УДК 519.24

УДОСКОНАЛЕНИЙ МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО Ig-ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ НА ОСНОВІ РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ

Пукас А.В.[1)], Зайко Ю.О.[2)]
Тернопільський національний економічний університет
[1)] к.т.н., доцент; [2)] магістр

І. Постановка проблеми

У процесі прийняття рішень доволі часто доводиться використовувати математичні моделі, зокрема побудовані на експериментальних даних з інтервальною невизначеністю. Для підвищення точності таких моделей при невеликих вибірках експериментальних даних використовують методи планування експериментів. Так для забезпечення підвищення прогностичних властивостей вказаних моделей використовують послідовні I_G, I_Q - оптимальні плани [1]. I_G-оптимальний план мінімізує максимальну похибку прогнозування моделі на області експерименту, а I_Q-оптимальний – мінімізує середню. Використання запропонованих критеріїв синтезу послідовних I_G, I_Q - оптимальних планів інтервальних експериментів для випадків, коли кількість спостережень більша мінімально необхідної для побудови моделі [2], є складною обчислювальною задачею, що обмежує можливості їх застосування. Це зумовлено використанням на одному з етапів синтезу планів методу сіток, який при збільшенні розмірності області експерименту чи при підвищенні вимог до точності знаходження координат спектру плану значно підвищує обчислювальну складність. Вказані процедури синтезу I_G та I_Q - оптимальних планів відрізняються несуттєво, тому не порушуючи загальності, далі будемо розглядати I_G-оптимальні плани. Отже, актуальною є задача удосконалення обчислювальної процедури реалізації методу послідовного I_G-оптимального планування експерименту.

Розглянемо математичну постановку задачі синтезу оптимальних планів. Нехай інтервальні моделі записують у вигляді залежності

$$y_0(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\beta}, \quad (1)$$

де y_0 - істинне невідоме значення виходу; $\vec{x} = (x_1,..., x_n)^T$ - вектор входів; $\vec{\varphi}^T(\vec{x})$ - відомий вектор базисних функцій; $\vec{\beta} = (\beta_1,..., \beta_m)^T$ - невідомий вектор параметрів.

Результати реалізації експерименту представлено в інтервальному вигляді (2)

$$\vec{x}_i, [y_i^-; y_i^+], \, y_{0i} \in [y_i^-; y_i^+], \, i = 1,..., N, \quad (2)$$

де y_i^-, y_i^+ – відповідно, нижня і верхня межі інтервалу вихідної змінної, N – кількість спостережень, яка у випадку насиченого експерименту співпадає з кількістю m невідомих параметрів моделі.

У випадку опрацювання результатів спостережень отримаємо інтервальні моделі статичної системи

$$\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}, \quad (3)$$

значення параметрів у яких належать множині

$$\Omega = \left\{ \vec{b} \in R^m \middle| \; \vec{Y}^- \le F \cdot \vec{b} \le \vec{Y}^+ \right\},$$

де $\vec{Y}^- = \left\{ y_i^-, i = 1, \dots, N \right\}, \vec{Y}^+ = \left\{ y_i^+, i = 1, \dots, N \right\}$ – вектори, складені із нижніх та верхніх меж інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$, відповідно; $\vec{b}$ – вектор оцінок параметрів $\vec{\beta}$ моделі; $F = \left\{ \varphi_j(\vec{x}_i), i = \overline{1,N}, \, j = \overline{1,m} \right\}$ – відома матриця значень базисних функцій.

Множина отриманих інтервальних моделей (3) матиме вигляд коридору

$$\left[\hat{y}(\vec{x})\right] = \left[\hat{y}^-(\vec{x}); \hat{y}^+(\vec{x})\right], \quad (4)$$

де $\hat{y}^-(\vec{x}) = \min\limits_{\vec{b} \in \Omega} \left(\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} \right)$ та $\hat{y}^+(\vec{x}) = \max\limits_{\vec{b} \in \Omega} \left(\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} \right)$ – нижня та верхня межі коридору.

Точність кожної із моделей визначається похибкою прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\vec{x},F)} = \hat{y}^{+}(\vec{x}) - \hat{y}^{-}(\vec{x})$, що залежить від розмірів множини Ω і відповідно від вибору матриці *F*.

