambda_{min}(C^{-1/2}BC^{-1/2}) > 0$, $\gamma \in R$ — норма матриці $C^{-1/2}(A - A^T)C^{-1/2}$, то диференціальна система (4.3) асимптотично стійка.

При наступних значеннях матричних коефіцієнтів

$$A = \begin{bmatrix} 8 & s \\ -s & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix},$$

де s — дійсний параметр, із врахуванням умов (4.24), знайдено інтервал стійкості системи (4.3) [80]: $|s| < 3.078$. Для порівняння, скориставшись умовою 2) наслідку 4.4, значення s знаходиться в інтервалі [-3.733, 3.688], що є значно кращим результатом. Максимальне значення $s = 3.920$, при якому система втрачає стійкість, можна знайти шляхом обчислення спектра відповідного квадратичного пучка матриць $F(\lambda)$.

Застосуємо результати підрозділу 4.1. Якщо $A + A^*$ — невироджена матриця, то в умовах теореми 4.6, що забезпечують стійкість (асимптотичну стійкість) системі (4.3), квадратичний пучок $-\Gamma_\xi$ є майже гіперболічним (гіперболічним). Впорядкуємо власні значення γ_i цього пучка:

$$\gamma_1 \leq \ldots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \ldots \leq \gamma_{2n}.$$

Наслідок 4.5. *Нехай виконуються умови*

$$A + A^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0.$$

Тоді система (4.3) стійка (асимптотично стійка), якщо

$$\Gamma_\xi \geq 0, \quad 0 \leq \gamma_n \leq \xi \leq \gamma_{n+1} \quad (\Gamma_\xi > 0, \quad 0 \leq \gamma_n < \xi < \gamma_{n+1}).$$

Наслідок 4.6. *Нехай виконуються умови*

$$A + A^* < 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0.$$

Тоді система (4.3) стійка (асимптотично стійка), якщо

$$\Gamma_\xi \geq 0, \quad \gamma_n \leq \xi \leq \gamma_{n+1} \leq 0 \quad (\Gamma_\xi > 0, \quad \gamma_n < \xi < \gamma_{n+1} \leq 0).$$

Розглянемо диференціальну систему

$$\ddot{x} + (D + hG)\dot{x} + (K + S)x = 0, \tag{4.25}$$

де $D = D^*$ — матриця демпфування, а $G = -G^*$, $K = K^*$ і $S = -S^*$ — матриці відповідно гіроскопічних, консервативних та циркуляторних сил, h — дійсний параметр.

Наслідок 4.7. *Якщо виконуються умови*

$$det\, G \neq 0, \quad D > 0, \quad G^*K + KG + G^*S + S^*G > 0,$$

то при достатньо великому $h > 0$ система (4.25) асимптотично стійка.

Дійсно, якщо покласти

$$C = I, \;\; U = D + hG + h^{-1}C_1^*, \;\; H = G^*G - h^{-2}C_1C_1^*,$$

де $C_1 = (K - S)G^{-1} + G$, то при достатньо великому $h > 0$ виконуються умови (4.15) теореми 4.5.

Наслідок 4.8. *Якщо $D > 0$, $det\, G \neq 0$ і матриці*

$$K, \quad G^*K^{-1}S + S^*K^{-1}G$$

одночасно є додатно або від'ємно визначеними, то при достатньо великому $h > 0$ система (4.25) асимптотично стійка.

Доведення випливає з теореми 4.5, якщо покласти

$$C = I, \quad U = D + hG + h^{-1}C_2,$$

$$H = \pm G^*K^{-1}G - h^{-2}C_2C_2^*, \quad C_2 = (K - S)G^{-1} \pm GK^{-1}.$$

В наслідках 4.7 і 4.8 враховується умова $det\, G \neq 0$, яка можлива лише для систем з парною кількістю ступенів вільності. Твердження наслідків 4.7 та 4.8 у випадку дійсних матричних коефіцієнтів встановлені в роботі [84] іншим способом.

Побудовані в цьому підрозділі коефіцієнтні умови стійкості системи (4.3) можна застосовувати для більш складних фізичних моделей типу (1.9), коли елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$ є неперервними функціями часу $t \geq 0$.

4.4. Методи матричних нерівностей в задачі стабілізації

Нехай модель керованої системи має вигляд

$$Ax + B\dot{x} + C\ddot{x} = Fu, \tag{4.26}$$

де x — n-вектор стану системи, u — l-вектор керування, A, B, C і F — відомі матриці відповідних розмірів. Будемо вважати, що матриця C невироджена, а матриця F має повний ранг $l \leq n$.

Задача стабілізації системи полягає в тому, щоб знайти матричні коефіцієнти L_0 і L_1 зворотного зв'язку

$$u = -L_0 x - L_1 \dot{x}, \tag{4.27}$$

що забезпечує асимптотичну стійкість замкнутій системі

$$(A + FL_0)x + (B + FL_1)\dot{x} + C\ddot{x} = 0.$$

Перепишемо систему (4.26) у вигляді

$$E\dot{y} = My + Ru, \quad u = -Ly, \quad y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

де

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}, \; L = [L_0, L_1].$$

Система (4.28) буде керованою, якщо виконується умова Калмана [71]

$$\operatorname{rank} [\hat{R}, \hat{M}\hat{R}, \ldots, \hat{M}^{2n-1}\hat{R}] = 2n, \quad \hat{M} = E^{-1}M, \quad \hat{R} = E^{-1}R,$$

або умова Сімона-Міттера [108]

$$\operatorname{rank} [E\lambda - M, R] \equiv 2n, \quad \lambda \in \sigma(E\lambda - M).$$

Застосовуючи блочні елементарні перетворення матриці, отримаємо наступні умови керованості

$$\operatorname{rank} [F(\lambda), F] \equiv n, \quad \lambda \in \sigma(F(\lambda)).$$

Якщо матриця F квадратна і невироджена, то система (4.26) завжди буде керованою.

За теоремою Ляпунова система (4.28) асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці $X = X^* > 0$ виконується нерівність

$$-(M - RL)XE^* - EX(M - RL)^* > 0.$$

Побудуємо матрицю зворотного зв'язку у вигляді

$$L = \tau\Psi R^* E^{-1^*} X^{-1}. \tag{4.29}$$

Для знаходження матриць Ψ, X і скаляра τ маємо нерівність

$$MXE^* + EXM^* < \tau R(\Psi + \Psi^*)R^*. \tag{4.30}$$

Останню нерівність можна задовольнити шляхом вибору параметрів X, Ψ і τ лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$R^{\perp^*} Y R^{\perp} < 0, \quad MXE^* + EXM^* = Y. \tag{4.31}$$

де $R^{\perp}$ — ортогональне доповнення матриці R, тобто матриця розмірів $2n \times (2n - l)$, що задовольняє умови

$$R^* R^{\perp} = 0, \quad \det T \neq 0, \quad T = [R, R^{\perp}].$$

Дійсно, помноживши нерівність (4.30) зліва і справа відповідно на T^* і T, отримаємо еквівалентну нерівність у блочному вигляді

$$\begin{bmatrix} -R^*YR + \tau R^*R(\Psi + \Psi^*)R^*R & -R^*YR^{\perp} \\ -R^{\perp^*}YR & -R^{\perp^*}YR^{\perp} \end{bmatrix} > 0. \tag{4.32}$$

Другий діагональний блок повинен бути додатно визначеним, тобто необхідна нерівність (4.31). Навпаки, якщо виконується нерівність (4.31), то, згідно з (4.14), блочна нерівність (4.32) зводиться до вигляду

$$\Phi(\tau) = \tau R^*R(\Psi + \Psi^*)R^*R - R^*YR + R^*YR^{\perp}(R^{\perp^*}YR^{\perp})^{-1}R^{\perp^*}YR > 0.$$

Якщо, наприклад, $\Psi + \Psi^* > 0$, то останнє співвідношення виконується при $\tau > \lambda_{max}(\Phi)$, де $\lambda_{max}(\Phi)$ — максимальне власне значення лінійного пучка матриць $\Phi(\lambda)$.

