

## ВИКОРИСТАННЯ KEYС-МЕТОДУ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ «АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ У МАТЕМАТИЦІ»

### APPLICATION OF THE CASE METHOD IN STUDING THE COURSE “ASYMPTOTIC METHODS IN MATHEMATICS”

Продемонстровано застосування методу кейсів (case-study) при вивченні теми “Асимптотичні методи розв’язування лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами” з курсу “Асимптотичні методи у математиці”. Охарактеризовано вимоги стосовно навчального процесу у закладах вищої освіти (ЗВО) згідно з концепцією математичної освіти в Україні. Зосереджено увагу на необхідності використання методу проблемного навчання – методу кейсів. Розкрито зміст поняття “кейс”. Перелічено переваги методу case-study, основні вимоги до нього. Проаналізовано важливість вибраної теми “Асимптотичні методи розв’язування лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами”, її прикладний характер. Розглянуто основні етапи дослідження, здійсненого студентами фізико-математичного факультету при знаходженні асимптотичного розв’язку лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами, який буде достатньо точним у певній області значень, та встановленні оцінки похибки цього розв’язку. Виділено основні кроки розв’язання поставленої проблеми. Виокремлено чотири відомі методи, з допомогою яких розв’язується лінійне диференціальне рівняння із змінними коефіцієнтами, серед яких метод Вентцеля – Крамерса - Бріллюена, метод усереднення, метод багатомасштабних розкладів, метод граничних функцій. Як результат дослідницької роботи, для кожного з методів встановлені фактори, від яких залежить їх точність, сформульовані переваги та недоліки. На фінальному етапі дослідження зазначені методи, що дають найкращу точність наближеного розв’язку лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами. Вказано, що метод case-study активізує процес навчання, формує позитивну мотивацію та оновлює творчий потенціал викладачів.

**Ключові слова:** кейс, метод кейсів, лінійні диференціальні рівняння із змінними коефі-

цієнтами, асимптотичний розв’язок, асимптотичні методи.

The application of the case-study method in the study of the topic “Asymptotic methods for solving linear differential equations with variable coefficients” from the course “Asymptotic methods in mathematics” is demonstrated. The requirements for the educational process in higher education institutions (HEI) according to the concept of mathematical education in Ukraine are characterized. Attention is focused on the need to use the problem learning method - the case method. The content of the concept of “case” is disclosed. The advantages of the case-study method and the basic requirements for it are listed. The importance of the chosen topic “Asymptotic methods of solving linear differential equations with variable coefficients,” its applied nature is analyzed. The main stages of the research carried out by students of the Faculty of Physics and Mathematics when finding an asymptotic solution of a linear differential equation with variable coefficients, which will be sufficiently accurate in a certain range of values, and establishing an estimate of the error of this solution, are considered. The main steps for solving the problem are highlighted. Four known methods were singled out, with the help of which a linear differential equation with variable coefficients is solved, including the Wentzel-Kramers-Brillouin method, the averaging method, the method of multiscale expansions, the method of boundary functions. As a result of the research work, for each of the methods, the factors on which their accuracy depends, the advantages and disadvantages are formulated. At the final stage of the study, methods are indicated that give the best accuracy of the approximate solution of a linear differential equation with variable coefficients. It is indicated that the case-study method activates the learning process, forms a positive motivation and updates the creative potential of teachers.

**Key words:** case, case method, linear differential equations with variable coefficients, asymptotic solution, asymptotic methods.

УДК 378.16:51

DOI <https://doi.org/10.32782/ip/90.27>

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

**Хохлова Л.Г.,**

[orcid.org/0000-0002-9818-1051](https://orcid.org/0000-0002-9818-1051)

канд. фіз.-мат. наук, доцент,  
доцент кафедри математики  
та методики її навчання  
Тернопільського національного  
педагогічного університету  
імені Володимира Гнатюка

**Хома Н.Г.,**

[orcid.org/0000-0003-2981-0296](https://orcid.org/0000-0003-2981-0296)

канд. фіз.-мат. наук, доцент,  
доцент кафедри економічної  
кібернетики та інформатики  
Західноукраїнського національного  
університету

**Постановка проблеми.** Згідно з Концепцією математичної освіти в Україні навчальний процес у закладах вищої освіти (ЗВО) націлений на формування соціальної, комунікативної, креативної, комп’ютерної та інших компетентностей студентів [3, с. 189]. З цією метою у навчанні використовують системно-діяльнісний підхід. Один з його методів – метод проблемного навчання, а одна з його форм – метод кейсів (case-study). Завдяки методу кейсів студенти усвідомлюють, як одержані теоретичні знання допомагають вирішувати поставлені практичні завдання [6, с. 423].

