НАУКОВІ ПОВІДОМЛЕННЯ

Степан ПОПІНА, Олеся МАРТИНЮК

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Відомі економіко-математичні моделі оптимізації портфеля цінних паперів доповнені співвідношенням між частками інвестицій. Розглянуто компромісний варіант, який враховує сподівану норму прибутку та ризик.

Ключові слова: *оптимізація, сподівана норма прибутку, ризик портфеля цінних паперів.*

З розгортанням економічних реформ в Україні операції з цінними паперами стали невід'ємною частиною господарської діяльності підприємств та фірм. Цінні папери відіграють значну роль у платіжному обороті держави, у мобілізації інвестицій. За допомогою цінних паперів здійснюється переміщення капіталу інвесторів до виробників, визначення ефективності використання фінансових активів в окремих секторах економіки. У розвинених країнах в умовах рівноважної економіки значна частина вільного капіталу вкладається безпосередньо в купівлю цінних паперів. Відомо, що для зменшення ризику цінні папери об'єднують у портфелі. *Актуальною* залишається проблема оптимізації портфеля цінних паперів.

Родоначальником сучасної теорії портфеля є Гаррі Марковіц, який одержав за свої дослідження в 1990 р. Нобелівську премію з економіки. Ґрунтовний аналіз досліджень у цьому напрямку здійснено в роботі [1]. Важливий внесок у розвиток економіко-математичного моделювання портфеля цінних паперів (ПЦП) зробила *низка вчених*, зокрема В. В. Вітлінський та його учні [2; 3]. Окремі проблеми цінних паперів розглянуто в працях [4; 5; 6].

Метою статті є розвиток економіко-математичного моделювання ПЦП з використанням співвідношення між частками цінних паперів у портфелі та побудовою компромісного варіанта.

Розглянемо задачу збереження капіталу. Дана задача актуальна для портфеля з ліквідними цінними паперами. Економіко-математична модель має такий вигляд [3; 8; 9; 10]:

$$
\begin{aligned}
& V_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j s_{ij} \to \min, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad\qquad (1)\\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1;n}.
\end{aligned}
$$

де V_n – ризик ПЦП як дисперсія норми прибутку, який визначається за формулами:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j s_{ij},$$

де x_i – частка інвестицій у ЦП i-того виду $(0 \le x_i \le 1)$,

$$s_{ij} = s_i \times s_j \times r_{ij},$$

де s_i – середнє квадратичне відхилення норми прибутку (ризик) ЦП i-того виду, r_{ij} – коефіцієнт кореляції між ЦП видів i та j, n – кількість видів ЦП ($n \ge 2$).

Базову модель (1) пропонуємо доповнити таким співвідношенням між частками інвестицій $\sum_{i=1}^{n} k_i x_i + c = 0,$ де k_i, c – сталі величини.

Для розв'язання задачі (1) з доповненням використовується метод множників Лагранжа [3; 12]. Для цього будуємо функцію:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j s_i s_j r_{ij} + l_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) + l_2 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i + c \right),$$

Досліджуємо функцію на мінімум. З цією метою прирівнюємо до нуля частинні похідні першого порядку функції L відносно змінних x_i, l_1, l_2.

Одержимо систему (n + 2) лінійних алгебраїчних рівнянь з таким самим числом невідомих. Зазначимо, що метод Лагранжа не враховує умови $x_i \ge 0$. Якщо всі розв'язки невід'ємні, то задача розв'язана. Якщо деякі x_i від'ємні, то серед них вибираємо найменше і вважаємо його таким, що дорівнює нулю. Тоді розв'язуємо задачу оптимізації без цінного паперу відповідного виду. Процес вилучення "несприятливих" ЦП продовжуємо до моменту одержання решти невід'ємних значень x_i.

Наприклад, відомі ризики ЦП чотирьох видів s_1=10%, s_2=15%, s_3=20%, s_4=25% та коефіцієнти кореляції норм прибутків r_{13} = –0,3; r_{12} = r_{14} = r_{24} = 0,2; r_{23} = r_{34} = –0,4. Визначити частки ЦП у портфелі з найменшим ризиком, якщо $x_1 = 2x_2$.

Вираз для ризику портфеля має такий вигляд:

$$V_n = 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2,$$

Таким чином, економіко-математична модель має вигляд:

$$V_n = 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 \to \min,$$

$$x_1 = 2x_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1;4}.$$

Одержимо такий розв'язок: x_1 = 0,4332; x_2 = 0,2166; x_3 = 0,2658; x_4 = 0,0844, $V_n^{\min} = 37,4544.$

Без врахування умови $x_1 = 2x_2$ матимемо такий результат: x_1 = 0,4251; x_2 = 0,2238; x_3 = 0,2667; x_4 = 0,0844, $V_n^{\min} = 37,4396.$ Накладання додаткової умови приводить до збільшення ризику портфеля.

Дослідимо задачу одержання заданого прибутку. Основна проблема задачі полягає у визначенні структури ПЦП, щоб сподівана норма прибутку портфеля дорівнювала заданій величині m_c та ризик був найменший.

Економіко-математична модель має вигляд [3; 10]:

$$
\begin{aligned}
&V_n \to \min \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m_c, \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1;n}.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

де m_i – сподівана норма прибутку ЦП *i*-того виду.

Доповнимо модель (2) співвідношенням між частками інвестицій, вказаними вище. Функція Лагранжа в цьому разі матиме такий вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j s_i s_j r_{ij} + l_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) + l_2\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i + c\right) + l_3\left(\sum_{i=1}^{n} x_i m_i - m_c\right).$$

У другому випадку умови змінимо. Нехай додатково до інформації прикладу 1 відомі ще такі величини: m_1 = 20%, m_2 = m_3 = m_c = 30%, m_4 = 50%. Необхідно визначити частки ЦП у портфелі з найменшим ризиком, якщо $x_1 = x_2$.

