КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Т.Г.ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

НЕМИШ Василий Николаевич

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1979

Работа выполнена в Тернопольском финансово-экономическом институте.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Я.И.КИЗЫМА.

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук В.Н.ПОДИЛЬЧУК,
– кандидат физико-математических наук, профессор И.И.СИДЛЕР.

Ведущая организация – Донецкий государственный университет.

Защита состоится "21" мая 1979 г. в 14⁰⁰ час.на заседании специализированного совета К 068.18.09 Киевского ордена Ленина государственного университета им.Т.Г.Шевченко

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Киевского государственного университета (252601, г. Киев, ГСП, ул.Владимирская, 58).

Автореферат разослан "6" апреля 1979 г.

Ученый секретарь специализированного совета канд.физ.-мат.наук Б.Н.НИКОРЕНКО

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В математической и прикладной теории упругости особое значение имеют пространственные задачи, в которых во многих случаях требуется определить напряженно-деформированное состояние трехмерных упругих тел, находящихся в поле действия поверхностных или объемных сил. Общие и многие частные вопросы, относящиеся к решению трехмерных задач теории упругости, рассмотрены в монографиях В.Т.Гринченко, В.Н.Ионова и П.М.Огибалова, В.Д. Купрадзе, А.И.Лурье, В.Л.Новацкого и других. Теории кручения трехмерных упругих тел посвящены книги Н.Х.Арутюняна и Б.Л.Абрамяна, С.Г.Лехницкого, К.В. Солянника – Красса и других.

Важную роль в технических приложениях играют задачи о распределении напряжений около различного рода концентраторов напряжений в деформируемых телах. Решение ряда конкретных задач для эллипсоидальных, а также для других видов канонических областей получено в работах А.Я.Александрова, В.С. Вольперта, В.Т.Гринченко, А.И.Лурье, Г.Нейбера, Ю.Н.Подильчука, Г.Н.Положия, А.Ф.Улитко, В.К. Прокопова, Г.С. Шапиро и других.

Рассмотрение более сложных граничных поверхностей во многих случаях не позволяет точно решать даже простейшие (по отношению к нагрузке и упругим свойствам материала) пространственные краевые задачи, имеющие как научное, так и практическое значение.

Из приближенных методов достаточно эффективными оказались различные варианты метода "возмущения формы границы". Разработке методов возмущения в двухмерных и трехмерных краевых задачах математической теории упругости изотропного и анизотропного тела посвящены работы А.Н.Гузя, В.Г.Карнаухова, А.Д.Коваленко, А.С.Космодамианского, С.Г.Лехницкого, В.А.Ломакина, Ю.Н.Немиша, В.А.Пальмова, Ю.Н.Подильчука, Г.Н.Савина, И.И.Сидляра и других.

Аналитическому решению новых пространственных осесимметричных граничных задач математической теории упругости однородных изотропных и трансверсально изотропных тел, ограниченных поверхностями вращения специального вида, посвящена настоящая диссертационная работа. При этом используется вариант метода возмущения в форме, предложенной А.Н.Гузем для решения граничных задач о концентрации напряжений около криволинейных отверстий в тонких оболочках.

Целью диссертационной работы является исследование напряженного состояния изотропных и трансверсально изотропных упругих деформируемых тел с полостями и включениями, близкими к сферическим, в случае кручения и растяжения-сжатия, а также анализ влияния анизотропии материала, формы поверхности полости (включения) и расстояния от этих концентраторов напряжений на величину напряженного состояния тела.

Научная новизна. В работе получено аналитическое решение с доведением до числовых результатов новых пространственных граничных задач математической теории упругости для изотропных и трансверсально изотропных сред с полостями и включениями, находящихся в поле кручения и всестороннего растяжения-сжатия. Рассматриваемые граничные поверхности имеют форму конической, так называемой биконической и цилиндрической замкнутых поверхностей вращения. К решению конкретных задач указанного класса впервые применен метод "возмущения формы границы". Исследованы механические эффекты, характерные для деформирования упругих тел с концентраторами напряжений в виде полостей и включения

рассматриваемой формы.