II. Метод послідовного I_G -оптимального планування експерименту

Задача побудови I_G - оптимальних планів формулюється так: для заданої структури моделі системи у вигляді (1), області експерименту χ, при постійній інтервальній похибці $\Delta(\vec{x}_i)$ знайти таку матрицю значень входів *X*, яка забезпечуватиме при реалізації експерименту мінімум максимальної похибки прогнозування. При відомій структурі моделі задачу планування експерименту можна розглядати як задачу знаходження матриці *F*, що забезпечує мінімум максимальної похибки прогнозування.

Метод включає два етапи організації послідовних експериментів: на першому етапі – проведення насиченого I_G -оптимального експерименту, план для якого отримуємо із розв'язку задачі (5)

$$\max_{\vec{x}\in\chi} \Delta_{\hat{y}(\vec{x},F_m)}\Big|_{\vec{b}\in Q_m} \xrightarrow{F_m} \min , \tag{5}$$

і побудова за його результатами початкової інтервальної функції (8).

$$[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in Q_m} = [\vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot\vec{\bar{b}} - \frac{1}{2}\cdot\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m};\vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot\vec{\bar{b}} + \frac{1}{2}\cdot\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}], \tag{6}$$

де $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}$ – ширина коридору, що обчислюється за формулою

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x},F,k)}\Big|_{\vec{b}\in Q_m} = 2\cdot\sqrt{\vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot(F^T\cdot\hat{E}_k^{-2}\cdot F)^{-1}\cdot\vec{\varphi}(\vec{x})\cdot m}\,, \tag{7}$$

де $\hat{E}_k = diag(\Delta_{N(\vec{x}_1)},...,\Delta_{N(\vec{x}_i)},...,\Delta_{N(\vec{x}_m)})$, $\vec{x}_k \in \{\vec{x}_i, i=1,..,m\}$.

На другому етапі, з метою оптимізації інтервальних функцій проводяться додаткові спостереження у точках $\vec{x}_{k+1}$, що збігаються з точками насиченого плану для побудови послідовних I_G -оптимальних планів за критерієм

$$\max_{\vec{x}\in\chi} \Delta_{\hat{y}(\vec{x},F)} \xrightarrow{\vec{x}_{k+1}\in\{x_i, i=1,...,m\}} \min ; \tag{8}$$

Отже, розв'язком $\vec{x}^0$ задачі (10) є

$$\vec{x}^0 = \arg\max_{\vec{x}_i, i=1..m}\left\{\max_{\vec{x}\in\chi}\Delta_{\hat{y}(\vec{x},F,k)}\Big|_{\vec{b}\in Q_m} - \max_{\vec{x}\in\chi}\Delta_{\hat{y}(\vec{x},F,k+1)}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}\right\}, \tag{9}$$

за умови $\hat{E}_{k+1} = diag(\Delta_{N(\vec{x}_1)},...,\Delta_{N(\vec{x}_i)} - \delta,...,\Delta_{N(\vec{x}_m)})$, $\vec{x}_k \in \{\vec{x}_i, i=1,..,m\}$ чи $\hat{E}_{k+1} = diag(\Delta_{N(\vec{x}_1)},...,\Delta_{N(\vec{x}_i)}\cdot\delta,...,\Delta_{N(\vec{x}_m)})$, $\vec{x}_k \in \{\vec{x}_i, i=1,..,m\}$, де $\delta << \Delta_{N(\vec{x}_i)}$ – деяке задане число.

При зростанні розмірності задачі, тобто при збільшенні кількості вхідних змінних моделі, і (або) зростанні вимог до точності визначення координат точок спектру насиченого плану, виникає складна обчислювальна задача. Дослідження методу показало, що наявність матричних операцій, апріорі забезпечує можливість організації розпаралелення обчислень на етапі визначення максимальної похибки прогнозування у кожному вузлі області експерименту.

Висновки

У роботі досліджено ефективність розпаралелення алгоритму методу послідовного планування I_G -оптимальних експериментів при побудові інтервальних моделей статичних систем. Показано, що застосування можливості розпаралелення обчислювальної процедури пошуку максимальної ширини коридору функції прогнозування при визначенні чергової точки проведення спостереження, на відміну від послідовного алгоритму, забезпечує значне зменшення обчислювальної складності реалізації алгоритму.

Список використаних джерел

1. Дывак Н.П. Планирование I_G - и I_E - оптимальных експериментов в задачах идентификации интервальных моделей // Проблеми управления и информатики. - 2001. - №2. - С.42-49.
2. Дывак Н.П., Пукас А.В. Последовательное планирование I_G -оптимальных экспериментов для построения интервальных моделей статических систем // Проблемы управления и информатики. – 2004. - №5. – с. 31-38