Якщо $l < n$, то, використовуючи блочну структуру матриць E, M і F, покладемо

$$R^{\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F^{\perp} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} P & V \\ V^* & Q \end{bmatrix},$$

де $F^{\perp}$ — ортогональне доповнення матриці F. Тоді матриця Y в (4.31) має вигляд

$$Y = \begin{bmatrix} V + V^* & QC^* - PA^* - VB^* \\ CQ - AP - BV^* & -AVC^* - CV^*A^* - BQC^* - CQB^* \end{bmatrix}$$

і при побудові матриці (4.29) необхідно знайти лише другу блочну стрічку оберненої матриці в формулі Фробеніуса

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} + P^{-1}V\Delta^{-1}V^*P^{-1} & -P^{-1}V\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}V^*P^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix},$$

де $\Delta = Q - V^*P^{-1}V$. Знову застосуємо критерій (4.14) до матриці $-R^{\perp^*}YR^{\perp}$ і у випадку $l < n$ сформулюємо наступний результат.

Теорема 4.7. *Нехай виконується система матричних нерівностей*

$$\Psi + \Psi^* > 0, \quad V + V^* < 0, \quad P = P^* > 0, \quad \Delta > 0, \tag{4.33}$$

$$\begin{gathered} F^{\perp^*}\big[BQC^* + CQB^* + AVC^* + CV^*A^* + \\ + (AP - CQ + BV^*)(V + V^*)^{-1}(PA^* - QC^* + VB^*)\big]F^{\perp} > 0. \end{gathered} \tag{4.34}$$

Тоді керування (4.27) з матрицями коефіцієнтів

$$L_0 = -L_1V^*P^{-1}, \quad L_1 = \tau\Psi F^* C^{-1^*}\Delta^{-1} \tag{4.35}$$

при $\tau > \lambda_{max}(\Phi)$ забезпечує асимптотичну стійкість системі (4.26).

Згідно з теоремою 4.7 можна побудувати наступний алгоритм стабілізації системи (4.26):

1) вибрати довільні матриці Ψ, V і P, що задовольняють умови (4.33);

2) обчислити матрицю ортогонального доповнення $F^{\perp}$;

3) знайти матрицю $Q > V^* P^{-1} V$, що задовольняє нерівність (4.34);

4) обчислити максимальне власне значення $\lambda_{max}(\Phi)$ пучка $\Phi(\lambda)$;

5) обчислити матриці зворотного зв'язку (4.35).

Зауваження 4.3. Якщо $l = n$, то можна покласти $R^{\perp} = [I, 0]^*$. Тоді ${R^{\perp}}^* Y R^{\perp} = V + V^*$ і твердження теореми 4.7 виконується, якщо з неї виключити нерівність (4.34). В цьому випадку спрощується також наведений алгоритм: виключається п. 2), а в п. 3) достатньо лише вибрати матрицю $Q > V^* P^{-1} V$.

Зауваження 4.4. Побудований алгоритм керування гарантує асимптотичну стійкість замкнутій системі, якщо параметр $\tau > \lambda_{max}(\Phi)$. Якщо зафіксувати значення всіх інших параметрів, то існує таке $\tau_0 \leq \lambda_{max}(\Phi)$, що при $\tau = \tau_0$ система втрачає стійкість, а при $\tau > \tau_0$ є асимптотично стійкою.

Зауваження 4.5. Запропонований алгоритм стабілізації може бути застосований до деякого класу нестаціонарних моделей керованих систем типу (4.26).

4.5. Моделі обертальних механічних систем

При моделюванні обертальних рухів та орієнтації систем абсолютно твердих і деформівних тіл використовуються векторно-матричні диференціальні рівняння першого та другого порядків (див., наприклад, [5, 109–111]). Ми будемо розглядати обертальні механічні системи типу роторів та моделі обертання балки.

Вільні коливання широкого класу роторних систем описуються диференціальними рівняннями другого порядку

$$\begin{bmatrix} K & S \\ -S & K \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} D & G \\ -G & D \end{bmatrix} \dot{y} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \ddot{y} = 0, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{4.36}$$

де $M = M^T > 0$ — матриця мас, $D = D^T \geq 0$ — матриця демпфування, $G = G^T \geq 0$ — гіроскопічна матриця, $K = K^T > 0$ — матриця жорсткості, $S = S^T \geq 0$ — циркуляторна матриця, $y \in R^{2n}$ — вектор узагальнених координат [81, 83]. Дійсна вектор-функція $y(t)$ є розв'язком системи (4.36) тоді і тільки тоді, коли комплексна вектор-функція $x(t) = y_1(t) - iy_2(t)$ задовольняє диференціальну систему

$$(K + iS)x + (D + iG)\dot{x} + M\ddot{x} = 0, \quad x \in C^n. \tag{4.37}$$

При дослідженні системи (4.37) будемо враховувати наступні співвідношення

$$D = D_0 + D_1, \quad G = \omega G_0, \quad S = \omega D_0,$$

де D_0 і D_1 — складові внутрішнього та зовнішнього демпфувань, ω — кутова швидкість обертання ротора. Одна з важливих задач полягає у знаходженні критичної кутової швидкості ω_c такої, що при $0 \leq \omega < \omega_c$ система (4.37) асимптотично стійка, а при $\omega = \omega_c$ дана властивість системи втрачається.

Враховуючи припущення, перепишемо умови (4.21) і (4.22) теореми 4.6 у вигляді

$$K \geq 0, \quad D > 0, \quad M > 0, \tag{4.38}$$

$$\Gamma_\xi(\omega) = \omega^2 P_\xi + \omega R_\xi + Q_\xi > 0, \quad \xi \geq 0, \tag{4.39}$$

де

$$P_\xi = D_0 M^{-1} G_0 + G_0 M^{-1} D_0 - 2 D_0 D^{-1} D_0,$$

$$R_\xi = i \left[D M^{-1} D_0 - D_0 M^{-1} D + K M^{-1} G_0 - G_0 M^{-1} K + \right.$$

$$\left. + 2(\xi - 1)(K D^{-1} D_0 - D_0 D^{-1} K) \right],$$

$$Q_\xi = K M^{-1} D + D M^{-1} K - 2(\xi - 1)^2 K D^{-1} K.$$

Співвідношення (4.38), (4.39) і теорема 4.6 дають можливість обчислювати критичне значення ω_c. Якщо $Q_\xi > 0$, то ω_c є найменше дійсне додатне власне значення квадратичного пучка $\Gamma_\xi(\omega)$ з ермітовими матричними коефіцієнтами.

Приклад 4.2. Найпростіша модель роторної системи має вигляд

$$(k+i\,\omega\,p)\,x+(d+i\,\omega\,g)\,\dot{x}+m\,\ddot{x}=0, \tag{4.40}$$

де x описує зміщення центра маси m в площині, перпендикулярній невагомому стержню з коефіцієнтом пружності $k>0$, ω — кутова швидкість обертання ротора, що породжує гіроскопічну силу ωg, p і q — відповідно внутрішнє та зовнішнє демпфування, $d=p+q>0$. Ця модель описує так званий ротор Лаваля.

Достатні умови асимптотичної стійкості системи (4.40) згідно з (4.38) і (4.39) мають вигляд

$$p\,(g\,d-p\,m)\,\omega^2+k\,d^2>(\xi-1)^2 m\,k^2, \quad \xi>0.$$

Отже, критичне значення ω_c задовольняє умову

$$\omega_c^2=\frac{k\,[d^2-(\xi-1)^2 m\,k]}{p\,(p\,m-g\,d)}>0.$$

Якщо параметр ξ належить інтервалу

$$\max\left\{0,1-\frac{d}{\sqrt{m\,k}}\right\}\le\xi\le 1+\frac{d}{\sqrt{m\,k}},$$

то у випадку $p\,m\le g\,d$ система асимптотично стійка при довільній кутовій швидкості ω. Найбільш слабкі обмеження на коефіцієнти системи у наведених умовах асимптотичної стійкості відповідають значенню параметра $\xi=1$.