Достоверность результатов, изложенных в диссертации, подтверждается сравнением полученных приближенных решений с точными результатами других авторов (для эллипсоидальных полостей) и проверкой практической сходимости числовых данных в рассмотренных краевых задачах.

Практическая ценность. Результаты исследований, приведенные в диссертационной работе, могут быть использованы: при исследовании напряженного состояния упругих валов больших диаметров с полостями и инородными включениями, работающих в различных статических силовых полях; при исследовании напряженного состояния горных массивов с полостями (выработками) или включениями из других пород, находящихся под внутренним давлением (природные газы) или под действием собственного веса; при определении напряженного состояния и прочности композиционных материалов, армированных короткими волокнами.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались: на семинаре кафедры прикладной математики и механики Черновицкого государственного университета (Черновцы, 1971 г.), на Первой республиканской конференции "Проблемы механики конструкций из композиционных материалов" (Канев, 1975 г.), на расширенном заседании секции математики и механики Западного научного центра АН УССР (Дрогобыч, 1976 г.), на семинаре "Технология производства и область применения прогрессивных полимерных материалов в машиностроении" (Львов, 1976 г.), на заседании секции математики и механики Западного научного центра АН УССР (Тернополь, 1976 г.), на республиканской научно-технической конференции "Повышение качества изделий, изготовляемых из полимерных материалов" (Ивано-Франковск, 1977 г.), на семинаре кафедры теории упругости Киевского ордена Ленина государственного университета им.Т.Г.Шевченко (Киев,1978 г.), на семинаре по механике сплошной среды при Донецком государственном университете (Донецк, 1979 г.).

Публикации. Основные научные результаты диссертационной работы отражены в публикациях [1] - [6] центральных и республиканских изданий.

Объем работы. Диссертация состоит из введения,четырех глав, заключения и списка литературы (128 наименований). Работа содержит 144 страницы основного машинописного текста и иллюстрирована 36 рисунками и 41 таблицей.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводится краткий обзор опубликованных работ, относящихся в основном к пространственным задачам теории упругости для тел вращения; излагается также сжатое содержание полученных результатов диссертации.

В первой главе приводятся основные уравнения и соотношения пространственной теории упругости в сферических координатах. Решение уравнения равновесия в перемещениях для изотропной среды выбрано в форме П.Ф.Папковича - Г.Нейбера.

Излагается приближенный метод "возмущения формы границы" для фигур, близких к сферическим, образованных вращением около оси OZ достаточно гладкого контура Γ,уравнение которого имеет вид

$$z = r_0\left[\cos\gamma + \varepsilon\,\mathrm{Re}\, f(\zeta)\right],$$
$$R = r_0\left[\sin\gamma + \varepsilon\,\mathrm{Jm}\, f(\zeta)\right]\quad(\zeta = \rho e^{i\gamma}), \tag{1}$$

где аналитическая функция $f(\zeta)$ и малый параметр $\varepsilon\ (|\varepsilon| \ll 1)$

определяют форму поверхности вращения, величина r_0 - ее абсолютные размеры, а R - расстояние от оси вращения.

Компоненты перемещений и напряжений представляются в виде

$$u_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_\ell^{(n)}, \quad \sigma_{m\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{m\ell}^{(n)} \quad (m,\ell = \rho,\gamma,\varphi). \tag{2}$$

Сферические координаты r,θ , угол между радиальным направлением и нормалью к контуру Γ , а также произвольная функция $F(r,\theta)$ представляются в виде рядов по степеням малого параметра ε . На основе формул перехода от сферических координат r,θ,α к криволинейным ортогональным координатам ρ,γ,φ (координаты поверхностей вращения), а также разложений (2), компоненты последовательных приближений определяются с помощью соответствующих рекуррентных соотношений.

