ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АН УССР

На правах рукописи

ЕРЕМЕНКО Валерий Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель -
член-корреспондент АН УССР,
доктор физико-математических
наук, профессор А.М.САМОЙЛЕНКО

Киев - 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ стр.

ВВЕДЕНИЕ..... 4

ГЛАВА I. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

§ I. Некоторые свойства функциональных матриц..... 23

§ 2. Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных..... 33

§ 3. Гладкие инвариатные торы линейных расширений динамических систем на торе с вырожденной матрицей при производных..... 49

§ 4. Периодические решения сингулярно возмущенной системы линейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных..... 67

ГЛАВА II. ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ МАТРИЧНО-СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ТОРЕ

§ 5. Инвариантные торы матрично-сингулярно возмущенных линейных расширений динамических систем на торе в случае $rank A(\varphi) \neq const, A^{*}(\varphi) \neq A(\varphi)$ 79

§ 6. Инвариантные торы, непрерывные в точке $\varepsilon = 0$, матрично-сингулярно возмущенных линейных расширений динамических систем на торе..... 9I

ГЛАВА III. КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

§ 7. Асимптотические разложения периодических решений сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных..... I09

стр.

§ 8. Сохранение инвариантного тора при сингулярном возмущении нелинейной системы дифференциальных уравнений..... II6

§ 9. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных..... I22

ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... I34

ЛИТЕРАТУРА..... I36

ВВЕДЕНИЕ

В различных областях современной науки и техники встречаются процессы, описываемые системами дифференциальных уравнений вида

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)x + f(t), \qquad (1)$$

$$\left[A(t) + \varepsilon P(t,\varepsilon)\right]\frac{dy}{dt} = F(y,t,\varepsilon) \qquad (2)$$

с вырожденной матрицей A. Такие системы появляются: в теории автоматического регулирования [11,18], математической экономике [4], теории марковских процессов [42], химической кинетике [15, 25], теории нелинейных колебаний [47,63], теории гироскопических систем [78] и т. д.

Насколько нам известно, количество работ, посвященных изучению систем вида (1) с произвольными матрицами, в настоящее время невелико. Прежде всего отметим монографию Ф.Р. Гантмахера [26], в которой для случая постоянных прямоугольных матриц в качестве приложения теории сингулярных пучков матриц построено общее решение системы (1). Однако упомянутая выше теория не является конструктивной, как это понимается в современной вычислительной математике. Этим обстоятельством, а также наличием практически важных задач, приводящих к системе (1), обусловлено появление на протяжении последнего десятилетия ряда работ Кэмпбелла [91,92], Маера и Роуза [93], Ю.Е. Бояринцева и В.М. Корсукова (см. [11]), посвященных построению решений системы (1) с постоянными коэффициентами.

В работе Харриса, Сибуи и Вайнберга [96] разработан алгоритм понижения порядка системы вида (1) в случае, когда элементы A, B, f – аналитические функции комплексной переменной t.

Система (I) с матричными функциями действительного переменного t исследовалась в монографии [II] Ю.Е. Бояринцева, содержащей результаты, полученные ее автором в ряде работ. Систему (I) Ю.Е. Бояринцев относит к классу регулярных, если матрица $A(t)$ обладает так называемым свойством Ω, т. е. она либо неособенна, либо приводится к жордановой форме посредством постоянной матрицы, либо все ее элементарные делители, соответствующие нулевым собственным числам, суть простые. Если же $A(t)$ не обладает свойством Ω, то система (I) причисляется к классу сингулярных. Для регулярных и сингулярных с постоянными коэффициентами систем в монографии [II] решалась следующая задача.

Пусть $A(t)\in\mathfrak{Z}$, $B(t)\in\Sigma$, $f(t)\in\Sigma$, a - заданный постоянный вектор, и существует такая матрица $D(t)\in\mathfrak{Z}$, что $[E-A(t)D(t)]B(t)\in\mathfrak{Z}$.

Найти вектор $x(t)\in\mathcal{U}$, удовлетворяющий (почти всюду на $[0,1]$) системе (I) и условию

$$\int_0^1 [d\sigma(s)]C(s)x(s)=a. \qquad (3)$$

Здесь Σ, $\mathfrak{Z}$ и $\mathcal{U}$ соответственно множество суммируемых, непрерывных и абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций, (3) - интеграл Стилтьеса.

