

РЕКУРЕНТНІ АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ

В.І. Волинець

При обробці двовимірних сигналів, зокрема, зображень часто виникає необхідність обчислювати спектри фрагментів сигналів, що сильно перекриваються один з одним. В цьому випадку обчислення спектра кожного фрагмента доцільно проводити рекурентно, використовуючи спектр попереднього фрагмента сигналу, оскільки ефективність рекурентних алгоритмів значно вища, ніж ефективність прямих та швидких алгоритмів обчислення [1].

Обчислення спектра базується на дискретному перетворенні Фур'є (ДПФ) [2] або дискретному перетворенні Хартлі (ДПХ) [3], котрі мають тісний зв'язок між собою. Існує ряд робіт, в яких описані рекурентні вирази обчислення двовимірного ДПФ. Зокрема, в роботі [4] описані рекурентні вирази обчислення двовимірного ДПФ при зсуві фрагментів сигналу на декілька (стрижкові інтервали) та один (ковзні інтервали) відлік по одному та двом вимірам, а в роботі [5] наведений рекурентний вираз обчислення двовимірного модифікованого ДПФ на ковзному інтервалі по одному виміру.

Метою даної роботи є отримання рекурентних виразів обчислення двовимірного ДПХ та енергетичного спектра на стрижкових і ковзних інтервалах та проведення порівняльного аналізу арифметичної складності рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ.

Визначимо двовимірні ДПФ та ДПХ як

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2), \quad (1)$$

де $X(k_1, k_2)$ та $x(n_1, n_2)$ – відповідно двовимірні спектр перетворення та вхідний сигнал розмірами $N_1 \times N_2$; $\alpha(n_1 k_1, n_2 k_2)$ – двовимірне ядро перетворення, котре для ДПФ $\in W^{n_1 k_1 / N_1 + n_2 k_2 / N_2}$, де $W = \exp(-j2\pi)$ ($j = \sqrt{-1}$), а для ДПХ – $\cos[2\pi(n_1 k_1 / N_1 + n_2 k_2 / N_2)]$, де $\cos(k) = \cos(k) + j \sin(k)$; $k_1 = 0, 1, \dots, N_1-1$, $k_2 = 0, 1, \dots, N_2-1$.

Нехай деякий фрагмент вхідного сигналу $x_0(n_1, n_2)$ має перетворення $X_0(k_1, k_2)$, і необхідно визначити перетворення $X_1(k_1, k_2)$ для фрагмента сигналу $x_1(n_1, n_2)$, який зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2)$.

Якщо фрагмент $x_1(n_1, n_2)$ зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2)$ на p_1 та p_2 відліків відповідно по вимірах n_1 та n_2 (рис. 1), то після циклічного зсуву фрагмента $x_1(n_1, n_2)$ на p_1 та p_2 відліків відповідно по вимірах n_1 та n_2 отримаємо фрагмент $x_1^c(n_1, n_2)$ (рис. 2).

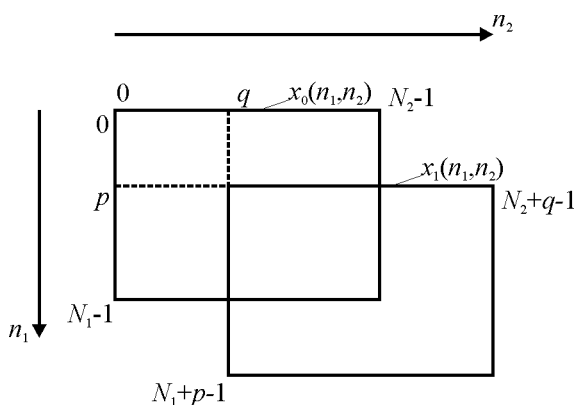


Рис. 1. Індексация значень фрагментів вхідного сигналу $x_0(n_1, n_2)$ та $x_1(n_1, n_2)$