Граничные условия для произвольного приближения при заданных на координатной поверхности $\rho=1$ перемещениях $\overset{\circ}{u}{}_\ell^{(n)}$ или напряжениях $\overset{\circ}{\sigma}{}_{\rho\ell}^{(n)}$ соответственно будут

$$\left(u_\ell^{(n)} + \hat{u}_\ell^{(n)}\right)_{\rho=1} = \overset{\circ}{u}{}_\ell^{(n)}, \quad \left(\sigma_{\rho\ell}^{(n)} + \hat{\sigma}_{\rho\ell}^{(n)}\right)_{\rho=1} = \overset{\circ}{\sigma}{}_{\rho\ell}^{(n)} \quad (\ell=\rho,\gamma,\varphi). \tag{3}$$

При этом составляющие $\hat{u}_\ell^{(n)}, \hat{\sigma}_{\rho\ell}^{(n)}$ являются известными функциями и соответствуют основному напряженному состоянию среды, характеризующемуся приложенными силами на "бесконечности".

Таким образом, граничные задачи для бесконечной среды,ограниченной изнутри замкнутыми поверхностями вращения рассмотренного вида,формально сводятся к последовательности краевых задач для среды со сферическими поверхностями.

Вопрос об эффективности метода возмущения выяснено с пом... двух задач, отвечающих случаям кручения и всестороннего растяжения-сжатия изотропного тела с вытянутой или сжатой эллипсодальной полостью, допускающих точное решение. Сравнение полученных результатов приближенным методом с точными свидетельствует о достаточно хорошей сходимости приближенного метода "возмущения формы границы".

Вторая глава посвящена исследованию напряженного состояния при кручении упругих деформируемых тел с полостями и включениями, поверхности которых описываются уравнениями (I) при $f(\zeta)=\zeta^{-K}$ и имеют вид конической ($K=2$, $\varepsilon = 1/4$), сиконической ($K=3$, $\varepsilon = 1/9$) и цилиндрической ($K=3$, $\varepsilon = -1/9$) замкнутых поверхностей вращения. Предполагается, что ось вращения рассматриваемых поверхностей совпадает с осью цилиндра, а внешние (боковая и торцевые) поверхности цилиндра находятся на таком расстоянии от полости или включения, что не влияют на напряженное состояние около этих концентраторов напряжений. Так как в краевых задачах, соответствующих рассматриваемым случаям (как и в последующих главах) граничные условия относительно переменных ρ, γ не разделяются, то решения получены приближенным методом "возмущения формы границы" с учетом трех приближений.

Предполагается, что сплошной цилиндр радиуса R_1 подвержен кручению моментом M относительно оси OZ. Тогда компоненты основного напряженного состояния в криволинейной ортогональной системе координат ρ, γ, φ допускают представления в виде (2), например,

$$\hat{\sigma}_{\gamma\rho} = \frac{P' r_0}{3}\Big\{2\rho\big(1-P_2(\cos\gamma)\big) + \varepsilon\rho^{-K}\Big[2\cos(K+1)\gamma \times \\ \times\big(1-P_2(\cos\gamma)\big) + (1-K)\sin(K+1)\gamma\,\frac{dP_2(\cos\gamma)}{d\gamma}\Big] + \tag{4}$$

$$+0{,}5\,\varepsilon^2\rho^{-2K-1}\Big[K\big(1-\cos 2(K+1)\gamma\big)\big(-K-1+(K-2)P_2(\cos\gamma)\big) - \\ -K(K+1)\sin 2(K+1)\gamma\,\frac{dP_2(\cos\gamma)}{d\gamma}\Big] + O(\varepsilon^3)\Big\} \quad (P' = 2M/\pi R_1^4).$$

Здесь $P_n(\cos\gamma)$ – полиномы Лежандра.

Напряжения $\sigma^*_{me} = \sigma_{me} + \hat{\sigma}_{me}$, с точностью до членов порядка ε^{n+1} по сравнению с единицей, будем определять по формуле

$$\sigma^{*(n)}_{me} = \sigma^{*(n-1)}_{me} + \varepsilon^n\big(\sigma^{(n)}_{me} + \hat{\sigma}^{(n)}_{me}\big) \quad (n \geqslant 1). \tag{5}$$