Приклад 4.3. Розглянемо роторну систему (4.37) з матричними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} M&=\begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}, \qquad D=\begin{bmatrix} d & -p\\ -p & p+h\end{bmatrix},\\ K&=\begin{bmatrix} k & -k\\ -k & k+r\end{bmatrix}, \quad S=\begin{bmatrix} \omega\,p & -\omega\,p\\ -\omega\,p & \omega\,p\end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

де $x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}$, x_1 і x_2 характеризують зміщення центрів відповідно головної маси m і додаткової маси s, h і r — відповідно демпфування та коефіцієнт пружності на опорах. Значення інших параметрів таке ж саме, як і в прикладі 4.2, причому, гіроскопічні сили не враховуються (G=0). Ця модель ротора схематично зображена на рис. 4.1.

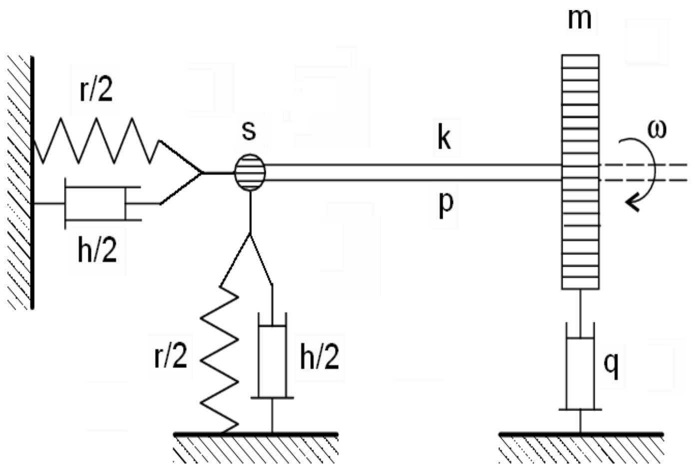


Рис. 4.1. Ротор Лаваля.

Для встановлення достатніх умов асимптотичної стійкості системи скористаємось теоремою 4.6 та її наслідком 4.4. Умови (4.38) і (4.39) зводяться до вигляду

$$d\,h + p\,q > 0, \quad a_0\,\omega^2 + a_1(\xi) > 0, \quad b_0(\xi)\,\omega^2 + b_1(\xi) > 0, \tag{4.42}$$

де

$$a_0 = -m\,s\,p^2(h+q),$$

$$a_1(\xi) = k\,(d\,h + p\,q)(m\,p + d\,s) - (\xi-1)^2\,m\,s\,k^2(h+q),$$

$$b_0(\xi) = p^2\,[2\,p\,s\,m\,h\,q^2 + 2\,p\,q\,s\,m\,h^2 + 2\,m\,s\,q^2h^2 - 4\,q\,s\,r\,h\,m^2 - 4\,s\,r\,m^2h^2 -$$

$$-d\,m^2h^3 - p\,s^2q^3 - h\,s^2q^3 - p\,h\,q^2s^2 - p\,q\,m^2h^2 +$$

$$+4(\xi-1)\,s\,m\,q\,r\,(s\,q - m\,h) + 4(\xi-1)^2\,m^2s^2r^2],$$

$$b_1(\xi) = (d\,h + p\,q)(2\,p\,k\,s\,m\,r\,q + 2\,p\,m^2k\,r\,h + 2\,q\,k^2s\,m\,h +$$

$$+4\,d\,k\,s\,m\,r\,h - p^2m^2r^2 - q^2k^2s^2 - m^2k^2h^2) -$$

$$-4(\xi-1)^2\,m\,s\,k\,r\,(s\,k\,q^2 + s\,r\,d^2 + m\,k\,h^2 + m\,r\,p^2).$$

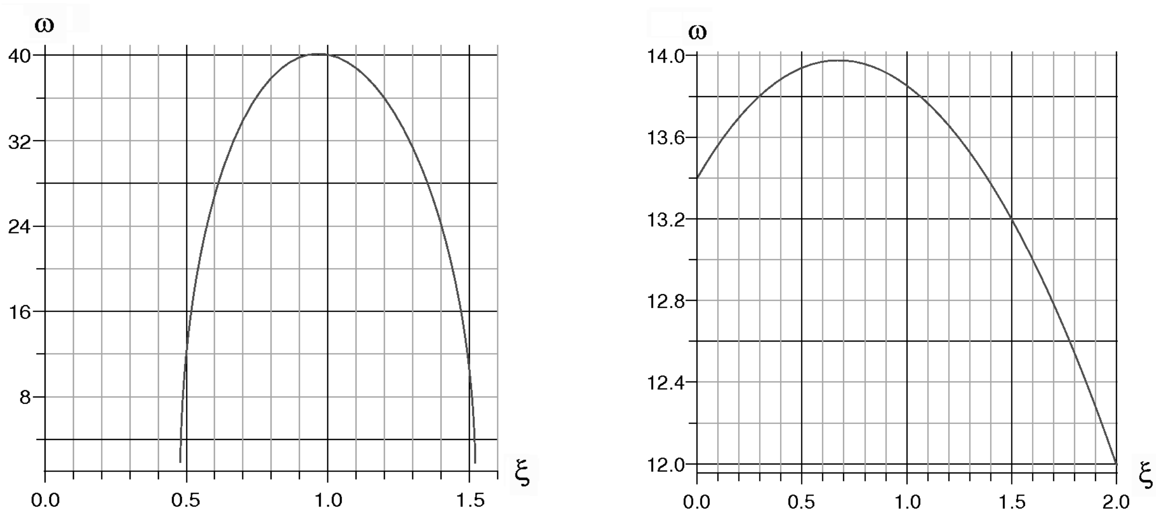
Умови (4.42) описують область асимптотичної стійкості в просторі параметрів системи (4.36), (4.41). Вони дають можливість аналітично оцінити критичну кутову швидкість обертання ротора ω_c.

Чисельні розрахунки проводились при наступних значеннях коефіцієнтів

$$(a): \ \ m = 1, \ \ s = 0.1, \ \ p = 1, \ \ q = 5, \ \ h = 10, \ \ k = 100, \ \ r = 400;$$

$$(b): \ \ m = 0.5, \ \ s = 0.1, \ \ p = 1, \ \ q = 5, \ \ h = 10, \ \ k = 10, \ \ r = 50.$$

На рис. 4.2 зображена відповідна залежність від параметра ξ найменшої кутової швидкості $\omega = \omega_0$, при якій порушуються умови (4.42).



(a) (b)

Рис. 4.2. Залежність $\omega = \omega_0$ від ξ.

У випадку (a) її максимальне значення $\omega_{max} = 40.06$ досягається в околі точки $\xi = 1$. При цьому $\omega_{max} = 0.44\,\omega_c$, де $\omega_c = 92$ — відоме значення критичної кутової швидкості [83]. Випадок (b) демонструє той факт, що максимальне значення ω_{max} може досягатись при $\xi \neq 1$. Це означає, що умови стійкості, представлені теоремою 4.6, узагальнюють і посилюють аналогічний результат роботи [83].