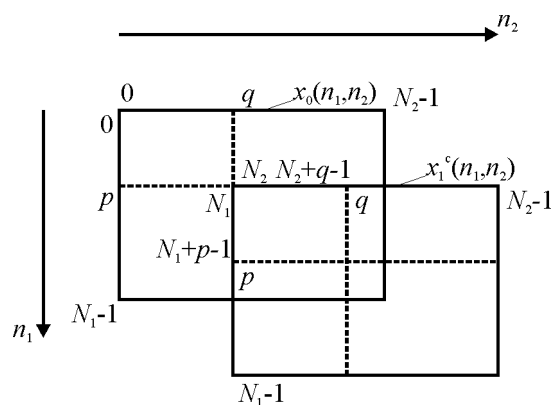


Рис. 2. Індексация значень фрагментів вхідного сигналу $x_0(n_1, n_2)$ та $x_1^c(n_1, n_2)$

Фрагменти $x_0(n_1, n_2)$ та $x_1^c(n_1, n_2)$ можна представити у вигляді матриць

$$x_0(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ та } x_1^c(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де A та A' - матриці розміром $p_1 \times p_2$; B та B' - матриці розміром $p_1 \times (N_2 - p_2)$; C та C' - матриці розміром $(N_1 - p_1) \times p_2$; D - матриця розміром $(N_1 - p_1) \times (N_2 - p_2)$. Тоді фрагмент $x_1^c(n_1, n_2)$ може бути визначений як

$$x_1^c(n_1, n_2) = x_0(n_1, n_2) + \begin{bmatrix} A' - A & B' - B \\ C' - C & O \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де O – нульова матриця розміром $(N_1-p_1) \times (N_2-p_2)$. Враховуючи вираз (3), зображення на рис. 2 та властивість лінійності перетворення, двовимірне перетворення $X_1^c(k_1, k_2)$ фрагмента $x_1^c(n_1, n_2)$ може бути обчислене таким чином:

$$X_1^c(k_1, k_2) = X_0(k_1, k_2) + \sum_{n_1=0}^{p_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} [x(N_1+n_1, N_2+n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2) + \sum_{n_1=0}^{p_1-1} \sum_{n_2=p_2}^{N_2-1} [x(N_1+n_1, n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2) + \sum_{n_1=p_1}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} [x(n_1, N_2+n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2). \quad (4)$$

Для $p_1=p_2=1$ вираз (4) приймає такий вигляд:

$$X_1^c(k_1, k_2) = X_0(k_1, k_2) + [x(N_1, N_2) - x(0, 0)] + \sum_{n_2=1}^{N_2-1} [x(N_1, n_2) - x(0, n_2)] \alpha(n_2 k_2) + \sum_{n_1=1}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha(n_1 k_1), \quad (5)$$

де $\alpha(n_i k_i)$ для $i=0, 1$ – одновимірне ядро перетворення, котре для ДПФ $\in W^{n_i k_i / N_i}$, а для ДПХ – $\cos[2\pi n_i k_i / N_i]$.

Якщо фрагмент $x_1(n_1, n_2)$ зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2)$ лише по одному виміру, наприклад, на p_2 відліків по виміру n_2 ($p_1=0$), то після циклічного зсуву фрагмента $x_1(n_1, n_2)$ на p_2 відліків по виміру n_2 отримаємо фрагмент $x_1^c(n_1, n_2)$. Фрагменти $x_0(n_1, n_2)$ та $x_1^c(n_1, n_2)$ у цьому випадку можна представити у вигляді матриць

$$x_0(n_1, n_2) = |E \mid F| \text{ та } x_1^c(n_1, n_2) = |E' \mid F|, \quad (6)$$

де E та E' – матриці розміром $N_1 \times p_2$; F – матриця розміром $N_1 \times (N_2-p_2)$. Тоді фрагмент $x_1^c(n_1, n_2)$ може бути визначений як

$$x_1^c(n_1, n_2) = x_0(n_1, n_2) + |E' - E \mid O|, \quad (7)$$

де O – нульова матриця розміром $N_1 \times (N_2-p_2)$. Враховуючи вираз (7) та властивість лінійності перетворення, двовимірне перетворення $X_1^c(k_1, k_2)$ фрагмента $x_1^c(n_1, n_2)$ може бути обчислене таким чином:

$$X_1^c(k_1, k_2) = X_0(k_1, k_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} [x(n_1, N_2+n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2). \quad (8)$$

Для $p_2=1$ вираз (8) приймає такий вигляд:

$$X_1^c(k_1, k_2) = X_0(k_1, k_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha(n_1 k_1). \quad (9)$$