Допустим, что требуется определить напряженное состояние при кручении упругого однородного изотропного тела с жестким включением рассматриваемого типа. Тогда в произвольном приближении граничные условия будут

$$U^{(0)}_{\alpha}\Big|_{\rho=1} = -\hat{U}^{(0)}_{\varphi}\Big|_{\rho=1}, \quad U^{(n)}_{\alpha}\Big|_{\rho=1} = -\Big[\hat{U}^{(n)}_{\varphi} + \sum_{j=0}^{n-1}\Lambda_1^{(n-j)}U^{(j)}_{\alpha}\Big]_{\rho=1} \quad (n \geqslant 1), \tag{6}$$

где $\Lambda_1^{(n)}$ – дифференциальные операторы, которые при $f(\zeta)=\zeta^{-K}$, $n=2$ имеют вид

$$\Lambda_1^{(2)} = \frac{1+\cos 2(K+1)\gamma}{4\rho^{2K}}\,\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{\sin 2(K+1)\gamma}{2\rho^{2K}}\,\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial\gamma}\,\frac{1}{\rho} + \\ + \frac{1-\cos 2(K+1)\gamma}{4\rho^{2K+2}}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\Big). \tag{7}$$

В случае задачи о распределении напряжений, возникающих при кручении упругого однородного трансверсально изотропного тела вращения, ослабленного свободной от напряжений близкой к сферической полостью, краевые условия также

$$\sigma_{r\alpha}^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(0)}\Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{r\alpha}^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(n)}\Big|_{\rho=1} - \tag{8}$$

$$-\sum_{j=0}^{n-1}\left[\Lambda_5^{(n-j)}\sigma_{r\alpha}^{(j)} + \Lambda_6^{(n-j)}\sigma_{\theta\alpha}^{(j)}\right]_{\rho=1} \quad (n \geq 1),$$

где $\Lambda_5^{(n)}$ и $\Lambda_6^{(n)}$ – дифференциальные операторы вида (7).

Величины $U_\alpha^{(j)} = U_\alpha^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\alpha}^{(j)} = \sigma_{r\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\theta\alpha}^{(j)} = \sigma_{\theta\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)$ записываются на основе общего решения уравнений равновесия в сферических координатах после формальной замены r, θ на ρ, γ.

В нулевом приближении имеют место выражения

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)} = \frac{2P'r_0}{3}\left(\rho - \frac{G_1}{G_2}\frac{1}{\lambda_2 - 1{,}5}\rho^{\lambda_2-1{,}5}\right)\left(1 - P_2(\cos\gamma)\right), \tag{9}$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)} = \frac{P'r_0}{3}\left(\rho - \rho^{\lambda_2-1{,}5}\right)\frac{dP_2(\cos\gamma)}{d\gamma},$$

которые соответствуют точному решению задачи о распределении напряжений в упругой однородной трансверсально изотропной среде со сферической полостью. Здесь G_1 и G_2 модули сдвига в плоскостях ($\gamma\varphi$) и ($\rho\varphi$), а постоянная λ_2 является корнем алгебраического уравнения

$$\lambda_k^2 - \left[(n-1)(n+2)G_1/G_2 + 9/4\right] = 0. \tag{10}$$

На поверхностях неканонических жестких включений определяющим является напряжение $\sigma_{\rho\varphi}^{*(z)}$, а на поверхностях таких же полостей-компонента $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(z)}$. В частности, при $K=3$, $\rho = 1$, $\varepsilon = \pm 1/9$ выражения для напряжений имеют следующую структуру относительно полиномов Лежандра

$$\sigma_{\rho\varphi}^{*(z)} = P'r_0\sum_{n=2,4,\ldots}^{10} a_n\frac{dP_n(\cos\gamma)}{d\gamma}, \tag{11}$$

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{*(z)} = P'r_0\sum_{n=0,2,\ldots}^{10} b_n P_n(\cos\gamma).$$

Здесь a_n, b_n – некоторые коэффициенты, зависящие от упругих постоянных.

Напряженное состояние около полостей существенным образом зависит от отношения G_1/G_2. Так, например, для биконической полости при $\gamma=\pi/2$ напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(z)}/P'b'$ $\left(b' = r_0 R\big|_{\gamma=\pi/2}\right)$, в соответствии с обозначением (5), характеризуются полиномами относительно переменной ρ вида

$$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(z)}}{P'b'}\Bigg|_{G_1/G_2=1} \approx 0{,}9\rho + 0{,}1\rho^{-3} + \sum_{k=4}^{12} c_k\rho^{-k}, \tag{12}$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(z)}}{P'b'}\Bigg|_{G_1/G_2=5/2} \approx 0{,}9\rho + 0{,}1\rho^{-3} + \sum_{k=5}^{18} d_k\rho^{-k},$$

где c_k, d_k – известные числовые коэффициенты.