Если в (3) положить $a=0$, $C(s)=(1-2s)E$,

$$\sigma(s)=diag\{\sigma_1(s),\dots,\sigma_n(s)\},\ \sigma_i(s)=\begin{cases}0, & s=0,\\ 1, & 0<s<1,\\ 2, & s=1,\end{cases}\quad (i=\overline{1,n}),$$

то (I),(3) станет задачей о периодических решениях системы (I).

В диссертационной работе И.А. Мацониса [46] рассматривался вопрос разрешимости краевой задачи

$$Tx'(t)-Ax(t)=f(t),\quad a\le t\le b,$$

$$Bx(a)-Cx(b)=0$$

в гильбертовом пространстве $L_2([a,b],H)$, H - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $x\cdot y$; T, A, B, C - ограниченные операторы в пространстве H. В основу метода построения обобщенной функции Грина положено сужение рассматриваемого пространства до подпространства, в котором однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.

В работах Ю.Д. Шлапака [86-88] изучалась система уравнений

$$P(t)x'=A(t)x, \qquad (4)$$

где P и A - периодические $n\times n$ -матрицы, непрерывно дифференцируемые любое число раз, P - вырождена и имеет постоянную структуру относительно нулевого собственного значения. Доказано существование невырожденной периодической матрицы $L(t)$ такой, что система (4) в результате замены переменных по формуле $x=L(t)y$ приводится к системе

$$P_0 y'=A_0(t)y, \qquad (5)$$

где постоянная матрица $P_0=diag\{I_k, J\}$, I_k - единичная $k\times k$ -матрица, J - вырожденная и имеет вид жордановых клеток. Система уравнений (5) распадается на две системы: дифференциальную и алгебраическую, что открывает путь к понижению порядка исходной системы (4). В условиях такой редукции фигурирует матрица $A_0(t)$, а не $P(t)$ и $A(t)$. В работе [87] Ю.Д. Шлапаком рассматривалась неоднородная система второго порядка вида (4). Показано, что такая система может иметь единственное гладкое (или разрывное) периодическое решение, либо семейство периодических решений.

Работы В.П. Глушко [27] и Б. Кведараса [40,41] посвящены построению решений уравнений вида (I) в банаховом пространстве E,

где $a<t<b$ и $A(t), B(t)$ - ограниченные оператор-функции, причем нуль является собственным значением оператора $A(c)$, $c\in(a,b)$.

Библиография работ, посвященных изучению систем (2) значительно обширнее. Простейшими системами вида (2) являются системы

$$diag\{I_k, \varepsilon I_{n-k}\}\frac{dy}{dt} = F(y,t,\varepsilon),\ y\in E^n, \qquad (6)$$

которые привлекли внимание многих математиков. Некоторые работы, в которых рассматривались линейные случаи (см. напр. [79,90,99]) относятся еще к началу нашего века. В 40-х годах появились работы И. Чен [102] и М. Нагумо [98], где исследовались нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Однако систематическое исследование нелинейной системы (6) общего вида началось приблизительно в 50-х годах. Это связано прежде всего с интенсивным развитием различных областей физики и техники.

Наиболее простой задачей, относящейся к системе к системе (6), является задача Коши. Основополагающие результаты здесь принадлежат А.Н. Тихонову и И.С. Градштейну (см. [12,17-19]). В частности А.Н. Тихоновым было установлено [80] , что при определенных условиях в задаче Коши имеет место предельный переход к решению вырожденной системы, соответствующей (6) при $\varepsilon=0$. Асимптотическое разложение по параметру решения задачи Коши для системы (6) было получено А.Б. Васильевой и ее учениками, М.И.Вишиком и Л.А. Люстерником, С.А. Ломовым, В. Вазовым, Й. Сибуя (см. обзоры и монографии [12,17-19,13]) и другими математиками. А.Б. Васильевой [16] получены также асимптотические разложения для случая, когда система содержит несколько малых параметров различных порядков малости.

где $a<t<b$ и $A(t), B(t)$ - ограниченные оператор-функции, причем нуль является собственным значением оператора $A(c)$, $c\in(a,b)$.