Перетворення $X_1(k_1, k_2)$ може бути отримане з перетворення $X_1^c(k_1, k_2)$, враховуючи властивості зсуву перетворення, в результаті чого ДПФ та ДПХ мають відповідно такий вигляд:

$$X_1(k_1, k_2) = X_1^c(k_1, k_2) \cdot W^{-(p_1 k_1 / N_1 + p_2 k_2 / N_2)}, \quad (10)$$

$$X_1(k_1, k_2) = X_1^c(k_1, k_2) \cdot \cos[2\pi(p_1 k_1 / N_1 + p_2 k_2 / N_2)] - X_1^c(-k_1, -k_2) \cdot \sin[2\pi(p_1 k_1 / N_1 + p_2 k_2 / N_2)]. \quad (11)$$

Вирази (10) та (11) є рекурентними виразами обчислення відповідно двовимірного ДПФ та ДПХ, при цьому вираз (10) співпадає з виразом, наведеним у [4].

Враховуючи вирази (10) - (11) та те, що енергетичний спектр сигналу на основі ДПФ визначається як $|X(k_1, k_2)|^2$, а на основі ДПХ – як $[X^2(k_1, k_2) + X^2(-k_1, -k_2)]/2$, можна отримати рекурентні вирази обчислення енергетичного спектра, котрі з використанням ДПФ та ДПХ мають відповідно такий вигляд:

$$|X_1(k_1, k_2)|^2 = |X_1^c(k_1, k_2)|^2, \quad (12)$$

$$\{[X_1(k_1, k_2)]^2 + [X_1(-k_1, -k_2)]^2\} / 2 = \{[X_1^c(k_1, k_2)]^2 + [X_1^c(-k_1, -k_2)]^2\} / 2. \quad (13)$$

Для обчислення енергетичного спектра використовують також модифіковані перетворення Фур'є та Хартлі. Визначимо модифіковані двовимірні ДПФ та ДПХ як

$$X^M(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2), \quad (14)$$

де $i_1=0, 1, \dots, N_1$ та $i_2=0, 1, \dots, N_2$ – зміщення фрагмента вхідного сигналу відносно початку координат відповідно по вимірам n_1 та n_2 .

Якщо вираз (14) прийняти в якості модифікованого перетворення $X_0^M(k_1, k_2)$ фрагмента $x_0(n_1, n_2)$, зміщеного відносно початку координат на i_1 та i_2 відліків відповідно по вимірах n_1 та n_2 , то фрагмент $x_1(n_1, n_2)$, зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2)$ на p_1 та p_2 відліків відповідно по вимірах n_1 та n_2 , буде мати модифіковане перетворення

$$X_1^M(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1+p_1, n_2+p_2) \alpha((n_1+i_1+p_1)k_1, (n_2+i_2+p_2)k_2). \quad (15)$$

Якщо у виразі (15) виконати підстановку $l_1=n_1+p_1$ та $l_2=n_2+p_2$, то отримаємо такий вираз:

$$X_1^M(k_1, k_2) = \sum_{l_1=p_1}^{N_1+p_1-1} \sum_{l_2=p_2}^{N_2+p_2-1} x(l_1, l_2) \alpha((l_1+i_1)k_1, (l_2+i_2)k_2). \quad (16)$$

Вирази (14) та (16) можна перетворити таким чином:

$$\begin{aligned} X_0^M(k_1, k_2) &= \sum_{n_1=0}^{p_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} x(n_1, n_2) \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2) + \sum_{n_1=0}^{p_1-1} \sum_{n_2=p_2}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2) + \\ &+ \sum_{n_1=p_1}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} x(n_1, n_2) \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2) + \sum_{n_1=p_1}^{N_1-1} \sum_{n_2=p_2}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} X_1^M(k_1, k_2) &= \sum_{l_1=p_1}^{N_1-1} \sum_{l_2=p_2}^{N_2-1} x(l_1, l_2) \alpha((l_1+i_1)k_1, (l_2+i_2)k_2) + \sum_{l_1=p_1}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{p_2-1} x(l_1, N_2+l_2) \alpha((l_1+i_1)k_1, (l_2+i_2)k_2) + \\ &+ \sum_{l_1=0}^{p_1-1} \sum_{l_2=p_2}^{N_2-1} x(N_1+l_1, l_2) \alpha((l_1+i_1)k_1, (l_2+i_2)k_2) + \sum_{l_1=0}^{p_1-1} \sum_{l_2=0}^{p_2-1} x(N_1+l_1, N_2+l_2) \alpha((l_1+i_1)k_1, (l_2+i_2)k_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Порівнюючи вирази (17) та (18), визначаємо, що