Исследован характер распределения напряжений на поверхностях полостей и включений, а также при удалении от этих концентраторов напряжений по наиболее напряженным направлениям. Показано, что существенное влияние отношения G_1/G_2 на напряженное состояние тела имеет место только на поверхности полости и в ее близкой окрестности.

Третья глава посвящена исследованию напряженного состояния изотропной среды с жесткими включениями и свободными от напряжений полостями указанного выше вида в случае растяжения-сжатия.

Предполагается, что на "бесконечности" однородная упругая изотропная среда с жестким неканоническим включением находится под действием внешних усилий интенсивности P (значение $P>0$ соответствует растяжению, а $P<0$ – сжатию), т.е. основное напряженное состояние в криволинейных ортогональных координатах характеризуется компонентами: $\hat{\sigma}_{\rho\rho}=\hat{\sigma}_{\gamma\gamma}=\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}=P$, $\hat{\sigma}_{\rho\gamma}=\hat{\sigma}_{\gamma\varphi}=\hat{\sigma}_{\rho\varphi}=0$.

Краевые условия в произвольном приближении на поверхности жестких включений в рассматриваемом осесимметричном случае (без кручения) имеют вид

$$u_r^{(0)}\Big|_{\rho=1}=-\hat{u}_\rho^{(0)}\Big|_{\rho=1}, \quad u_\theta^{(0)}\Big|_{\rho=1}=-\hat{u}_\gamma^{(0)}\Big|_{\rho=1}, \tag{13}$$

$$u_r^{(n)}\Big|_{\rho=1}=-\Big[\hat{u}_\rho^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\Lambda_5^{(n-j)}u_r^{(j)}+\Lambda_6^{(n-j)}u_\theta^{(j)}\Big)\Big]_{\rho=1},$$

$$u_\theta^{(n)}\Big|_{\rho=1}=-\Big[\hat{u}_\gamma^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\Lambda_5^{(n-j)}u_\theta^{(j)}-\Lambda_6^{(n-j)}u_r^{(j)}\Big)\Big]_{\rho=1} \ (n\geq 1),$$

где $\hat{u}_\rho^{(n)}$, $\hat{u}_\gamma^{(n)}$ соответствуют основному напряженному состоянию среды. В частности, для $\hat{u}_\rho$ имеем

$$\hat{u}_\rho=\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,\frac{r_0P}{2G}\Big\{\rho+\varepsilon\rho^{-k}\cos(k+1)\gamma- \tag{14}$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{4}\rho^{-2k-1}k(k+2)\big[1-\cos 2(k+1)\gamma\big]+O(\varepsilon^3)\Big\}.$$

Здесь G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

В случае растяжения-сжатия упругой однородной изотропной среды со свободными от напряжений неканоническими полостями граничные условия такие

$$\sigma_{rr}^{(0)}\Big|_{\rho=1}=-P, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)}\Big|_{\rho=1}=0,$$

$$\sigma_{rr}^{(n)}\Big|_{\rho=1}=-\sum_{j=0}^{n-1}\Big[\Lambda_1^{(n-j)}\sigma_{rr}^{(j)}+\Lambda_2^{(n-j)}\big(\sigma_{\theta\theta}^{(j)}-\sigma_{rr}^{(j)}\big)+\Lambda_3^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)}\Big]_{\rho=1}, \tag{15}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(n)}\Big|_{\rho=1}=-\sum_{j=0}^{n-1}\Big[\Lambda_4^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)}+\frac{1}{2}\Lambda_5^{(n-j)}\big(\sigma_{\theta\theta}^{(j)}-\sigma_{rr}^{(j)}\big)\Big]_{\rho=1} \ (n\geq 1),$$

где $\Lambda_m^{(n)}$ – дифференциальные операторы вида (7).