Приклад 4.4. Розглянемо керовану роторну систему, що описується у вигляді (4.26) з матричними коефіцієнтами (див. приклад 4.3)

$$A = \begin{bmatrix} k + ip\omega & -k - ip\omega \\ -k - ip\omega & k + r + ip\omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d & -p \\ -p & p + h \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

У випадку (а) система без керування ($u \equiv 0$) з кутовою швидкістю обертання $\omega = 100$ має спектр

$$\{-66.131 + 46.1i, -44.0177 - 45.6058i, -6.0460 + 9.4055i, 0.1955 - 9.8996i\}$$

і є нестійкою. Встановимо можливість стабілізувати систему за допомогою керування, що впливає лише на рух приєднаної маси s. Для цього покладемо

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l = 1 < n = 2.$$

Скористаємося наведеним вище алгоритмом стабілізації. Систему матричних нерівностей (4.33)-(4.34) задовольняють наступні значення параметрів:

$$\Psi = 1, \quad V = \begin{bmatrix} -2.07423 & 1.238 \\ -1.66407 & -1.16964 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.66732 & 0.31731 \\ 0.31731 & 0.27749 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 50.75747 & 0.034 \\ 0.034 & 111.66241 \end{bmatrix}.$$

Якщо $\tau = \lambda_{max}(\Phi) + 10^{-6}$, де $\lambda_{max}(\Phi) = 18748$, то коефіцієнти зворотного зв'язку набувають вигляд

$$L_0 = \begin{bmatrix} -1.86656 & 32545.8 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 302.73844 & 2226.75121 \end{bmatrix}.$$

При цьому замкнута система має спектр

$$\{-22362.6 + 0.044i, -13.698 + 9.16i, -5.7332 + 0.231i, -1.4807 - 9.435i\}$$

і є асимптотично стійкою. Система втрачає стійкість при $\tau = \tau_0 = 62.05461$ (зауваження 4.4).

На рис. 4.3 і 4.4 зображені процеси зміни модулів $|x_1(t)|$, $|x_2(t)|$, $|\dot{x}_1(t)|$ і $|\dot{x}_2(t)|$ на інтервалі часу [0,2] відповідно для нестійкої розімкнутої та стабілізованої замкнутої роторної системи.

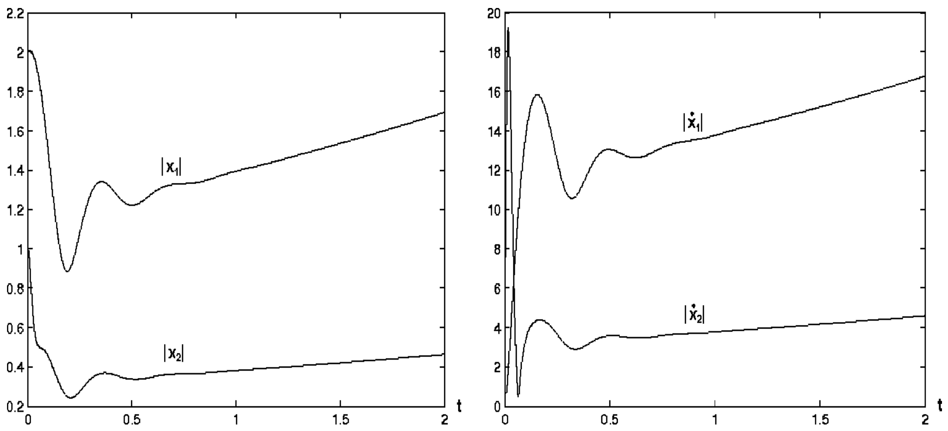


Рис. 4.3. Перехідні процеси розімкнутої роторної системи з початковими умовами $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = 2$.

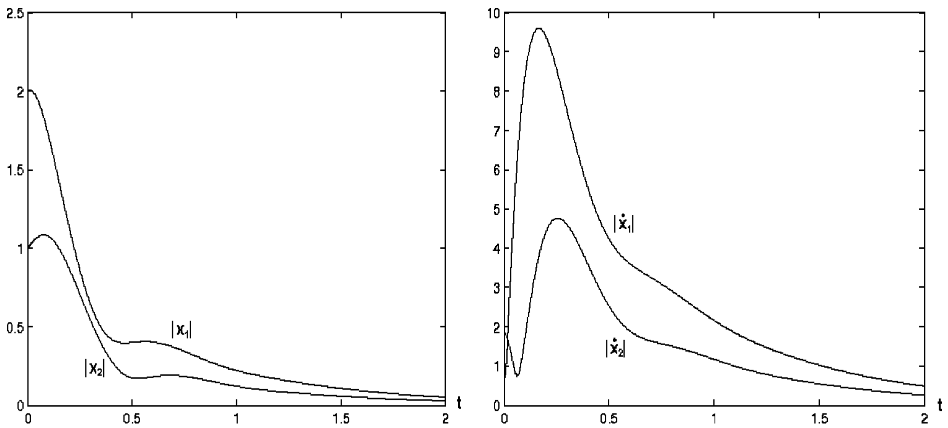


Рис. 4.4. Перехідні процеси замкнутої роторної системи з початковими умовами $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = 2$.

Задача стабілізації системи суттєво спрощується, якщо покласти (зауваження 4.3)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad l = n = 2.$$

В цьому випадку керування може впливати на рух як маси ротора m, так і приєднаної маси s. Наприклад, покладемо

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тоді $\lambda_{max}(\Phi) = 7.455 \times 10^4$ і згідно з (4.35) матриці зворотного зв'язку побудуємо у вигляді

$$L_0 = L_1 = \begin{bmatrix} 7.455 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 7.455 \times 10^5 \end{bmatrix}.$$

Тоді замкнута система має спектр

$$\{-7.455 \times 10^6, -7.455 \times 10^4, -1.001 - 1.433 \times 10^{-3} i, -1.001 - 4.22 \times 10^{-5} i\}$$

і є асимптотично стійкою.

Приклад 4.5. Розглянемо балку довжини l із закріпленим твердим диском маси m, що разом обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω. Введемо дві системи координат. Нерухому систему 0XYZ, де Z — вісь, яка направлена вздовж осі обертання, Y — вісь направлена вертикально вверх та рухому систему 0xyz, де z — вісь, яка співпадає з віссю Z, а x та y — осі, які паралельні до головних осей перерізу балки. Вважаємо, що балка є однорідна з погонною масою m_0 та мало гнучкою з модулем пружності E. Балка має моменти інерції J_x та J_y відносно відповідних осей x і y. Кріплення, балки дозволяють рухи по осі z та забезпечують відновлюючі згинаючі моменти і кутові відхилення з коефіцієнтами пропорційності k_1 і k_2 відповідно при $z = 0$ та $z = l$ (рис. 4.3). Внутрішнє та зовнішнє демпфування характеризують параметри p і q. У нерухомій системі координат 0XYZ положення перерізу балки визначене зміщеннями її пружного центра $X(z,t)$ та $Y(z,t)$. В рухомій системі координат 0xyz положення перерізу балки визначається зміщеннями $x(z,t)$ та $y(z,t)$.

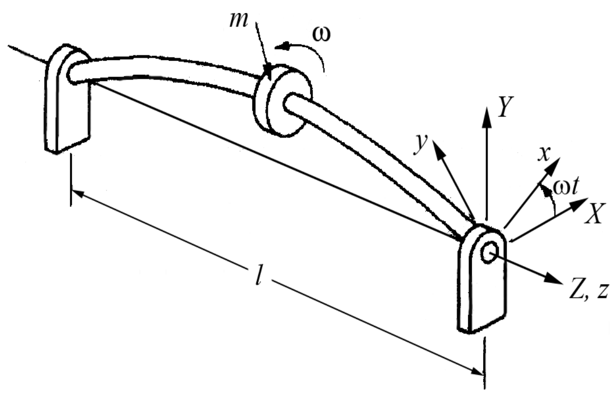


Рис. 4.3. Схематична модель обертання балки.