Библиография работ, посвященных изучению систем (2) значительно обширнее. Простейшими системами вида (2) являются системы

$$diag\{I_k, \varepsilon I_{n-k}\}\frac{dy}{dt} = F(y,t,\varepsilon),\ y\in E^n, \qquad (6)$$

которые привлекли внимание многих математиков. Некоторые работы, в которых рассматривались линейные случаи (см. напр. [79,90,99]) относятся еще к началу нашего века. В 40-х годах появились работы И. Чен [102] и М. Нагумо [98], где исследовались нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Однако систематическое исследование нелинейной системы (6) общего вида началось приблизительно в 50-х годах. Это связано прежде всего с интенсивным развитием различных областей физики и техники.

Наиболее простой задачей, относящейся к системе к системе (6), является задача Коши. Основополагающие результаты здесь принадлежат А.Н. Тихонову и И.С. Градштейну (см. [12,17-19]). В частности А.Н. Тихоновым было установлено [80] , что при определенных условиях в задаче Коши имеет место предельный переход к решению вырожденной системы, соответствующей (6) при $\varepsilon=0$. Асимптотическое разложение по параметру решения задачи Коши для системы (6) было получено А.Б. Васильевой и ее учениками, М.И.Вишиком и Л.А. Люстерником, С.А. Ломовым, В. Вазовым, Й. Сибуя (см. обзоры и монографии [12,17-19,13]) и другими математиками. А.Б. Васильевой [16] получены также асимптотические разложения для случая, когда система содержит несколько малых параметров различных порядков малости.

О результатах, касающихся систем (6) с другими (не начальными) дополнительными условиями достаточно подробно говорится в монографиях и обзорах [I2,I7,I3].

Сингулярно возмущенные системы вида (6), обладающие периодическими решениями, можно делить на два класса: I) системы, допускающие релаксационные (близкие к разрывным) периодические колебания; 2) системы, имеющие гладкие (и в пределе гладкие) периодические решения.

Наиболее известной сингулярно возмущенной системой, допускающей релаксационное колебание, является уравнение Ван-дер-Поля. В работах Л.С. Понтрягина, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова, Н.А. Железцова, А.А. Дородницына, С.С. Пулькина, Н. Левинсона, В.Вазова, Й. Сибуи и др. исследован характер движения вблизи сингулярных точек, получены асимптотические представления для траекторий (включая периодические) таких систем на любом отрезке времени и формулы для периода релаксационных колебаний. Обширная библиография по этим вопросам представлена в монографиях [I3,5I] и обзоре [I2].

Обратимся теперь к работам, в которых исследовались периодические решения второго класса.

В принципе задача о периодическом решении может рассматриваться как частный случай общей двухточечной краевой задачи. Однако исторически такая задача исследовалась вне связи с общей краевой задачей. С другой стороны, для периодических решений характерно отсутствие пограничного слоя, а для решения двухточечной краевой задачи, в отличие от периодического случая и от случаев асимптотически устойчивых, характерно наличие пограничного слоя в двух точках: в окрестности обоих концов рассматриваемого промежутка [I7].

Основная задача, которая ставится при изучении периодических решений систем вида (6) - это установление условий, гарантирующих существование периодического решения в случае, если таковым обладает вырожденная система, и построение асимптотического разложения.

Результаты работ Флетто и Левинсона [82], Д.В. Аносова [3], А.Б. Васильевой [I7], Вазова и Фридрихса [94,I03,I3], И.М. Волк [20-22], Ранга [I00] при решении указанной выше задачи детально освещены в обзорах [I2,I7]. Работы Хэйла и Сейферта [84,95], К.К. Капишева [37], В.Х. Харасахала [38], Д.У. Умбетжанова [39] посвящены исследованию почти периодических решений систем типа (6).

Дальнейшее развитие теории непрерывных периодических решений сингулярно возмущенных систем типа (6) получено в работах В.М. Волосова [23,24], В.И. Рожкова [53-56], В.А. Треногина [I4], В.В. Алешина [I], К. Алымкулова [2], Т. Сабирова [58,59], Л.А. Еховой [3I] и др.