Компоненты $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$, а также $u_r^{(j)}$, $u_\theta^{(j)}$, входящие в формулы (13), соответствуют общему решению уравнений равновесия в криволинейной ортогональной системе координат.

В нулевом приближении напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{*(0)}$, $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(0)}$ соответствуют точному решению задачи для изотропной среды с жестким сферическим включением, или со свободной от напряжений сферической полостью в случае растяжения-сжатия.

Решение рассматриваемых пространственных задач получено с точностью до членов порядка ε^3 по сравнению с единицей. Исследованы закономерности распределения нормальных напряжений на поверхностях указанных полостей (включений) и в их окрестностях. Показана достаточно хорошая практическая сходимость применяемого метода.

В **четвертой главе** исследуется напряженное состояние однородной упругой трансверсально изотропной среды с замкнутыми конической, биконической и цилиндрической полостями при равномерном растяжении-сжатии.

В каждом приближении выражения для компонентов перемещений и напряжений, соответствующие общему решению поставленной задачи, записываются на основе представления Ху Хай-чана и В.Чена в сферических координатах для трансверсально изотропной среды.

При этом краевые условия в произвольном приближении имеют вид (I5). Решение поставленной задачи получено при $n = 0,1,2$.

Для всех рассмотренных форм поверхностей коэффициент концентрации нормальных напряжений $\sigma_{ee}^{*(2)}/P$ при $\rho = 1$ имеет единую аналитическую структуру

$$\frac{\sigma_{ee}^{*(2)}}{P} = \sum_{m=0}^{2K+2} \tau_{me} P_m(\cos\gamma) + O(\varepsilon^3) \quad (e = \rho, \gamma, \varphi), \tag{I6}$$

где τ_{me} – известные числовые коэффициенты, зависящие от упругих постоянных C_{ij}.

Вычисления для напряжений проводились для некоторых трансверсально изотропных материалов, в частности: I) $\nu_{12} = 0,365$, $\nu_{13} = 0,288$, $E_1/G = 2,244$, $E_1/E_3 = 0,828$; 2) $\nu_{12} = 0,3$, $\nu_{13} = 0,1$, $E_1/G = 5$, $E_1/E_3 = 4$.

Представление напряжений по степеням ρ (при $\gamma = const$) существенно зависит от упругих характеристик материала. Например, при $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1/9$ имеем

$$\begin{gathered} \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P} \approx 1 + \sum_{n=3}^{11} \eta_n \rho^{-n} + O(\varepsilon^3) \quad (\text{материал I}), \\ \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P} \approx 1 + \sum_{n=4}^{16} \varkappa_n \rho^{-n} + O(\varepsilon^3) \quad (\text{материал 2}), \end{gathered} \tag{I7}$$

где η_n, $\varkappa_n$ – известные числовые коэффициенты.

Влияние анизотропии особенно заметно, если упругие постоянные значительно отличаются от соответствующих им значений в изотропном случае, как это проиллюстрировано на примере материала 2, для которого отклонение величины максимальных напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P$ от соответствующих значений в изотропном случае доходит до 78 % при $K = 3$, $\varepsilon = \pm 1/9$, $\rho = 1$, $\gamma = 0, \pi/4, \pi/2$.

Для рассмотренных изотропных и трансверсально изотропных

материалов максимальные отклонения нормальных относительных напряжений $\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}/P$ от соответствующих значений для среды без полости не превышает 6,5 % при $\rho = 2$, и 2 % при $\rho = 3$.

Исследовано влияние радиуса кривизны граничной поверхности на коэффициент концентрации напряжений. В частности, этот вопрос выясняется в краевых задачах для деформируемых упругих сред с гипотрохоидальным жестким включением и гипотрохоидальной свободной от напряжений полостью.