Зміщення $X(z,t)$, $Y(z,t)$ та $x(z,t)$, $y(z,t)$ зв'язані співвідношеннями

$$X(z,t)=x(z,t)\cos\omega t-y(z,t)\sin\omega t,\quad Y(z,t)=x(z,t)\sin\omega t+y(z,t)\cos\omega t.$$

Наведемо методику побудови моделі обертального руху балки у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на основі виразів для кінетичної та потенціальної енергій [112]

$$T(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l[m_0+m\delta(z-l/2)]\left[\left(\frac{\partial X(z,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial Y(z,t)}{\partial t}\right)^2\right]dz.$$

$$P(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[EJ_x\left(\frac{\partial x^2(z,t)}{\partial z^2}\right)^2+EJ_y\left(\frac{\partial y^2(z,t)}{\partial z^2}\right)^2\right]dz+$$
$$+\frac{k_1}{2}\left[\left(\frac{\partial x(0,t)}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_2}{2}\left[\left(\frac{\partial x(l,t)}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y(l,t)}{\partial z}\right)^2\right].$$

Дисипативна функція Релея має вигляд

$$R(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left\{p\left[\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y(z,t)}{\partial t}\right)^2\right]+q\left[\left(\frac{\partial X(z,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial X(z,t)}{\partial t}\right)^2\right]\right\}dz.$$

Для побудови рівняння руху застосовується принцип Гамільтона

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}\,dt=0,\quad \mathcal{L}=T-P,$$

де $\mathcal{L}$ — функція Лагранжа, наслідком якого є наступні диференціальні рівняння руху в частинних похідних

$$\begin{gathered}(m_0+m\delta(z-l/2))\left(\frac{\partial x^2(z,t)}{\partial t}-2\omega\frac{\partial y(z,t)}{\partial t}-\omega^2x(z,t)\right)+\\+(p+q)\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}+EJ_x\frac{\partial x^{(4)}(z,t)}{\partial z}-q\omega y(z,t)=F_x(z,t),\\(m_0+m\delta(z-l/2))\left(\frac{\partial y^2(z,t)}{\partial t}+2\omega\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}-\omega^2y(z,t)\right)+\\+(p+q)\frac{\partial y(z,t)}{\partial t}+EJ_y\frac{\partial y^{(4)}(z,t)}{\partial z}+q\omega x(z,t)=F_y(z,t)\end{gathered}\tag{4.43}$$

та граничні умови

$$\begin{gathered}x(0,t)=x(l,t)=0,\qquad y(0,t)=y(l,t)=0,\\EJ_x\frac{\partial x^2(0,t)}{\partial z^2}-k_1\frac{\partial x(0,t)}{\partial z}=0,\quad EJ_y\frac{\partial y^2(0,t)}{\partial z^2}-k_1\frac{\partial y(0,t)}{\partial z}=0,\\EJ_x\frac{\partial x^2(l,t)}{\partial z^2}+k_2\frac{\partial x(l,t)}{\partial z}=0,\quad EJ_y\frac{\partial y^2(l,t)}{\partial z^2}+k_2\frac{\partial y(l,t)}{\partial z}=0,\end{gathered}\tag{4.44}$$

де F_x і F_y – компоненти прикладених зовнішніх сил.

Методом Бубнова-Гальоркіна система (4.43), (4.44) зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь. При цьому розв'язки системи мають наступну структуру

$$x(z,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(z) w_i(t), \quad y(z,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(z) w_{n+i}(t), \tag{4.45}$$

з відповідними функціями

$$\phi_i(z) = \sqrt{2} \sin \frac{i\pi}{l} z, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.46}$$

Результатом множення рівнянь (4.43) на $\phi_i(z)$ $(i = 1, \ldots, n)$ і інтегрування на інтервалі $z \in [0; l]$ є система звичайних диференціальних рівнянь в матричній формі [112]

$$(\tilde{K} + \tilde{S}) w(t) + (\tilde{D} + \tilde{G}) \dot{w}(t) + \tilde{M} \ddot{w}(t) = f(t), \tag{4.47}$$

де

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут $\tilde{M}$, $\tilde{D}$ і $\tilde{K}$ є симетричні, а $\tilde{G}$ і $\tilde{S}$ — кососиметричні матриці розмірів $2n \times 2n$. Причому $\tilde{M}$ додатно визначена, а $\tilde{D}$ невід'ємно визначена матриці. f — $2n$-вектор зовнішніх сил, w — вектор узагальнених координат, через компоненти якого представляються відхилення балки (4.45) в точці z по осям x і y рухомої системи координат $0xyz$. Система (4.47) досить точно зберігає динамічні характеристики відповідної системи (4.43).

Матричні коефіцієнти в (4.47) задаються наступними співвідношеннями:

$$M_1 = M_2 = \|m_{ij}\|_1^n, \quad m_{ij} = m_0 \delta_{ij} + 2m \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2},$$

$$K_1 = \|k_{1\,ij}\|_1^n, \; k_{1\,ij} = EJ_x \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 l\delta_{ij} - \omega^2 m_{ij} + 2(k_1 + k_2 \cos i\pi \cos j\pi) \frac{i\pi}{l} \frac{j\pi}{l},$$

$$K_2 = \|k_{2\,ij}\|_1^n, \; k_{2\,ij} = EJ_y \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 l\delta_{ij} - \omega^2 m_{ij} + 2(k_1 + k_2 \cos i\pi \cos j\pi) \frac{i\pi}{l} \frac{j\pi}{l},$$

$$G = -2\omega M, \quad D_1 = D_2 = (p+q)lI_n, \quad S = -q\omega l I_n, \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

де I_n — одинична матриця порядку n, а δ_{ij} — символ Кронекера.

При наступних значеннях параметрів

$$n = 3, \quad m = 1, \quad m_0 = 1, \quad l = 1, \quad EJ_x = \frac{9l^3}{5\pi^2}, \quad EJ_y = \frac{4l^3}{5\pi^2},$$

$$k_1 = k_2 = \frac{l^2}{20}, \quad p = q = \frac{1}{4}, \quad \omega = \sqrt{21.6}\pi$$

система (4.47) має спектр

$$\begin{array}{rr}
-0.2780 + 40.4328i & -0.1588 + 8.7985i \\
-0.2780 - 40.4328i & -0.1588 - 8.7985i \\
-0.3509 + 16.8215i & -0.3729 + 29.3242i \\
-0.3509 - 16.8215i & -0.3729 - 29.3242i \\
0.1878 + 12.3793i & 2.5653 \\
0.1878 - 12.3793i & -2.8195
\end{array}$$

і є нестійкою.

Стабілізуємо систему (4.47) двома способами за допомогою блоку керування $f = Fu$, де F — задана матриця розміру $2n \times k$, а u — k-вектор керування.

Нехай спочатку $k = 2n = 6$ і $F = I_k$. Для знаходження матриць L_0 і L_1 застосуємо наслідок 4.6 до замкнутої системи. Скориставшись математичною системою MATLAB для розв'язання відповідної системи матричних нерівностей, отримаємо коефіцієнти зворотного зв'язку у вигляді

$$L_0 = \begin{bmatrix}
7161.8 & 11.807 & -1985.8 & 123.98 & 32.95 & 173.8 \\
8.2546 & -32.207 & 11.796 & 156.17 & -49.263 & 11.486 \\
-1818.8 & 2.6459 & 545.42 & 21.052 & 1.3361 & -2.3776 \\
5.0872 & 6.334 & 3.9653 & 7005.2 & -17.318 & -3510.9 \\
10.06 & 43.527 & 25.624 & 142.02 & 944.36 & 27.916 \\
8.8179 & 8.2155 & 176.47 & -3507.5 & 0.90685 & 1759.4
\end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 104.87 & 36.831 & 38.941 & -5.2737 & 62.186 & 78.245 \\ -9.8313 & 143.88 & -45.279 & -2.5047 & 132.39 & -16.94 \\ 22.574 & -1.668 & 293.45 & 4.1562 & -0.29465 & 137.3 \\ -36.52 & -1.0003 & 42.167 & 189.9 & 8.1401 & 34.468 \\ 25.649 & -29.341 & -41.769 & 38.766 & 158.77 & -4.2133 \\ -35.06 & -15.407 & 89.468 & -18.9 & -0.097349 & 244.71 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

