УДК 517.44:004

В.І. Волинець, к.т.н. (Вінницький торговельно-економічний інститут КНТЕУ, Україна)

АНАЛІЗ ПОХИБОК РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ В АРИФМЕТИЦІ З РУХОМОЮ КРАПКОЮ

На основі статистичного методу проведено аналіз похибок рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових і ковзних інтервалах в арифметиці з рухомою крапкою. Отримано аналітичні вирази для визначення середньоквадратичних значень похибок обчислення перетворень, на підставі яких проведено порівняльний аналіз точності рекурентних методів обчислення.

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий інтервал вхідного сигналу включає відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається, лежить використання рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1, 2], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. В ряді робіт, зокрема, в [3 – 6], проведений аналіз похибок прямих та швидких методів обчислення ДПФ та ДПХ в арифметиці з рухомою крапкою. В основу аналізу покладений статистичний метод, при якому кожному джерелу елементарної похибки, що виникає внаслідок округлення або усікання результату операції додавання або множення, ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом, який є білим шумом. В якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичні значення (СКЗ) похибок обчислення перетворення та відношення СКЗ похибок обчислення до СКЗ перетворення, яке фізично інтерпретується як відношення потужності шуму до потужності сигналу.

В даній роботі ставиться задача провести аналіз арифметичних похибок рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах в арифметиці з рухомою крапкою.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах базуються на таких рекурентних виразах [2]:

$$F_{i+m}(k)=\left[F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}W^{nk}\right]\cdot W^{-mk}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} H_{i+m}(k)=&\left[H_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}\right]\cdot\cos\frac{2\pi mk}{N}-\\ &-\left[H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N}\right]\cdot\sin\frac{2\pi mk}{N}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$X_{i+m}(k)=X_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\alpha((n+i)k). \tag{3}$$

де $F_{i+m}(k)$, $F_i(k)$ – звичайне ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $H_{i+m}(k)$, $H_i(k)$ – звичайне ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $X_{i+m}(k)$, $X_i(k)$ – модифіковане ДПФ або ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $i=0,1,2,\dots$ – номер попереднього інтервалу вхідного сигналу; m – зсув поточного інтервалу вхідного сигналу відносно попереднього інтервалу в межах від 1 до $N-1$; $k=\overline{0,N-1}$ – номер значення перетворення; N – розмір перетворення; x(n) – послідовність вхідного сигналу; $W^{nk} = \exp(-j2\pi nk / N)$ – базові функції ядра звичайного перетворення Фур'є ($j = \sqrt{-1}$); $cas(2\pi nk / N) = \cos(2\pi nk / N) + \sin(2\pi nk / N)$ – базові функції ядра звичайного перетворення Хартлі; $\alpha((n+i)k)$ – базові функції ядра модифікованого перетворення, які для модифікованого ДПФ визначаються як $W^{(n+i)k}$, а для модифікованого ДПХ – як $cas(2\pi(n+i)k / N)$.

Проведемо аналіз похибок на прикладі рекурентних методів обчислення модифікованого ДПФ. Аналіз здійснюється на підставі виразів обчислення дійсної та уявної частин ДПФ за виразом (3), котрі для дійсної послідовності $x(n)$ мають відповідно такий вигляд:

$$\operatorname{Re} F_{i+m}(k) = \operatorname{Re} F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}, \tag{4}$$

$$\operatorname{Im} F_{i+m}(k) = \operatorname{Im} F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right). \tag{5}$$

Рекурентні вирази обчислення дійсних та уявних частин ДПФ з врахуванням похибок обчислення виразів (4) та (5) мають такий вигляд:

$$Q(\operatorname{Re} F_{i+m}(k)) = \left[Q(\operatorname{Re} F_i(k)) + Q\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N} \right) \right] \cdot \left(1 + \varepsilon_{д_{1,i+m}}\right), \tag{6}$$

$$Q(\operatorname{Im} F_{i+m}(k)) = \left[Q(\operatorname{Im} F_i(k)) + Q\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right) \right) \right] \cdot \left(1 + \varepsilon_{д_{2,i+m}}\right), \tag{7}$$