Зазначений метод, оптимально поєднуючи теорію та практику, сприяє розвитку навичок роботи з різноманітними джерелами інформації. Проблема, окреслена в кейсі, перетворюється на творчий

процес, формуючи колективну пізнавальну діяльність. Студенти дотримуються правил спілкування, які включають роботу в групах, уміння вислухати співрозмовника, аргументацію власної точки зору, побудову логічних схем для розв’язання проблеми. Поряд з цим вчать думати, аналізувати, розвивати навички ведення дискусії [10, с. 20].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Серед українських учених і викладачів, які активно використовують метод кейсів (метод ситуаційних вправ) у педагогічній та науковій діяльності, варто відмітити О. Мальцеву, Т. Вахновську, В. Гладченко, О. Мальцеву, О. Савченко. Особливості застосування методу ситуаційних вправ у навчанні математики викладені в роботах В. Ачкана, Р. Бабака, К. Власенко, О. Мосіюка, Г. Онищенко,

Я. Сікори, Ж. Худой. Питання впровадження кейс-методу у навчальний процес висвітлене у працях українських дослідників М. Астаф'євої, А. Вітюка, О. Жерновникової, І. Мітельмана, Є. Неліна, О. Сушко.

Навчальна дисципліна «Асимптотичні методи у математиці» розглядає наступні питання: класифікація асимптотичних методів, асимптотичні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь, асимптотичні методи розв'язування трансцендентних рівнянь, знаходження визначених інтегралів за допомогою розкладання, асимптотичні методи розв'язання рівняння Дуффінга, асимптотичні методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, асимптотичні методи розв'язування диференціальних рівнянь із великим параметром.

**Метою статті** є ознайомлення з досвідом реалізації методу case-study при вивченні теми «Асимптотичні методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами» з курсу «Асимптотичні методи у математиці».

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Кейс (case) у перекладі з англійської – випадок [7, с. 128]. Кейси почали застосовуватися на початку ХХ століття в галузі економіки, права та медицини. У 1921 р. Гарвардська школа бізнесу (США) вперше використала метод case-study в навчальному процесі.

На сьогодні відомі дві школи case-study: у Гарварді (американська) та у Манчестері (європейська). Перша спрямовує на пошук єдиного правильного рішення, інша – схвалює декілька варіантів розв'язання проблеми.

У навчальному процесі пропонують застосовувати практичні, навчальні та науково-дослідні види кейсів.

Кейси бувають у вигляді [8, с. 20]:

1) ілюстративних навчальних ситуацій (за допомогою практичного прикладу демонструють алгоритм прийняття правильного рішення);

2) навчальних ситуацій з формулюванням проблеми (діагностика ситуації та формування навичок самостійного прийняття рішення);

3) навчальних ситуацій без формулювання проблеми (опис складнішої ситуації, відсутнє чітке формулювання проблеми, є набір статистичних даних, оцінки громадськості тощо);

4) прикладних вправ (опис конкретної ситуації, пропонується знайти шляхи виходу з неї).

При написанні кейса виділяють два етапи. Перший етап охоплює роботу з написання кейса. Далі викладач працює в аудиторії. Він організує малі групи та проводить дискусію, здійснює оцінку внеску студентів в аналіз ситуації.

Структура освітнього кейсу містить такі компоненти, як ситуація – випадок, проблема, історія з життя; зміст ситуації; коментар – питання (завдання) для роботи з кейсом.

Зауважимо, що багато реальних процесів у природі та техніці описуються складними математичними моделями, які містять малі параметри [9, с. 74]. Для прикладу, в механіці це малі відхилення від ідеальної форми тіла, в електродинаміці – малі збурення електромагнітного поля тощо. Асимптотичні методи допомагають нам спростити ці моделі та одержати розуміння основних закономірностей процесів, що відбуваються.

Важливим та цікавим у темі «Асимптотичні методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами» є питання дослідження розв'язності лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами виду:

$$p_2(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = r(x). \quad (1)$$

Задача полягає в тому, щоб знайти асимптотичний розв'язок цього рівняння, а саме, наближений розв'язок, який є достатньо точним за певних граничних умов (наприклад, при  $x \rightarrow \infty$  або при  $x \rightarrow 0$ ) [11, с. 115].

Розв'язанням даної задачі займалися студенти фізико-математичного факультету, які опанували курс «Асимптотичні методи у математиці».

Загальновідомо, що робота з кейсом у навчальному процесі складається з таких етапів:

1. Самостійне опрацювання матеріалів кейса (постановка проблеми, формулювання альтернативи, подання пропозицій для вирішення). На цьому етапі основним завданням для викладача є – роздати текст кейса студентам до проведення дискусії, стимулювати до співпраці, виявлення ініціативи при обговоренні.