При цьому замкнута система має спектр

$$\begin{array}{rr} -17.8265 - 36.0686i & -3.2106 - 29.2727i \\ -17.8265 + 36.0686i & -3.2106 + 29.2727i \\ -14.4030 - 21.8319i & -1.2938 - 0.4149i \\ -14.4030 + 21.8319i & -1.2938 + 0.4149i \\ -5.9670 - 8.2660i & -0.0614 - 0.2190i \\ -5.9670 + 8.2660i & -0.0614 + 0.2190i \end{array}$$

і є асимптотично стійкою, а квадратичний пучок Γ_ξ задовольняє наступним умовам гіперболічності:

$$\Gamma_\xi > 0, \quad \xi \in (\gamma_k, \gamma_{k+1}), \quad \gamma_k = 0.9973, \quad \gamma_{k+1} = 1.0217.$$

Для побудови керування у вигляді (4.35) скористаємося наведеним в підрозділі 4.4 алгоритмом стабілізації системи. Покладемо $k = n = 3$, $F = 100\,[0, I_k]$, $\Psi = I_k$ і знайдемо наступні значення невідомих матриць:

$$P = \begin{bmatrix} 1.0579 & 0 & 0.1756 & 0.9024 & 0 & -0.8694 \\ 0 & 3.1145 & 0 & 0 & -1.6408 & 0 \\ 0.1756 & 0 & 0.0963 & 0.0249 & 0 & -0.2817 \\ 0.9024 & 0 & 0.0249 & 21.5773 & 0 & 0.8733 \\ 0 & -1.6408 & 0 & 0 & 27.1955 & 0 \\ -0.8694 & 0 & -0.2817 & 0.8733 & 0 & 25.2229 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 27.1405 & 0 & 14.3194 & 8.1409 & 0 & -13.8400 \\ 0 & 36.5989 & 0 & 0 & -11.8329 & 0 \\ 14.3194 & 0 & 38.2724 & -6.9803 & 0 & -16.4776 \\ 8.1409 & 0 & -6.9803 & 55.2324 & 0 & -12.2951 \\ 0 & -11.8329 & 0 & 0 & 39.5603 & 0 \\ -13.8400 & 0 & -16.4776 & -12.2951 & 0 & 43.4399 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -2.3975 & 0 & -0.5395 & -4.6608 & 0 & 3.9125 \\ 0 & -4.7253 & 0 & 0 & 7.2649 & 0 \\ -0.4111 & 0 & -0.7321 & 0.2411 & 0 & 0.9470 \\ 3.6124 & 0 & -0.2566 & -7.5542 & 0 & 0.0359 \\ 0 & -5.6234 & 0 & 0 & -7.5276 & 0 \\ -3.0346 & 0 & -0.7717 & -0.6221 & 0 & -8.1398 \end{bmatrix}.$$

При $\tau = 2.1509 \cdot 10^3$ коефіцієнти зворотного зв'язку набувають вигляду

$$\begin{aligned} L_0 &= 10^5 \begin{bmatrix} 0.3785 & 0 & -1.0776 & 0.0071 & 0 & 0.0171 \\ 0 & -0.2094 & 0 & 0 & 0.0160 & 0 \\ 0.1433 & 0 & -0.7265 & 0.0092 & 0 & 0.0185 \end{bmatrix}, \\ L_1 &= 10^3 \begin{bmatrix} 1.2011 & 0 & 1.0513 & 6.9626 & 0 & 3.9933 \\ 0 & 0.7097 & 0 & 0 & 9.7976 & 0 \\ 0.8498 & 0 & 1.9481 & 4.6739 & 0 & 5.9416 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

При цьому замкнута система асимптотично стійка і має спектр

$$\begin{array}{rr} -1078846.8571 & -5.9963 + 24.6759i \\ -979753.3415 & -5.9963 - 24.6759i \\ -42082.1829 & -2.0180 + 5.4608i \\ -0.3991 & -2.0180 - 5.4608i \\ -0.3614 & -1.2328 + 3.8221i \\ -0.3132 & -1.2328 - 3.8221i \end{array}$$

На рис. 4.4 зображено графіки функцій $w_j(t)$ та $\dot{w}_j(t)$ для нестійкої розімкнутої системи обертання балки з початковими умовами $w_j(0) = \dot{w}_j(0) = 1$ $(j = 1, 2, 3)$, $w_j(0) = \dot{w}_j(0) = -1$ $(j = 4, 5, 6)$. На рис. 4.5 і 4.6 зображено графіки для стабілізованої замкнутої системи відповідно з матрицями (4.48) і (4.49) з початковими умовами $w_j(0) = \dot{w}_j = 1$ $(j = 1, 2, 3)$, $w_j(0) = \dot{w}_j = -1$ $(j = 4, 5, 6)$.

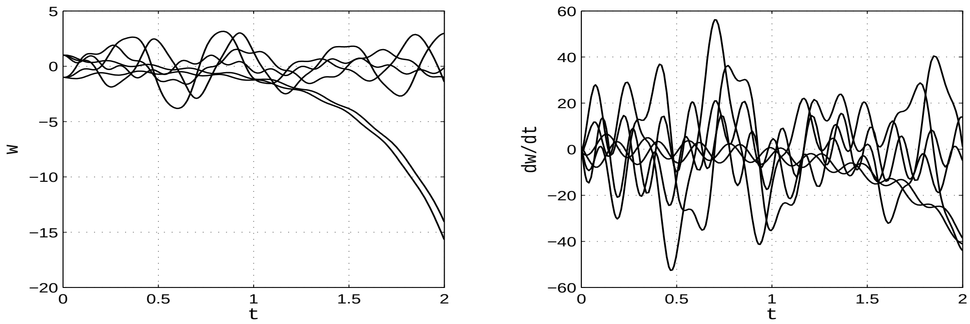


Рис. 4.4. Перехідні процеси нестійкої розімкнутої системи.

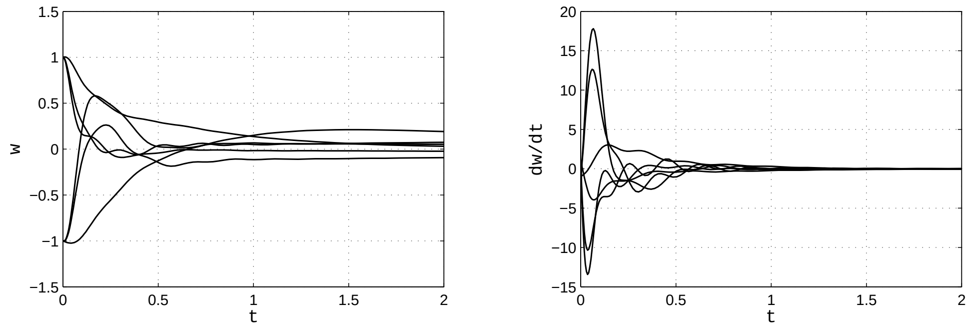


Рис. 4.5. Перехідні процеси замкнутої системи з матрицями керування (4.48).