$$\begin{aligned} X_1^M(k_1, k_2) &= X_0^M(k_1, k_2) + \sum_{n_1=0}^{p_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} [x(N_1+n_1, N_2+n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2) + \\ &+ \sum_{n_1=0}^{p_1-1} \sum_{n_2=p_2}^{N_2-1} [x(N_1+n_1, n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2) + \\ &+ \sum_{n_1=p_1}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} [x(n_1, N_2+n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Для $p_1=p_2=1$ вираз (19) приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned} X_1^M(k_1, k_2) &= X_0^M(k_1, k_2) + [x(N_1, N_2) - x(0, 0)] \alpha(i_1 k_1, i_2 k_2) + \\ &+ \sum_{n_2=1}^{N_2-1} [x(N_1, n_2) - x(0, n_2)] \alpha(i_1 k_1, (n_2+i_2)k_2) + \sum_{n_1=1}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha((n_1+i_1)k_1, i_2 k_2). \end{aligned} \quad (20)$$

Враховуючи властивості ядер перетворень, вираз (20) для ДПФ та ДПХ приймає відповідно такий вигляд:

$$\begin{aligned} X_1^M(k_1, k_2) &= X_0^M(k_1, k_2) + [x(N_1, N_2) - x(0, 0)] \alpha(i_1 k_1, i_2 k_2) + \\ &+ \alpha(i_1 k_1) \sum_{n_2=1}^{N_2-1} [x(N_1, n_2) - x(0, n_2)] \alpha((n_2+i_2)k_2) + \alpha(i_2 k_2) \sum_{n_1=1}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha((n_1+i_1)k_1), \\ X_1^M(k_1, k_2) &= X_0^M(k_1, k_2) + [x(N_1, N_2) - x(0, 0)] \alpha(i_1 k_1, i_2 k_2) + \cos(i_1 k_1) \times \\ &\times \sum_{n_2=1}^{N_2-1} [x(N_1, n_2) - x(0, n_2)] \alpha((n_2+i_2)k_2) + \sin(i_1 k_1) \sum_{n_2=1}^{N_2-1} [x(N_1, n_2) - x(0, n_2)] \alpha(-(n_2+i_2)k_2) + \end{aligned} \quad (21)$$

$$+ \cos(i_2 k_2) \sum_{n_1=1}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha((n_1 + i_1) k_1) + \sin(i_2 k_2) \sum_{n_1=1}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha(-(n_1 + i_1) k_1). \quad (22)$$

Якщо фрагмент $x_1(n_1, n_2)$ зміщується відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2)$ лише по одному виміру, наприклад, на p_2 відліків по виміру n_2 ($i_1=p_1=0$), то перетворення $X_1^M(k_1, k_2)$ буде мати такий вигляд

$$X_1^M(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2 + p_2) \alpha(n_1 k_1, (n_2 + i_2 + p_2) k_2). \quad (23)$$

Виконавши у виразі (23) підстановку $l_2 = n_2 + p_2$, отримаємо такий вираз:

$$X_1^M(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=p_2}^{N_1-1+N_2+p_2-1} x(n_1, l_2) \alpha(n_1 k_1, (l_2 + i_2) k_2). \quad (24)$$

Вирази (14) та (24) можна перетворити таким чином:

$$X_0^M(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} x(n_1, n_2) \alpha(n_1 k_1, (n_2 + i_2) k_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=p_2}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \alpha(n_1 k_1, (n_2 + i_2) k_2), \quad (25)$$

$$X_1^M(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=p_2}^{N_2-1} x(n_1, l_2) \alpha(n_1 k_1, (l_2 + i_2) k_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{p_2-1} x(n_1, N_2 + l_2) \alpha(n_1 k_1, (l_2 + i_2) k_2). \quad (26)$$

Порівнюючи вирази (25) та (26), визначаємо, що

$$X_1^M(k_1, k_2) = X_0^M(k_1, k_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{p_2-1} [x(n_1, N_2 + n_2) - x(n_1, n_2)] \alpha(n_1 k_1, (n_2 + i_2) k_2). \quad (27)$$