де

$$Q\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N} \right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cdot \left(1 + t_1 \varepsilon_{д_{n+3,i+m}}\right) \cdot \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N} \cdot \left(1 + \varepsilon_{м_{n+1,i+m}}\right) \times$$
$$\times \prod_{l=\begin{cases}1, n=0\\ n, n\neq 0\end{cases}}^{m-1} \left(1 + \varepsilon_{д_{m+l+2,i+m}}\right),$$

$$Q\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right) \right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cdot \left(1 + t_1 \varepsilon_{д_{2m+n+2,i+m}}\right) \cdot \left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right) \cdot \left(1 + \varepsilon_{м_{m+n,i+m}}\right) \times$$
$$\times \prod_{l=\begin{cases}1, n=0\\ n, n\neq 0\end{cases}}^{m-1} \left(1 + \varepsilon_{д_{3m+l+1,i+m}}\right),$$

де Q(X) – значення X з похибкою обчислення; $\varepsilon_д$, $\varepsilon_м$ – відносні похибки операцій додавання та множення відповідно; $t_1 = \begin{cases} 0, i+m < N \\ 1, i+m \geq N \end{cases}$.

На підставі виразів (6) та (7) можна отримати рекурентні вирази для визначення похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, які без врахування похибок обчислення вищих порядків мають такий вигляд:

$$E(\operatorname{Re} F_{i+m}(k)) = \operatorname{Re} F_{i+m}(k) \cdot \varepsilon_{д_{1,i+m}} + E(\operatorname{Re} F_i(k)) + E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N} \right), \tag{8}$$

$$E(\operatorname{Im} F_{i+m}(k)) = \operatorname{Im} F_{i+m}(k) \cdot \varepsilon_{д_{2,i+m}} + E(\operatorname{Im} F_i(k)) + E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right) \right), \tag{9}$$

де

$$E\left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N} \right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N} \left(t_1 \varepsilon_{д_{n+3,i+m}} + \varepsilon_{м_{n+1,i+m}} \right) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m-1} \varepsilon_{д_{m+l+2,i+m}} \sum_{n=0}^{l} \Delta x_{n+i} \cos\frac{2\pi(n+i)k}{N},$$

$$E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right)=\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\left(t_1\varepsilon_{д_{2m+n+2,i+m}}+\varepsilon_{м_{m+n,i+m}}\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon_{д_{3m+l+1,i+m}}\sum_{n=0}^{l}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right),$$

де $E(X)$ – абсолютна похибка обчислення значення X.

На підставі виразів (8) та (9) можна отримати рекурентні вирази для визначення дисперсій похибок обчислення дійсної та уявної частин ДПФ, котрі мають такий вигляд:

$$D\left[E\left(Re\,F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[Re\,F_{i+m}(k)\right]\cdot D\left[\varepsilon_{д}\right]+D\left[E\left(Re\,F_i(k)\right)\right]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi nk}{N}\right)\right], \quad (10)$$

$$D\left[E\left(Im\,F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[Im\,F_{i+m}(k)\right]\cdot D\left[\varepsilon_{д}\right]+D\left[E\left(Im\,F_i(k)\right)\right]+D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)\right)\right], \quad (11)$$

де

$$D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right]=D[\Delta x]\cdot\left[\left(t_1D[\varepsilon_{д}]+D[\varepsilon_{м}]\right)\sum_{n=0}^{m-1}\left(\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2+\right.$$
$$\left.+D[\varepsilon_{д}]\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{n=0}^{l}\left(\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2\right],$$

$$D\left[E\left(\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_{n+i}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)\right)\right]=D[\Delta x]\cdot\left[t_1\left(D[\varepsilon_{д}]+D[\varepsilon_{м}]\right)\sum_{n=0}^{m-1}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2+\right.$$
$$\left.+D[\varepsilon_{д}]\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{n=0}^{l}\left(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right)^2\right],$$

де $D[X]$ – дисперсія значення X.

На підставі виразів (10) та (11) рекурентний вираз для визначення дисперсії похибок обчислення ДПФ визначається як

$$D\left[E\left(F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[E\left(Re\,F_{i+m}(k)\right)\right]+D\left[E\left(Im\,F_{i+m}(k)\right)\right]=D\left[F_{i+m}(k)\right]\cdot D[\varepsilon_{д}]+$$
$$+D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_{д}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{д}]\right)+D\left[E\left(F_i(k)\right)\right]. \quad (12)$$