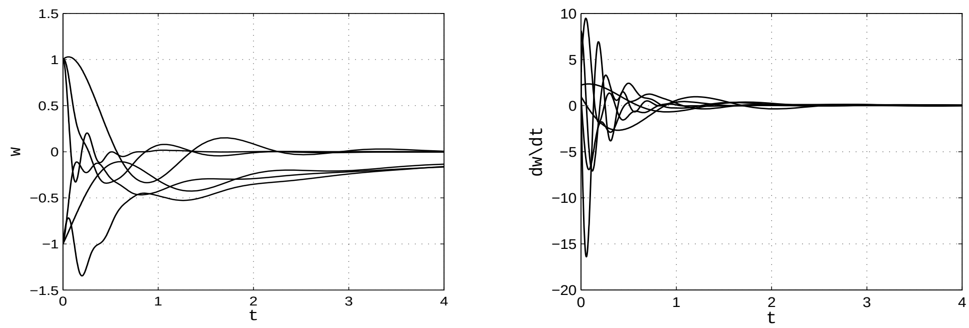


Рис. 4.6. Перехідні процеси замкнутої системи з матрицями керування (4.49).

4.6. Висновки до розділу

Основні результати даного розділу полягають у наступному:

- отримано нові матричні методи аналізу стійкості диференціальних систем другого порядку;

- досліджено спектральні властивості гіперболічних пучків матриць і наведено їх застосування в задачах стійкості обертальних рухів механічних систем;
- побудовано алгоритм стабілізації диференціальних систем другого порядку;
- розроблені матричні методи аналізу стійкості та побудови стабілізуючого керування застосовано до типових моделей роторних систем.

Основні результати розділу опубліковано у роботах [27, 29].

ВИСНОВКИ

Основні результати проведених досліджень, які представлені в дисертації, полягають у наступному:

1. Розроблено нові алгебраїчні методи дослідження стійкості класів позитивних динамічних систем (диференціальних, різницевих та диференціальних систем із запізненням).

2. Встановлено умови позитивності диференціальних та різницевих систем відносно конусів типу кругових, еліпсоїдальних та їх узагальнень.

3. Розвинуто методику побудови інваріантних множин нелінійних диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей. Як наслідок, сформульовано узагальнений принцип порівняння для сімейства диференціальних систем, що функціонують у різних просторах.

4. Розроблено способи позитивної стабілізації динамічних систем відносно заданих конусів.

5. Побудовано нові матричні методи аналізу стійкості та алгоритми стабілізації лінійних диференціальних систем другого порядку.

6. Досліджено спектральні властивості гіперболічних пучків матриць і наведено їх застосування в задачах стійкості обертальних рухів механічних систем.

7. Розроблені матричні методи аналізу стійкості та синтезу керування застосовано для типових моделей роторних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 864 с.
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
3. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Исследование устойчивости сложных механических систем. – М.: Наука, 2002. – 300 с.
4. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 168 с.
5. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. – М.: Наука, 1985. – 286 с.
6. Луковский И.А., Троценко В.А., Усюкин В.И. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостю в подвижных полостях. – Киев: Наук. думка, 1989. – 240 с.
7. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с.
8. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
9. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с.
10. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 544 с.
11. Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. – М.: Мир, 1974. – 526 с.
12. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
13. Agafonov S.A. Stability and motion stabilization of nonconservative mechanical systems // J. Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 112, № 5. – P. 4419–4497.

14. Румянцев В.В., Сосницкий С.П. О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем // Прикл. мат. и мех. – 1993. – Т. 57, № 6. – С. 144–166.

15. Tisseur F., Meerbergen K. The Quadratic eigenvalue problem // SIAM Review – 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 235–286.

16. Lancaster P. Lambda-Matrices and Vibrating Systems. Pergamon Press, Oxford, UK, 1966.

17. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980. – 480 с.

18. Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.

19. Козлов Р.И. Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова. – Новосибирск: Наука, 2001. – 128 с.

20. Мильштейн Г.Н. Экспоненциальная устойчивость положительных полугрупп в линейном топологическом пространстве // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 9. – С. 35–42.

21. Мазко А.Г. Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. т. 28. – 216 с.

22. Fiedler M., Pták V. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors // Czech. Math. J. – 1962. – Vol. 12, № 87. – P. 382–400.

23. Stern R.J., Wolkowicz H. Invariant Ellipsoidal Cones // Linear Algebra & Appl. – 1991. – Vol. 150, – P. 81–106.

24. Loewy R., Schneider H. Positive operators on the n-dimensional ice cream cone // J. Math. Anal. Appl. – 1975. – Vol. 49, – P. 375–392.

25. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 28–45.

26. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 11. – С. 1446–1461.

27. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 7–24.

28. Алілуйко А.М., Мазко О.Г. Інваріантні множини та порівняння динамічних систем // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 163–176.

29. Алілуйко А.М. Алгебраїчні умови стійкості диференціальних систем другого порядку // Динамические системы. – 2007. – Вып. 22. – С. 96–108.

30. Алилуйко А.Н., Мазко А.Г. Инвариантные конусы и монотонность динамических систем // Dynamical system modelling and stability investigation : Тези доповідей міжнародної наукової конференції (23–25 травня 2005 р., Київ). – Київ: Нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2005. – С. 19.

31. Алилуйко А.Н., Мазко А.Г. Инвариантные конусы и устойчивость многосвязных систем // International Workshop on Free Boundary Flows and Related Problems of Analysis : Тези доповідей міжнародної наукової конференції (25–30 вересня 2005 р., Київ). – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 43–44.

32. Алилуйко А.Н., Мазко А.Г. Инвариантные множества и устойчивость линейных дифференциальных систем произвольного порядка // Метод функций Ляпунова и его приложения : Тези Восьмої Кримської Міжнародної математичної школи (10–17 вересня 2006 р., Алушта). – Сімферополь: Нац. Таврійський ун-т України, 2006. – С. 10.

33. Алілуйко А.М. Матричні нерівності в задачах стійкості і стабілізації механічних систем // Dynamical system modelling and stability investigation : Тези доповідей міжнародної наукової конференції (22–25 травня 2007 р., Київ). – Київ: Нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2007. – С. 263.

34. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат, 1935. – 386 с.

35. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.

36. Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – Т. 3, № 1. – С. 3–95.

37. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., Ван Дуйн К., Де Пахтер Б. Однопараметричекие полугрупы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.

38. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

39. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

40. Гихман И.И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статистические выводы. – Ташкент: Фан, 1966. – С. 14–15.

41. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэфициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.

42. Кореневский Д.Г. Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 148 с.

43. Hirsch M.W., Smith H. Competitive and cooperative systems: mini-review. Positive systems // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. – 2003. – Vol. 294. – P. 183–190.

44. Мартынюк А.А., Оболенський А.Ю. Об устойчивости решений автономних систем // Дифф. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 8. – С. 1392–1407.

45. Ласерра Е., Оболенский А.Ю., Пільтяй М.М. Динамічні системи в просторах з конусом // Наук. вісті НТУУ КПІ. – 2000. – № 6. – С. 142–148.

46. Мазко А.Г. Устойчивость линейных позитивных систем // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 323–330.

47. Мазко А.Г. Устойчивость позитивных и монотонных систем в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 4. – С. 462–475.

48. Мазко О.Г. Устойчивость динамических систем в пространствах с конусами // Вопросы механики и ее применения. – Київ: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – Т. 44. – С. 168–183.
49. Haddad W.M., Chellaboina V. Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay // Systems & Control Letters. – 2004. – Vol. 51. – P. 355–361.
50. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
51. Šiljak D.D. Large-Scale Dynamic System: Stability and Structure. – New York: North Holland, 1978. – 416 p.
52. Martynyuk A.A. Qualitative methods in nonlinear dynamics: Novel Approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. – 301 p.
53. Martynyuk A.A., Slyn'ko V.I. Stability Results for Large-Scale Difference Systems via Matrix Valued Liapunov Functions // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2007. – Vol. 7, № 2. – P. 217–224.
54. Мазко А.Г. Позитивная стабилизация многосвязных систем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – Т. 1, № 2. – С. 130–142.
55. Stern R.J., Wolkowicz H. Exponential nonnegativity on the ice cream cone // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1991. – Vol. 12, № 1. – P. 160–165.
56. Vandergraft J.S. Spectral properties of matrices which have invariant cones // SIAM. J. Appl. Math. – 1968. – Vol.16, – P. 1208–1222.
57. Elsner L. Monotonie und Randspektrum bei vollstetigen Operatoren // Arch. Rational Mech. Anal. – 1970. – Vol. 36, – P. 356–365.
58. Berman A., Neuman M., Stern R. Nonnegative Matrices in Dynamic Systems. Wiley-Interscience, 1989.
59. Boyd S., Ghaoui L.El, Feron E., Balakrishman V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 15. Philadelphia, PA, 1994. – 193 p.