В.И. Рожковым [53-56] разработан метод эквивалентного дифференциально-операторного уравнения, позволяющий свести (как в критическом, так и в некритическом случаях) изучение периодического решения сингулярно возмущенной системы

$$\varepsilon x' = F(t,x,y,\varepsilon),\ y' = f(t,x,y,\varepsilon) \qquad (7)$$

к изучению периодического решения системы вида

$$y' = f_n(t,y,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),\ x' = F_n(t,y,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),$$

где функции $f_n(t,y,\varepsilon)$, $F_n(t,y,\varepsilon)$ регулярно зависят от ε. Этим методом им решен вопрос о существовании и асимптотике периодических решений системы (7). Он же в работе [53] нашел условия, близкие к необходимым и достаточным, существования единственного

периодического решения системы вида

$$\varepsilon x' = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon),\ x \in R^n,$$

а также построил асимптотическое разложение.

В.А. Божко [9] установлены достаточные условия существования единственного T-периодического решения системы уравнений вида

$$\varepsilon^h x' = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon),$$

где число h целое или дробное, а также получены его асимптотические разложения.

Использование метода интегральных многообразий Н.Н. Боголюбова - Ю.А. Митропольского [50] позволило К.В. Задираке [30], Я.С. Барису и В.И. Фодчуку [5,6] получить условия существования почти-периодических решений систем вида (7).

Работа А.М. Самойленко [63] продолжила исследование интегральных тороидальных многообразий сингулярно возмущенных систем, записанных в виде систем с медленно меняющимися переменными

$$\varphi' = \varepsilon a(\varphi, x, \varepsilon),\ x' = X(\varphi, x, \varepsilon),$$

глубоко изученных Ю.А. Митропольским в монографии [47].

Система (6) является частным случаем системы

$$u' = G(u, v, t, \varepsilon),\ \Lambda(\varepsilon)v' = H(u, v, t, \varepsilon),$$

где $\Lambda(\varepsilon) = diag\{\varepsilon^{\nu_1} I_{n_1}, \varepsilon^{\nu_2} I_{n_2}, \dots, \varepsilon^{\nu_k} I_{n_k}\}$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_k > 0$. Задача о периодических решениях таких систем изучалась Рангом [100] и Вазовым [13].

Диссертационная работа К.С. Сейтказиевой [77] посвящена исследованию периодических решений сингулярно возмущенной системы интегродифференциальных уравнений со многими малыми параметрами при старших производных. Полученные результаты (существование в

некритическом случае единственного периодического решения, ветвление периодического решения в критическом случае, а также построение асимптотичеких разложений) являются новыми и для дифференциальных уравнений.

Что касается системы (2), то в случае не диагональной матрицы при производных задача о периодических (квазипериодических) решениях, насколько нам известно, еще не изучалась. Отметим только, что задача Коши для таких уравнений в банаховом и конечномерном пространствах рассматривалась в работах В.С. Королюка и А.Ф. Турбина [42,43,81], К.И. Чернышова [85], В.П. Скрипника [71-76], Н.С. Сацкой [69,70].

Настоящая работа посвящена исследованию неразрывных периодических и квазипериодических решений систем вида (I) и (2).Она состоит из введения, трех глав и заключения.

В первой главе изучаются условия существования периодических и квазипериодических решений линейных систем вида (I) и (2) с вырожденной матрицей при производных.

В § I исследуются некоторые свойства матриц из класса $C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geq 0$, (матрицы, элементы которых - функции m действительных переменных, периодические по каждой из них с периодом 2π, непрерывные вместе со всеми производными до порядка r включительно). Вырожденность матрицы равносильна тому, что хотя бы одно из ее собственных значений - нулевое. Доказана

Т е о р е м а I. Необходимым и достаточным условием постоянности структуры $n \times n$ -матрицы $A(t) \in C^r(R^1, 2\pi)$, $r \neq 0$, относительно нулевого собственного значения является выполнение равенств $\operatorname{rank} A^i(t) \equiv const \ \forall t \in R^1$, $i = \overline{1, \rho}$, где ρ - индекс матрицы $A(t)$.

При исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений полезными являются результаты Сибуи [101] о периодической блочной

диагонализации матрицы из $C^r(R^1,2\pi)$, основанные на наличии двух групп собственных значений $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\dots,\lambda_i(t);\ \lambda_{i+1}(t),\dots,\lambda_n(t)$ таких, что $\lambda_j(t)\neq\lambda_\ell(t)\ \forall t\in R^1, j=\overline{1,i};\ \ell=\overline{i+1,n}$. Для матриц с постоянной структурой относительно нулевого собственного значения блочная диагонализация с диагональным блоком, имеющим только нулевые собственные значения, возможна и существенно использовалась в работах Ю.Д. Шлапака [86-88]. Однако для матриц постоянного ранга, составляющих в силу теоремы I более широкий класс по сравнению с классом матриц постоянной структуры относительно нулевого собственного значения (а также класса матриц, обладающих свойством Ω, введенным Ю.Е. Бояринцевым II), это требование, вообще говоря, не выполняется, если одну из групп составляют нулевые собственные значения. С другой стороны, в системе (I) матрица $A(t)$ в данной работе может быть прямоугольной.

В связи с этим доказаны следующие утверждения, гарантирующие возможность невырожденного преобразования $n\times\rho$-матрицы из $C^r(R^m,2\pi)$, $r\geq 1$, ранга k в периодическую матрицу той же гладкости с нулевым $(n-k)\times\rho$-мерным блоком и являющиеся в данной работе аналогом теоремы Сибуи о периодической блочной диагонализации.

Лемма 4. Пусть $n\times\rho$-матрица $A(t)\in C^r(R^1,2\pi)$, $r\geq 1$, и $\operatorname{rank}A(t)=k\equiv const$, $k<n$ при $n\leq\rho$ и $k\leq\rho$ при $n>\rho$. Тогда существует невырожденная на R^1 $n\times n$-матрица $W(t)\in C^r(R^1,4\pi)$ такая, что

$$W(t)A(t)=\begin{pmatrix}A_1(t)\\ 0_{n-k,\rho}\end{pmatrix},\quad \operatorname{rank}A_1(t)\equiv k,\quad t\in R^1,$$

где $0_{\ell,m}$ - нулевая $\ell\times m$-матрица.

Лемма 8. Пусть $n\times\rho$-матрица $A(\varphi)\in C^r(R^m,2\pi)$, $r\geq 1$, $\operatorname{rank}A(\varphi)=k\equiv const$, $1\leq k\leq n-1$ при $n\geq\rho$ и $1\leq k\leq n-2$ при $n<\rho$,

выполняется неравенство $n > \begin{cases} m+1, & k=1, k=n-1, \\ m+k, & 1<k<n, \end{cases}$

причем в случае $1<k<n-1$ матрица A имеет k линейно независимых столбцов или строк с фиксированными номерами.

Тогда существует невырожденная на R^m $n\times n$ -матрица $V(\varphi)$ такая, что

$$V(\varphi)A(\varphi)=\begin{pmatrix} A_1(\varphi) \\ 0_{n-k,n} \end{pmatrix}, \operatorname{rank} A_1(\varphi)\equiv k, \varphi\in R^m, V\in \begin{cases} C^r(R^m_{,4\pi}), k=1, k=n-1, \\ C^r(R^m_{,2\pi}), 1<k<n-1. \end{cases}$$

Отметим, что ограничительность условий леммы 8 обусловлена появлением при $m\geq 2$ качественно новых свойств квазипериодических векторов, например, существование единичного квазипериодического вектора, не дополняемого до квазипериодического базиса в E^n при любом нечетном $n\geq 3$ [8].

Там же устанавливаются критерии постоянности рангов некоторых произведений матриц из $C^r(R^m_{,2\pi})$, а также доказывается аналог леммы 4 в случае, когда $A(t,\varepsilon)\in C^r(R^1_{,2\pi})$ и является непрерывной матричной функцией $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$.

В § 2 исследуются условия совместности и существования гладких периодических решений системы вида

$$P(t)\dot{x}=A(t)x+f(t), \qquad (8)$$

где $n\times p$ -матрицы P, A и n -вектор f принадлежат $C^r(R^1_{,2\pi})$, $r\geq 1$, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, на основании конечного итерационного процесса последовательного понижения порядка системы (8).

В случае постоянности ранга матрицы при производных приведены условия совместности системы (8) и существования гладких периодических решений, в которых фигурируют матрицы и числа, определяемые по рекуррентным формулам, исходными для которых являются

коэффициенты системы (8). Установлена формула, выражающая любое решение системы (8) через решение конечной системы итерационного процесса. Приведены примеры системы (8), для которых число шагов итерационного процесса не менее двух и к которым не применима упомянутая выше теорема Сибуи.