2. Робота в малих групах (усвідомити основну проблему, шляхи її розв'язання). Викладач ділить учасників на групи. Кожна з них готує відповіді на поставлені запитання протягом конкретного проміжку часу. У групах є спікер, який озвучує прийняті рішення, узгодивши варіанти відповідей. Виступ спікера оцінюється з врахуванням змістовного аспекту, техніки презентації, ефективності використання технічних засобів.

3. Експертиза результатів груп в межах навчальної групи. Здійснюється аналіз ефективності проведеного заняття, проблем при організації колективної співпраці, ставляться нові завдання [2, с. 85].

Перший етап включає ознайомлення студентів з постановкою проблеми. В нашому випадку вона формулюється так: «Знайти асимптотичний розв'язок лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами виду (1), який буде достатньо точним у певній області значень  $x$ , та оцінити похибку цього розв'язку».

Основні кроки для розв'язання задачі:

1. Знайти малий параметр  $\varepsilon$ , який характеризує поведінку коефіцієнтів  $p_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , або правої частини  $r(x)$ .

2. Зобразити шуканий розв'язок  $u(x)$  у вигляді асимптотичного ряду за степенями  $\epsilon$ .

3. Підставити цей ряд у задане рівняння та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях  $\epsilon$ .

4. Розв'язати одержану систему рівнянь – визначити члени асимптотичного ряду.

5. Оцінити похибку наближеного розв'язку.

Формулюючи альтернативи, ми передбачаємо огляд чотирьох відомих методів [2, с. 5], з допомогою яких розв'язується лінійне диференціальне рівняння із змінними коефіцієнтами виду (1). Серед них Метод ВКБ (Вентцеля-Крамерса-Бріллюена), метод усереднення, метод багатомасштабних розкладів, метод граничних функцій. Здійснивши аналіз особливостей кожного методу, студенти повинні були дати відповідь на запитання, який з них забезпечує найменшу похибку наближеного розв'язку.

На другому етапі проводиться розбиття студентів на чотири підгрупи. Протягом двох тижнів опрацьовується теоретичний матеріал, що стосується відшукування наближеного розв'язку лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами виду (1). Вибирається спікер, котрий створюватиме презентацію досліджень своєї групи. Наголошується на технічній привабливості презентації.

На третьому етапі – експертиза результатів. Встановлюємо ефективність проведеного заняття, вирішуємо проблеми, пов'язані з організацією роботи в колективі, підбиваємо підсумки.

При опрацюванні відповідних теоретичних положень студенти повинні були встановити фактори, від яких залежить точність методів, вказати їх переваги та недоліки. Результати досліджень наведені нижче:

Таблиця 1

**Метод Вентцеля-Крамерса-Бріллюена**

Назва методу	Фактори, які впливають на точність методу
Метод Вентцеля-Крамерса-Бріллюена	Мала довжина хвилі
	Повільна зміна потенціалу
	Класично дозволені області
	Класично заборонені області
	Точки повороту

**Переваги методу.** Точність методу ВКБ є досить високою в багатьох практичних ситуаціях, особливо коли енергія частинки є великою в порівнянні зі зміною потенціалу, а потенціальна енергія змінюється повільно.

**Недоліки методу.** Біля точок повороту чи при швидких змінах потенціалу, метод втрачає точність та потребує додаткових корекцій (табл. 2).

**Переваги методу.** Точність методу є досить високою в системах з повільними змінами, слабкими нелінійностями. Дозволяє отримувати добрі результати для середньої динаміки системи на великих часових інтервалах.

Таблиця 2

**Метод усереднення**

Назва методу	Фактори, які впливають на точність методу
Метод усереднення	Мала параметрична зміна (малий параметр)
	Повільні зміни системи
	Тривалість часових інтервалів
	Нелінійність системи:
	Резонансні ефекти:
Первинні умови	

**Недоліки методу.** Метод втрачає точність у випадках сильних нелінійностей, швидких змін параметрів або наявності резонансних ефектів.

Таблиця 3

**Метод багатомасштабних розкладів**

Назва методу	Фактори, які впливають на точність методу
Метод багатомасштабних розкладів	Чітке розділення масштабів
	Малий параметр
	Нелінійність системи
	Тривалість часових інтервалів
	Взаємодія між масштабами
	Кількість масштабів

**Переваги методу.** Метод дозволяє чітко розділити вплив різних масштабів на динаміку системи, аналізувати складні системи, в яких одночасно присутні як швидкі, так і повільні процеси. Дозволяє отримати аналітичні розв'язки, що є важливим для розуміння поведінки системи.