60. Bhattacharya R., Fung J., Tiwari A., Murray R. M., Ellipsoidal Cones and Rendezvous of Multiple Agents // Proceedings of the 43st IEEE Conference on Decision and Control. – Bahamas, 14–17 Dec., 2004. – Vol. 1. – P. 171–176.

61. Матросов В.М. К теории устойчивости движения // Прикл. мат. и мех. – 1962. – т. 26, № 6. – С. 992–1002.

62. Bellman R. Vector Lyapunov functions // J. Soc. Industr. and Appl. Math., Ser. A, Control. – 1962. – Vol. 1, № 1. – P. 32–34.

63. Постников Н.С., Сабаев Е.Ф. Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования // Автом. и телемех. – 1980. – № 4. – С. 24–34.

64. Мазко А.Г. Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. –2005. –Т. 57, № 2. – С. 198–213.

65. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Методы линейной алгебры в задачах управления: Учеб. пособие. – СПб.: Изд–во С.–Петербургского университета, 1993. – 320 с.

66. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.

67. Sezer M.E., Šiljak D.D. Robust stability of discrete systems // Int. J. Control. – 1988. – Vol. 48, № 5. – P. 2055–2063.

68. Лазарян В.А., Длугач Л.А., Коротенко М.Л. Устойчивость движения рельсовых экипажей. – Киев: Наук. думка, 1972. – 198 с.

69. Абгарян К.А. Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1969. – 378 с.

70. Демидович Б.И. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

71. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.

72. Thomson W., Tait P. Treatise on natural phylosophy. V.1. – London: MacMillan and Co., 1867. – 727 p.

73. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 208 с.

74. Roberson R.E. Notes on the Thomson-Tait-Chetaev stability theorem // J. Astronaut. Sci. – 1968. – Vol. 15, № 6. – P. 319–324.

75. Zajac E.E. The Kelvinn-Tait-Chetaev theorem and extensions // J. Astronaut. Sci. – 1964. – Vol. 11, № 2. – P. 46–49.

76. Кошляков В.Н. О структурных преобразованиях динамических систем // Прикл. мат. и мех. – 1997. – Т. 61, № 5. – С. 774–780.

77. Кошляков В.Н., Макаров В.Л. Структурный анализ некоторого класа динамических систем // Укр. мат. журнал. – 2000. – Т. 52, № 8. – С. 1089–1096.

78. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

79. Li J., Li X., Wang Z. New theorems on the stability of mechanical systems with circulatory forces // Z. angew. Math. Phys. – 1999. – Vol. 50. – P. 839–843.

80. Shapiro A. Stability of second-order asymmetric linear mechanical systems with application to grasping // ASME J. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 72, № 6. – P. 966–968.

81. Kliem W., Pommer C. Stability and response bounds of non-conservative linear systems // Arch. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 73, – P. 627–637.

82. Seyranian A.P., Mailybaev A.A. Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. – New Jersey, London . . . : World Scientific, 2003. – Series A, Vol. 13. – 404 p.

83. Kliem W., Pommer C., Stoustrup J. Stability of rotor systems: A complex modelling approach // Z. angew. Math. Phys. – 1998. – Vol. 49, – P. 644–655.

84. Li J. On the stability of dissipative mechanical systems with circulatory forces // Z. angew. Math. Phys. – 1997. – Vol. 48. – P. 161–164.

85. Новицький В.В. Рівняння Ляпунова для майже консервативних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – 33 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 2004.7).

86. Метелицын И.И. К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 1. – С. 31–34.

87. Mingori D.L. A stability theorem for mechanical systems with constraint damping // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1970. – Vol. 37, № 20. – P. 253–258.

88. Вербицкий В.Г. Влияние структуры сил на устойчивость линейной системы // Прикл. мех. – 1982. – Т. 18, № 12. – С. 119–121.

89. Гончаренко В.И. Стабилизация движения неустойчивой механической линейной системы // Прикл. мех. – 1991. – Т. 26, № 4. – С. 79–85.

90. Агафонов С.А. Об устойчивости движения неконсервативных механических систем // Прикл. мат. и мех. – 1992. – Т. 56, № 2. – С. 212–217.

91. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техн. Серия Общая механика / ВИНИТИ. – 1983. – Т. 6. – С. 3–128.

92. Lancaster P. Strongly stable gyroscopic systems // Electr. J. Linear Algebra. – 1999. – Vol. 5. – P. 53–66.

93. Bulatovic R.M. On stability criteria for gyroscopic systems with negative definite stiffness // Facta Universitatis: Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 2000. – Vol. 2, № 10. – P. 1081–1087.

94. Huseyin K., Hagedorn P., Teschner W. On the stability of linear conservative gyroscopic systems // Z. angew. Math. Phys. – 1997. – Vol. 34, № 6. – P. 807–815.

95. Clark J.V., Zhou N., Pister K.S.J. Modified nodal analysis for MEMS with multi-energy domains // International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, Semiconductors, Sensors and Actuators. – San Diego, 27–29 March , 2000. – P. 723–726.

96. Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 259 с.

97. Guo C.-H., Lancaster P. Algorithms for hyperbolic quadratic eigenvalue problems // Math. Comp. – 2005. – Vol. 74, № 252. – P. 1777–1791.

98. Мейлахс А.М. О синтизе устойчивых систем автоматического регулирования при параметрических возмущениях // Автомат. и телемех. – 1978. – № 10, – С. 5–16.

99. Мазко А.Г. Управление спектральными и оптимальными свойствами линейных систем // Динамика и устойчивость механических систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 128–133.

100. Datta B.N., Elhay S., Ram Y.M. Ortogonality and partial pole assigment for the symmetric definite quadratic pencil // Linear Algebra Appl. – 1997. – Vol. 257. – P. 29–48.

101. Datta B.N., Sarkissian D.R. Computational methods for feedback control in damped gyroscopic second-order systems // Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. – Las Vegas, 10–13 Dec., 2002. – Vol. 4. – P. 4456–4461.

102. Mehrmann V., Watkins D. Polynomial eigenvalue problems with Hamiltonian structure // Electr. Trans. Num. Anal. – 2002. – Vol. 13. – P. 106–118.

103. Мазко А.Г. Полуобращение и свойства инвариантов матриц // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 4. – С. 525–528.

104. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. – 478 с.

105. Мазко О.Г. Устойчивость и монотонность динамических систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – Київ: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – Т. 47, – С. 180–201.

106. Hirsch M.W. Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems // J. reine angew. Math. – 1988. – Vol. 383. – P. 1–53.

107. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to functional differential equations. – New York, Springer, 1993. – 447 p.

108. Simon I.D., Mitter S.R. A theory of modal control // Inf. and Contr. – 1968. – Vol. 13. – P. 316–353.

109. Павловський М.А., Горбулін В.П., Клименко О.М. Системи керування обертальним рухом космічних апаратів: Підручник. – Київ: Наук. думка, 1997. – 200 с.

110. Стороженко В.А. Стационарные движения в задаче определения главных осей инерции неоднородных твердых тел. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 229 с.

111. Науменко К.И., Сукретний В.И. Об интегрировании уравнений вращательного движения твердого тела // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 303–308.

112. Meirovitch L., Ryland G. A perturbation technique for gyroscopic systems with small internal and external damping // J. Sound and Vibration. – 1985. – Vol. 100, № 3. – P. 393–408.