Ітераційний вираз для визначення дисперсії похибок обчислення ДПФ в залежності від номера ітерації p отримується на підставі рекурентного виразу (12) з урахуванням того, що для $i=0$ $E\left(F_0(k)\right)=0$, та має такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right]=D[\varepsilon_{д}]\sum_{l=1}^{p}D\left[F_{lm}(k)\right]+p\cdot D[\Delta x]\cdot\left(m\cdot\left(t_1D[\varepsilon_{д}]+D[\varepsilon_{м}]\right)+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{д}]\right). \quad (13)$$

Враховуючи вище визначені значення $D\left[F_{lm}(k)\right]$ та $D[\Delta x]$, вираз (13) приймає такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right]=\begin{cases}\left[m\frac{p^2+p}{2}D[\varepsilon_{д}]+p\cdot\left(m\cdot D[\varepsilon_{м}]+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{д}]\right)\right]\cdot D[x(n)], & p\le\frac{N}{m}\\ \left[N\cdot\left(p-\frac{N}{2m}+\frac{1}{2}\right)\cdot D[\varepsilon_{д}]+2\left(p-\frac{N}{m}\right)m\cdot D[\varepsilon_{д}]+\right.\\ \left.+\left(2p-\frac{N}{m}\right)\cdot\left(m\cdot D[\varepsilon_{м}]+\frac{m^2+m-2}{2}\cdot D[\varepsilon_{д}]\right)\right]\cdot D[x(n)], & p>\frac{N}{m}\end{cases} \quad (14)$$

Прийнявши $D[\varepsilon_{м}]=D[\varepsilon_{д}]=D[\varepsilon]$, вираз (14) приймає такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right]=\begin{cases}\left[m\dfrac{p^2+p}{2}+p\cdot\left(\dfrac{m^2+3m}{2}-1\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)],\ p\le\dfrac{N}{m}\\ \left[N\cdot\left(p-\dfrac{N}{2m}+\dfrac{1}{2}\right)+2\left(p-\dfrac{N}{m}\right)m+\right.\\ \left.+\left(2p-\dfrac{N}{m}\right)\cdot\left(\dfrac{m^2+3m-2}{2}\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)],\ p>\dfrac{N}{m}\end{cases}. \qquad (15)$$

Аналогічно визначається дисперсія похибок обчислення звичайного ДПФ, вираз для обчислення якої має такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right]=\begin{cases}\left[3m\dfrac{p^2+p}{2}+p\cdot\left(t_2m+\dfrac{m^2+m}{2}-1\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)],\ p\le\dfrac{N}{m}\\ \left[3N\cdot\left(p-\dfrac{N}{2m}+\dfrac{1}{2}\right)+2\left(p-\dfrac{N}{m}\right)m+\right.\\ \left.+\left(2p-\dfrac{N}{m}\right)\cdot\left(t_2m+\dfrac{m^2+m}{2}-1\right)\right]\cdot D[\varepsilon]\cdot D[x(n)],\ p>\dfrac{N}{m}\end{cases}. \qquad (16)$$

Висновки

В результаті аналізу похибок рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ в арифметиці з рухомою крапкою можна зробити такі основні висновки:

1. Точність рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ збігається.
2. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ втричі вища за точність обчислення звичайних ДПФ та ДПХ при $N >> m$ (відповідно $p >> m$) та збігається при $m \to N$.
3. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах збігається з точністю обчислення на ковзних інтервалах.
4. Точність рекурентних методів обчислення звичайних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах збігається з точністю обчислення на ковзних інтервалах при $N >> m$ та втричі нижча при $m \to N$.

Отримані результати можуть бути використані при апаратурній та програмній реалізації ДПФ та ДПХ на основі рекурентних методів обчислення для визначення розрядності даних в залежності від необхідної точності та кількості ітерацій обчислення.

Список літератури

1. *Волынец В.И.* Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница, 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88, № 2898 – Ук88.
2. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 1. – С. 77-80.
3. *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
4. *Боввель Е.И., Зайцева Е.М., Микулович В.И.* Ошибки цифровых систем, основанных на вычислении дискретного преобразования Фурье // Зарубежная радиоэлектроника. – 1981. – № 5. – С. 3-25.
5. *Zakhor A., Oppengejm A.V.* Quantization errors in the computation of the discrete Hartley transform // IEEE Trans. on ASSP. – 1987. – V. 35, № 11. – P. 1592-1602.
6. *Шихов Н.Б.* Дискретное преобразование Хартли для систем автоматизации эксперимента. – Минск: 1987. – 62 с. (Препр. / АН БССР, Ин-т техн. кибернетики: № 28).