

# РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ З ПІДВИЩЕНОЮ ТОЧНІСТЮ ОБЧИСЛЕННЯ В АРИФМЕТИЦІ З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ

Волинець В. І.

Вінницький інститут економіки ТНЕУ

Запропоновано рекурентні методи обчислення звичайних та модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі, точність яких в  $4$  та  $3p$ , де  $p$  – кількість ітерацій обчислення, рази вища за точність відомих методів обчислення звичайних та модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі відповідно при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді та збігається з точністю відомих методів для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

The recurrent methods of calculation of usual and modified discrete Fourier and Hartley transforms are offered, exactness of which in  $4$  and  $3p$ , where  $p$  is an amount of iterations of calculation, times higher than exactness of the known methods of calculation of usual and modified discrete Fourier and Hartley transforms accordingly during realization in fixed-point arithmetic for the case of truncating of results of operations of multiplications in an additional code and coincides with exactness of the known methods for other cases of approximation of results of operations of multiplication.

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, лежить використання рекурентних методів обчислення звичайних та модифікованих дискретних перетворень Фур'є (ДФФ) та Хартлі (ДПХ) на ковзних або стрибкових інтервалах [1-3], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення ДФФ і ДПХ, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. В роботі [4] проведений аналіз точності відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДФФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу [5], при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом, а в якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичні значення (СКЗ) похибок обчислення значень перетворень.

Отримані в роботі [4] СКЗ похибок обчислення значень перетворень показали, що точність відомих рекурентних методів обчислення ДФФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді в  $4$  та  $3p$ , де  $p$  – кількість ітерацій обчислення, рази нижча за точність обчислення для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та доповняльному коді при обчисленні звичайних та модифікованих ДФФ і ДПХ відповідно, в той час, як доповняльний код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно

простішою за реалізацію операції округлення.

Метою цієї роботи є запропонувати рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ, точність яких в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді збігалась би з точністю відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та доповняльному коді та не знижувалась для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

Оскільки обчислювальними операціями рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ є операції додавання (віднімання) та множення, то при їх реалізації в арифметиці з фіксованою комою джерелами похибок обчислення можуть бути лише похибки операцій множення, обумовлені округленням або усіканням результатів добутків, оскільки похибки операцій зсувів, виконання яких необхідно для усунення можливих переповнень розрядної сітки при виконанні операцій додавання (віднімання), відсутні внаслідок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не виникло переповнень.

Аналіз відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ [3] показав, що на СКЗ похибок обчислення значень перетворень в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді впливають середні значення похибок результатів операцій множення. Для усунення їх впливу запропоновано нові рекурентні методи для обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ, дисперсії похибок обчислення за якими збігаються з дисперсіями похибок обчислення відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ, а середні значення похибок обчислення для певних значень зсуву інтервалу вхідного сигналу та кількості ітерацій обчислення дорівнюють нулю, внаслідок чого СКЗ похибок обчислення визначаються лише значеннями їхніх дисперсій.

В табл. 1 наведено СКЗ похибок обчислення звичайного та модифікованого ДПФ на ковзних інтервалах для  $p$  ітерацій обчислення на основі відомих [3] та запропонованих рекурентних методів з врахуванням значень дисперсій та середніх значень похибок операцій множення для  $(b+1)$ -розрядних чисел, які наведено в [3]. Оскільки СКЗ похибок обчислення значень ДПФ дорівнюють сумі СКЗ похибок обчислення двох спряжених значень ДПХ, то для рекурентних методів обчислення ДПХ приймаються вдвічі менші за наведені в табл. 1 значення.

Порівнюючи точність відомих та запропонованих в цій роботі рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ, можна зробити такі основні висновки:

1. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ відповідно в 4 та  $3p$  рази вища за точність відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді.

2. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді збігається з точністю відомих методів обчислення ДПФ і ДПХ для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та

доповняльному коді.

3. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ збігається з точністю відомих методів обчислення ДПФ і ДПХ для випадків округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та доповняльному коді та усікання результатів операцій множення в прямому та оберненому коді.

Табл. 1. Точність методів обчислення ДПФ на ковзних інтервалах

Вид апроксимації результатів операцій множення	Методи обчислення	СКЗ похибки обчислення	
		звичайного ДПФ	модифікованого ДПФ
округлення прямого, оберненого та доповняльного коду	відомі та запропоновані	$\frac{p}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{p}{6} \cdot 2^{-2b}$
усікання прямого та оберненого коду	відомі та запропоновані	$\frac{4p}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{2p}{3} \cdot 2^{-2b}$
усікання доповняльного коду	відомі	$\frac{4p}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\left[ \frac{p}{6} + \frac{p^2}{2} \right] \cdot 2^{-2b}$
	запропоновані	$\frac{p}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{p}{6} \cdot 2^{-2b}$

Таким чином, запропоновані рекурентні методи обчислення звичайних та модифікованих ДПФ і ДПХ дозволяють підвищити точність обчислення в чотири та  $3p$  рази, де  $p$  – кількість ітерацій обчислення, при обчисленні відповідно звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ для випадку апроксимації результатів операцій множення в доповняльному коді, забезпечуючи таку ж точність обчислення як і відомі рекурентні методи обчислення для інших випадків апроксимації результатів операцій множення, що дозволяє використовувати запропоновані методи на практиці для різних кодів та видів апроксимації результатів операцій множення, зокрема, для випадку усікання доповняльного коду, оскільки доповняльний код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно простішою за реалізацію операції округлення.

#### Список літератури

1. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Волинец В.И.; Винницкий политехн. ин-т. – Винница, 1988. – 14 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 18.11.88; № 2898 – Ук88.
2. Цифровые анализаторы спектра / В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. Волинец В.И. Рекуррентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 1. – С. 77-80.
4. Волинец В.И. Аналіз точності рекуррентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – Т. 1, № 2. – С. 171-175.
5. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.