Заметим, что для возможности удовлетворения граничным условиям в каждом приближении возникает необходимость переразложения известных выражений в ряды по полиномам Лежандра или их первым производным, что удается осуществить с помощью соответствующих рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра. Эта характерная особенность присуща всем рассмотренным граничным задачам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

I. Работа посвящена одному из важных разделов механики твердого деформируемого тела- пространственным осесимметричным задачам математической теории упругости. Основное внимание в ней уделяется исследованию напряженно-деформированного состояния тел, ограниченных поверхностями вращения специального вида (биконическая, замкнутые коническая и цилиндрическая поверхности). Так как переменные в таких краевых задачах не разделяются, то получить точное решение не представляется возможным. К решению новых конкретных задач указанного класса применен приближенный метод "возмущения формы границы", с помощью которого граничные задачи для замкнутых поверхностей вращения формально сводятся к решению последовательности краевых задач для сферических поверхностей.

2. Коэффициент концентрации напряжений на рассматриваемых полостях и включениях в точках наименьшего радиуса кривизны поверхности существенно отличается от соответствующих максимальных значений в случае сферических граничных поверхностей. Это особенно проявляется в трансверсально изотропных средах с сильной анизотропией. Так, например, при кручении цилиндрических валов с рассматриваемыми полостями такое максимальное отклонение составляет около 45 % в интервале изменения отношения модулей сдвига $7/16 \leq G_1/G_2 \leq 9/2$. В случае растяжения-сжатия изотропной и трансверсально изотропной среды с неканоническими полостями и включениями для рассматриваемых материалов превышение напряжения в характерных точках над значениями в соответствующих точках сферической поверхности доходит до 55 %.

3. Напряженное состояние в окрестности полостей и включения носит локальный характер, т.е. при незначительном отдалении от поверхности полости (включения) максимальные напряжения резко падают и приближаются к соответствующим значениям в деформируемой среде без концентраторов напряжений. Так, например, при кручении или растяжении-сжатии упругих тел со свободными от напряжения неканоническими полостями на расстоянии двух радиусов максимальные напряжения отличаются от соответствующего основного напряженного состояния не более чем на 2 %. В случае впаянных жестких включений аналогичный вывод сохраняется, если расстояния от поверхности включений не менее трех радиусов.

4. Полученные результаты можно распространить на некоторые пространственные многосвязные области, тела конечных размеров,

а также на толстостенные неканонические оболочки вращения, если их граничные поверхности находятся на таком расстоянии друг от друга, что взаимным влиянием этих поверхностей можно пренебречь.

5. Аналитические решения рассмотренного класса пространственных осесимметричных задач теории упругости для областей, близких к сферическим, получены приближенным методом "возмущения формы границы" и с погрешностью до 5 % их можно принять за истинные. Это следует из сравнения приближенных числовых результатов с точными значениями для эллипсоидальных полостей, а также из анализа процентного содержания числовых значений найденных последовательных приближений в рассмотренных конкретных задачах.

В основу диссертационной работы положены публикации:

1. Немиш Ю.Н., Немиш В.Н., Ярема П.Б. Распределение напряжений около неканонических поверхностей. - Прикл.механика, 1971, 7, № 12, с.41-50.

2. Немиш В.Н. Пространственная деформация изотропной среды с неканоническими включениями. - Мат.физика, 1976, вып.19, с.104-109.

3. Немиш Ю.Н., Немиш В.Н. Кручение ортотропных тел вращения с неканоническими полостями и включениями. - Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 6, с.101-111.

4. Немиш Ю.Н., Немиш В.Н. К решению пространственных задач теории упругости трансверсально изотропной среды для неканонических областей.- Прикл.механика, 1976, 12, № 12, с.73-82.

5. Немиш В.Н. Распределение напряжений около замкнутых осесимметричных полостей и включений при кручении.-Прикл.механика, 1977, 13, № 11, с.32-40.

6. Немин В.Н., Кизыма Я.М. Решение трехмерных задач механики сплошной среды с неканоническими включениями.- В кн.: Тез.докл. конф. "Повыш. качества изделий, изготовл. из полимерных материалов", секция 2. Киев: УкрНИИНТИ, 1977, с.12.

БХ 01091. Сдано в набор 19.03.79 г. Подписано в печать 19.03.79 г. Формат 60x84 1/16. Зак. № 2304. Тираж 100.

Типография издательства "Збруч"
г. Тернополь, ул. Куйбышева, 25.