Для $p_2=1$ вираз (27) приймає такий вигляд:

$$X_1^M(k_1, k_2) = X_0^M(k_1, k_2) + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha(n_1 k_1, i_2 k_2). \quad (28)$$

Враховуючи властивості ядер перетворень, вираз (28) для ДПФ та ДПХ приймає відповідно такий вигляд:

$$X_1^M(k_1, k_2) = X_0^M(k_1, k_2) + \alpha(i_2 k_2) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha(n_1 k_1), \quad (29)$$

$$X_1^M(k_1, k_2) = X_0^M(k_1, k_2) + \cos(i_2 k_2) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha(n_1 k_1) + \sin(i_2 k_2) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [x(n_1, N_2) - x(n_1, 0)] \alpha(-n_1 k_1). \quad (30)$$

Вирази (19), (27) та (20) - (22), (28) - (30) є рекурентними виразами обчислення модифікованого ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах при зсуві фрагмента вхідного сигналу по двом або одному виміру відповідно, при цьому вираз (28) співпадає з виразом, наведеним у [5].

Проведемо порівняльний аналіз арифметичної складності рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах по двом та одному виміру на основі виразів (10) - (11) із врахуванням виразів (4) - (5), (8) - (9) та на основі виразів (19), (21) - (22) і (27), (29) - (30) для випадку, коли вхідний сигнал $x(n_1, n_2)$ є дійсним, враховуючи, що обчислення ДПФ для одного з коефіцієнтів k_i , наприклад k_1 , необхідно виконати лише для $k_1=0, 1, \dots, N_1/2-1$, оскільки ДПФ дійсного сигналу має комплексно-спряжений характер. Крім того, прийемо, що операція комплексного множення вимагає виконання чотирьох операцій дійсного множення та двох операцій дійсного додавання.

Аналіз рекурентних виразів обчислення звичайних та модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах показує, що обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ зводиться до послідовного виконання таких етапів:

1. Обчислення різниць значень вхідного сигналу.
2. Обчислення укорочених двовимірних або укорочених чи повних одновимірних перетворень на стрибкових та ковзних інтервалах відповідно.
3. Множення доданків на коефіцієнти та/або сумування доданків рекурентних виразів обчислення $X_1^M(k_1, k_2)$ або $X_1^C(k_1, k_2)$.

4. Обчислення виразів (10) – (11) при обчисленні звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ.

В табл. 1 – 4 наведені відомості про арифметичну складність рекурентних алгоритмів обчислення звичайних та модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах по двом та одному виміру як по окремих етапах обчислення так і загалом, аналізуючи які можна зробити такі основні висновки:

1. Рекурентні алгоритми обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ мають однакову арифметичну складність, за винятком рекурентних алгоритмів обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по двом вимірам, в яких алгоритми обчислення ДПХ несуттєво поступаються алгоритмам обчислення ДПФ за кількістю операцій дійсного додавання, і при $N_1=N_2$ їх відношення складає 1,09 разу.

2. Арифметична складність p -кратного виконання рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах менша, ніж арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах у $\approx kN$ разу, де $k=2/7 \div 1/2$.

3. Арифметична складність двократного використання рекурентних алгоритмів обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру більша, ніж арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по двом вимірам за кількістю операцій дійсного множення, і при $N_1=N_2$ їх відношення складає 1,5 разу. Арифметична складність двократного використання рекурентних алгоритмів обчислення модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру менша, ніж арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по двом вимірам за кількістю операцій дійсного множення та додавання, і при $N_1=N_2$ їх відношення складає 1,17 разу.

4. Арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по двом вимірам менша, ніж арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ, і при $N_1=N_2$ їх відношення складає 1,75 та $1,17 \div 1,27$ рази за кількістю операцій дійсного множення та додавання відповідно. Рекурентні алгоритми обчислення звичайних та модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру мають однакову арифметичну складність.