Математична модель матиме вигляд:

$$V_n = 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 \to \min,$$

$$
\begin{gathered}
20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 = 30, \\
x_1 = x_2, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\
x_i \ge 0, \quad i = \overline{1;4}.
\end{gathered}
$$

У цьому разі функція Лагранжа така:

$$
\begin{aligned}
L = {} & 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 + \\
& + l_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1) + l_2(x_1 - x_2) + l_3(20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 - 30).
\end{aligned}
$$

Частинні похідні функції Лагранжа рівні:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 200x_1 + 60x_2 - 120x_3 + 100x_4 + l_1 + l_2 + 20l_3, \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 60x_1 + 450x_2 - 240x_3 + 150x_4 + l_1 - l_2 + 30l_3, \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_3} = -120x_1 - 240x_2 + 800x_3 - 400x_4 + l_1 + 30l_3, \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_4} = 100x_1 + 150x_2 - 400x_3 + 1250x_4 + l_1 + 50l_3, \\
\dfrac{\partial L}{\partial l_1} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1, \\
\dfrac{\partial L}{\partial l_2} = x_1 - x_2, \\
\dfrac{\partial L}{\partial l_3} = 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 - 30.
\end{cases}
$$

Прирівнявши їх до нуля та розв'язавши систему, одержимо:
$x_1 = x_2 = 0{,}2803$; $x_3 = 0{,}2992$; $x_4 = 0{,}1402$; $V_п = 41{,}1956$.

Без врахування умови $x_1 = x_2$ значення часток такі: $x_1 = 0{,}3010$; $x_2 = 0{,}2506$; $x_3 = 0{,}2979$; $x_4 = 0{,}1505$; $V_п = 40{,}9466$.

Визначимо компромісний варіант [7; 12] на основі двох задач. Перша задача – це приклад 1 без умови $x_1 = 2x_2$. Друга задача має вигляд:

$$m_п = 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1;4}.$$

де $m_п$ – сподівана норма прибутку ПЦП. Значення m_i $\left(i = \overline{1;4}\right)$ взяті з прикладу 2.

Розв'язок цієї задачі такий: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $m_п^{\max} = 50$. Підставивши одержані значення у вираз для $V_п$ прикладу 1, одержимо $V_п = 625$.

Загальний вигляд компромісного варіанта такий:

$$z = x_5 \to \min,$$
$$V_п - V_п^{\min} \leq V_п^{\min} \cdot x_5,$$
$$m_п^{\max} - m_п \leq m_п^{\max} \cdot x_5,$$
$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1;5}.$$

У результаті підстановки виразів для $V_п$ прикладу 1 та $m_п$ із другої задачі матимемо:

$$z = x_5 \to \min,$$
$$100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 - 37{,}4396x_5 \leq 37{,}4396,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 \geq 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1;5}.$$

Її розв'язок такий $x_1 = 0{,}7088$; $x_2 = 0{,}2491$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0{,}0421$; $x_5 = 1{,}1491$. Тоді $m_п = 23{,}7540$; $V_п = 80{,}4597$. Порівнявши найбільші значення прибутку 50 та ризику 625, маємо істотне їх зменшення, особливо ризику.

У *подальших дослідженнях* розглядатимуться задачі приросту капіталу з використанням ПЦП.

Література

1. *Гончаренко В. Визначення оптимальної структури портфеля цінних паперів комерційного банку / В. Гончаренко // Ринок цінних паперів України. – 2011. – №3–4. – С. 67–71.*
2. *Вітлінський В. В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику / В. В. Вітлінський. – К. : ДЕМІУР, 1996. – 212 с.*

3. *Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навч.-метод. посіб. [для самост. вивч. дисц.] / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – К. : КНЕУ, 2000. – 292 с.*
4. *Лацик Г. М. Оптимізація структури портфеля іпотечних цінних паперів на фінансовому ринку України / Г. М. Лацик // Науковий вісник: фінанси, банки, інвестиції. – 2011. – №1. – С. 80–84.*
5. *Івахненко І. Активізація діяльності ринку цінних паперів як наслідок зростання його інвестиційних можливостей / І. Івахненко // Ринок цінних паперів України. – 2010. – №5–6. – С. 13–19.*
6. *Долінський Л. Б. Моделі оцінювання боргових цінних паперів із урахуванням імовірностей дефолтів / Л. Б. Долінський // Фінанси України. – 2010. – № 6. – С. 89–99.*
7. *Іващук О. Т. Економіко-математичне моделювання в аграрному менеджменті / О. Т. Іващук. – Тернопіль : Екон. думка, 2009. – 232 с.*
8. *Тэпман Л. Н. Риск в экономике / Л. Н. Тэпман. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 380 с.*
9. *Івченко І. Ю. Економічний ризик : навч. посіб. / І. Ю. Івченко. – К. : Центр навч. л-ри, 2004. – 304 с.*
10. *Рэдхэд К. Управление финансовыми рисками / К. Рэдхэд, С. Хьюс. – М. : Инфра-М, 1996. – 160 с.*
11. *Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів : навч. посіб. / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр. – Тернопіль : Навч. кн. –Богдан, 2006. – 304 с.*
12. *Катренко А. В. Дослідження операцій : підруч. / А. В. Катренко. – [3-тє вид., випр. та доп.]. – Львів : Магнолія – 2006, 2009. – 352 с.*

Редакція отримала матеріал 23 травня 2013 р.