**Недоліки методу.** Втрачає точність у випадках, коли різні масштаби сильно взаємодіють між собою або коли нелінійні ефекти сильно впливають на всі масштаби. Складність методу зростає з кількістю масштабів, які вимагають складніших розрахунків, що може привести до збільшення похибок.

Таблиця 4

**Метод граничних функцій**

Назва методу	Фактори, які впливають на точність методу
Метод граничних функцій	Наявність малого параметра
	Швидкі зміни поблизу меж (прикордонних шарів)
	Зшивання розв'язків
	Нелінійність системи
	Довжина прикордонних шарів
	Наявність резонансних чи збурювальних ефектів

**Переваги методу.** Дозволяє ефективно описати складну поведінку систем поблизу межових областей та в областях з різкими змінами розв'язку [1, с. 95]. Добре працює для систем із малим параметром і дає високоточні результати,

коли застосовується для задач із різко вираженими межовими шарами.

**Недоліки методу.** Є складним для реалізації, особливо коли потрібно точно визначити межові шари і правильно зшити розв'язки в різних областях. Може втратити точність у випадках сильних нелінійностей або резонансних ефектів, які не враховуються у стандартних схемах наближення.

Під час експертизи результатів було з'ясовано, що найкращими для дослідження лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами виявилися метод усереднення та метод багатомасштабних розкладів.

Як показує досвід, використання кейс-методу для навчання активізує студентів. У них формується позитивна мотивація до навчання, особистісні якості та компетенції. З іншого боку, викладач оновлює свій творчий потенціал. На сьогодні є великий дефіцит кейсів, які використовують викладачі ЗВО. Тому педагоги, які користуються методом Case-Study, змушені самостійно розробляти і писати кейси.

**Висновки.** Застосування методу кейсів в навчальному процесі поєднується з системним підходом, практичною спрямованістю навчального курсу, співпрацею викладача та студентів. Хоча метод не позбавлений недоліків (можливість епізодичного застосування в навчальному процесі, великий обсяг підготовки, складність у створенні креативних груп), він дозволяє не лише покращити базові знання з математичних дисциплін, але й формує готовність працювати з сучасними матеріалами та технологіями. Отже, подальшого вивчення вимагає теоретична та методична підтримка кейс-технологій у ЗВО.

#### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Бразалук О. К., Гоман О. К., Бразалук Ю. В. Застосування методу граничних елементів до розв'язування крайових задач в областях з рухомими межами. *Системи та технології*. 2021. № 2 (62). С. 94–103.
2. Грищак В. З., Д'яченко Н. М., Панасенко Є. В. Асимптотичні методи розв'язання крайових та початкових задач : навч. посіб. Запоріжжя : ЗНУ, 2021. 68 с.
3. Єгорова В. В. Сутність поняття “компетентнісний підхід” та його місце у педагогіці вищої школи. *Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: Педагогіка*. 2009. Вип. 43 (1). С. 187–191.
4. Єрьомін А. С. Забезпечення навчальної роботи з використанням кейс-методу. *Інновації в освіті*, 2010. № 4. С. 77–90.
5. Перестюк М. О. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь. Київ : КНУ ім. Т. Шевченка, 2015. 138 с.
6. Пустовойт Б. А., Федяй І. О. Кейс-технологія як один із сучасних методів викладання у закладах вищої освіти для формування компетентності майбутніх фахівців. *Наукові записки кафедри педагогіки Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна*. 2018. № 43. С. 422–430.
7. Сергієнко М. В. Кейс-метод як форма інтерактивного навчання майбутніх фахівців. *Історико-педагогічні студії*. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. Вип. 9-10. С. 127–132.
8. Сисоєва С. О. Інтерактивні технології навчання дорослих: навч.-метод. посіб. Київ: ВД «ЕКМО», 2011. 320 с.
9. Ситуаційна методика навчання: теорія і практика / упоряд. О. Сидоренко, В. Чуба. Київ: Центр інновацій та розвитку. Консорціум із удосконалення менеджмент-освіти в Україні. 2001. 256 с.
10. Сурмін Ю. П. Кейс-метод: становлення та розвиток в Україні. *Вісник Національної академії державного управління при Президентові України*, 2015. № 2. С. 19–28. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vnadu\\_2015\\_2\\_5](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vnadu_2015_2_5) (дата звернення)
11. Хаць Р.В. Асимптотичні оцінки та їх застосування: навч. посіб. Дрогобич : ДДПУ ім. Івана Франка, 2023. 130 с.
12. P. Lapoule, R. Lynch. The Case Study method: exploring the link between teaching and research. *Journal of Higher Education Policy and Management*. 2018. 40(3). P. 1–16.

Дата першого надходження рукопису до видання: 17.11.2025

Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 19.12.2025

Дата публікації: 31.12.2025