5. З врахуванням того, що арифметична складність обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ складає $(N_1N_2)^2$ і $(N_1N_2-1)N_1N_2$ операцій дійсного множення та додавання відповідно при використанні прямого методу обчислення та $N_1N_2(N_2+2N_1)$ і $N_1N_2(N_1+N_2-1)$ операцій дійсного множення та додавання відповідно при використанні рядково-стовпчикового методу обчислення, рекурентні алгоритми обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по двом вимірам вимагають в $N^2/4$ і $N^2/6$ разу менше операцій дійсного множення та додавання відповідно в порівнянні з прямим методом обчислення та в $3N/4$ і $N/3$ разу менше операцій множення та додавання відповідно в порівнянні з рядково-стовпчиковим методом обчислення. У свою чергу, рекурентні алгоритми обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру підвищують відношення по кількості операцій дійсного множення та додавання відповідно в $4/3$ та 2 рази.

Таким чином, для обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах по двом та одному виміру доцільно використовувати відповідні рекурентні алгоритми обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах. При цьому рекурентні алгоритми обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру можуть бути застосовані для обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по двом вимірам. В цьому випадку в 1,5 разу підвищується арифметична складність обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ за кількістю операцій дійсного множення, однак спрощується реалізація алгоритму обчислення.

Таблиця 1. Арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах по двом вимірам

№ етапу обчислення	Рекурентні алгоритми обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразу (4)		Рекурентні алгоритми обчислення модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразу (19)	
	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання
1		$A=N_1p_2+N_2p_1-p_1p_2$		$A=N_1p_2+N_2p_1-p_1p_2$
2	AN_1N_2	$(A-3)N_1N_2$	AN_1N_2	$(A-3)N_1N_2$
3		$3N_1N_2$		$3N_1N_2$
4	$2N_1N_2$	N_1N_2		
Загалом	$(A+2)N_1N_2$	$A(N_1N_2+1)+N_1N_2$	AN_1N_2	$A(N_1N_2+1)$

Таблиця 2. Арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах по одному виміру

№ етапу обчислення	Рекурентні алгоритми обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразу (8)		Рекурентні алгоритми обчислення модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразу (27)	
	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання
1		$B=N_1p_2$		$B=N_1p_2$
2	BN_1N_2	$(B-1)N_1N_2$	BN_1N_2	$(B-1)N_1N_2$
3		N_1N_2		N_1N_2
4	$2N_1N_2$	N_1N_2		
Загалом	$(B+2)N_1N_2$	$B(N_1N_2+1)+N_1N_2$	BN_1N_2	$B(N_1N_2+1)$

Таблиця 3. Арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по двом вимірам

№ етапу обчислення	Рекурентні алгоритми обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразу (5)		Рекурентні алгоритми обчислення модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразів (21) – (22)	
	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання
1		N_1+N_2+1		N_1+N_2+1
2	$(N_1-1)N_1+(N_2-1)N_2$	$(N_1-2)N_1+(N_2-2)N_2$	$(N_1-1)N_1+(N_2-1)N_2$	$(N_1-2)N_1+(N_2-2)N_2$
3		$2,5N_1N_2$ (Фур'є) $3N_1N_2$ (Хартлі)	$5N_1N_2$	$5N_1N_2$
4	$2N_1N_2$	N_1N_2		
Загалом	$N_1^2+N_2^2+2N_1N_2-(N_1+N_2)$	$N_1^2+N_2^2+3,5N_1N_2-(N_1+N_2)-1+0,5N_1N_2$ (Хартлі)	$N_1^2+N_2^2+5N_1N_2-(N_1+N_2)$	$N_1^2+N_2^2+5N_1N_2-(N_1+N_2)-1$

Таблиця 4. Арифметична складність рекурентних алгоритмів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру

№ етапу обчислення	Рекурентні алгоритми обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразу (9)		Рекурентні алгоритми обчислення модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на основі виразів (29) – (30)	
	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання	Кількість операцій дійсного множення	Кількість операцій дійсного додавання
1		N_1		N_1
2	N_1^2	$(N_1-1)N_1$	N_1^2	$(N_1-1)N_1$
3		N_1N_2	$2N_1N_2$	$2N_1N_2$
4	$2N_1N_2$	N_1N_2		
Загалом	$N_1^2+2N_1N_2$	$N_1^2+2N_1N_2$	$N_1^2+2N_1N_2$	$N_1^2+2N_1N_2$

ЛІТЕРАТУРА

1. Волинець В.И. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница. – 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИТИ 18.11.88, № 2898-Ук88.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Александрова. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
3. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 175 с.
4. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
5. Цифровые анализаторы спектра / В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.