В случае изменения ранга матрицы при производных с течением времени установлены условия, определенные рекуррентными формулами, при которых система (8) приводится к системе вида (8) меньшего порядка, ранг матрицы при производных которой меньше минимальной размерности строк или столбцов на множестве $\mathcal{D}\subset R^1$, $\mathcal{D}\neq R^1$, $\mathcal{D}\neq\emptyset$. Системы такого типа с квадратными матрицами более общего вида изучены в § 3.

Отметим, что гладкость периодического решения системы (8) ниже гладкости коэффициентов системы (8) на порядок количества проведенных итераций. Этот факт не является неожиданным, поскольку еще Ю. Мозером в работе [52] приведен пример уравнения вида (8) с коэффициентами, непрерывно дифференцируемыми любое число раз, решения которого имеют только конечное число непрерывных производных.

В § 3 устанавливаются условия существования единственного гладкого инвариантного тора системы уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\quad B(\varphi)\dot{x}=A(\varphi)x+f(\varphi), \tag{9}$$

где $\varphi\in R^m$, $x\in E^n$, B и A – $n\times n$-матрицы, $a, B, A, f\in C^r(R^m_{2\pi})$, $r\geq 1$, для произвольного вектора неоднородности f.

Если, в частности, в (9) положить $a(\varphi)\equiv\omega=(\omega_1,\dots,\omega_m)$, где ω_i $(i=\overline{1,m})$ – система несоизмеримых чисел, то придем к задаче о квазипериодическом решении.

Последовательно рассматривая случаи, когда $B=\rho(\varphi)I_n$,

$B(\varphi)=\begin{pmatrix}\rho(\varphi)\\ 0_{n-1,n}\end{pmatrix}$, где ρ – скалярная функция, не равная тождественно нулю, I_n – единичная $n\times n$ -матрица, $\rho(\varphi)$ – вектор-строка, норма которой может принимать в некоторых точках нулевое значение, получено следующее утверждение.

Т е о р е м а 6. Пусть система уравнений (9), все коэффициенты которой принадлежат $C^r(R^m_{,}2\pi)$, $r\geq 2$, удовлетворяет следующим условиям.

I. Матрица $A(\varphi)$ невырождена при всех $\varphi\in R^m$.

2. Существует $n\times k$ -матрица $\hat{B}(\varphi)\in C^r(R^m_{,}2\pi)$ такая, что $rank\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]\equiv 1$.

Тогда можно указать такое фиксированное число $\delta>0$, что неравенство

$$\|A^{-1}\|\left[\|B\|\left(\|a\|+\left\|\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right\|\right)+\|a\|\left\|\frac{\partial B}{\partial\varphi_i}\right\|\right]+\|a\|\|B\|\left\|\frac{\partial A^{-1}}{\partial\varphi_i}\right\|\leq\delta,\ i=\overline{1,m},$$

где нормы матриц операторные, обеспечивает существование единственного гладкого инвариантного тора $x=U(\varphi)$, $U(\varphi)\in C^{r-1}(R^m_{,}2\pi)$, $r\geq 2$, системы уравнений (9) для любой неоднородности $f(\varphi)\in C^r(R^m_{,}2\pi)$.

Приведен пример, иллюстрирующий теорему 6.

Условие 2 теоремы 6 выполняется не для любой матричной функции $B(\varphi)$. Оказывается, что системы уравнений (9), для которых это условие не выполнено, могут иметь гладкие инвариантные торы, а именно: имеет место

Т е о р е м а 7. Пусть относительно системы уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\quad \rho B(\varphi)\dot{x}=A(\varphi)x+f(\varphi), \tag{I0}$$

где $a, B=\{b_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $f\in C^r(R^m_{,}2\pi)$, $r\geq 2$, ρ – параметр, $0\leq\rho\leq\rho_0$, известно, что

I) $\det A(\varphi)\neq 0\quad\forall\varphi\in R^m$;

2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{11} & a_{11} \\ b_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \equiv 1$ или $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv 1$.

Тогда можно указать такое значение $\rho_1 \in [0, \rho_0]$, что при всех $\rho \in [0, \rho_1]$ система уравнений (10) имеет единственный гладкий инвариантный тор $x = u(\varphi)$, $u(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, $r \geq 2$, для каждой неоднородности $f(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$.

Приведен пример, иллюстрирующий теорему 7.

В случае $1 \leq \operatorname{rank} B(\varphi) \not\equiv const$ установлены достаточные условия существования единственного гладкого инвариантного тора $x = u(\varphi)$, $u(\varphi) \in C^{r-q}(R^m, 2\pi)$ системы (10) для произвольной неоднородности $f(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, где q - число шагов итерационного процесса, примененного к системе (10).

В § 4 для сингулярно возмущенной системы вида

$$P(t,\varepsilon)\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{11}$$

где $n \times n$ -матрицы P, A и n -вектор f принадлежат при каждом значении малого положительного параметра ε $C^r(R^1, 2\pi)$,

$$P(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} P_1(t,\varepsilon) \\ \varepsilon P_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

P_1 и P_2 - матрицы размерности $k \times n$ и $(n-k) \times n$ соответственно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank} P_1(t,0) \equiv k, \ \operatorname{rank} P_2(t,0) \equiv n-k, \ 1 \leq k \equiv const \leq n-1, \\ &\operatorname{rank} P(t,0) \equiv \rho = const, \ \min(k, n-k) \leq \rho \leq n-1, \end{aligned} \tag{13}$$

с помощью итерационного процесса выведены достаточные условия существования для произвольного вектора $f(t,\varepsilon) \in C^r(R^1, 2\pi)$ единственного гладкого периодического решения $x_0(t,\varepsilon)$, удовлетворяющего на $R^1 \times [0, \varepsilon^0]$, $\varepsilon^0 > 0$, оценке $\|x_0(t,\varepsilon)\| \leq K \max_t \|f(t,\varepsilon)\|$

с положительной постоянной K, не зависящей от ε.

Глава II посвящена изучению условий существования инвариантных торов линеаризованных систем уравнений вида

$$\dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon),\ \left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\dot{x} = B(\varphi,\varepsilon)x + f(\varphi,\varepsilon), \qquad (14)$$

где $n\times n$-матрицы A, P, B, m-вектор a и n-вектор f принадлежат $C^r(R^m, 2\pi)$, матрица $A(\varphi)$ вырождается во всех или в некоторых точках R^m, $\det\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\neq 0\ \ \forall\varphi\in R^m, 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$.

Если матрицы A и P постоянны, а $m=1$, то можно показать, что из работ [5,6,30] следует, что система (14) при определенных ограничениях обладает периодическим решением, непрерывным по ε в точке $\varepsilon=0$. Изменение ранга матриц при производных в случае их симметричности, знакоопределенности матрицы $B(\varphi,0)$ и $r\geq\frac{m}{2}+1$ также не нарушает непрерывности тора в точке $\varepsilon=0$ (см. [52,68]).

В связи с этим для случая несимметричности матрицы $A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)$ возникают рассматриваемые в § 5 вопросы: при каких условиях система (14) обладает инвариантным тором $x=u(\varphi,\varepsilon)$, $u(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m, 2\pi)$, и сохраняется ли непрерывность $u(\varphi,\varepsilon)$ в точке $\varepsilon=0$.

Обозначим: $Q(\varphi,\varepsilon)$ $n\times n$-матрицу, (i,j)-элемент которой является алгебраическим дополнением (j,i)-элемента матрицы $A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)$; $\Delta(\varphi,\varepsilon)=\det\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]$, $H(\varphi,\varepsilon)=\left[\operatorname{sign}\Delta(\varphi,\varepsilon)\right]Q(\varphi,\varepsilon)B(\varphi,\varepsilon)$,

$$\beta(\varphi,\varepsilon)=\min_{\|\eta\|=1}\left|\langle H(\varphi,\varepsilon)\eta,\eta\rangle\right|,\quad \alpha(\varphi,\varepsilon)=\max_{\|\xi\|=1}\left|\left\langle\frac{\partial a(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\xi,\xi\right\rangle\right|,$$

$$|v(\varphi,\varepsilon)|_0=\max_{\varphi\in R^m,\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]}\|v(\varphi,\varepsilon)\|,\quad |v(\varphi,\varepsilon)|_r=\max_{0\leq\rho\leq r}|D^\rho v(\varphi,\varepsilon)|_0,$$

где $\eta\in E^n$, $\xi\in E^m$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ -обычное скалярное произведение в E^n, $\|\eta\|^2=\langle\eta,\eta\rangle$, $D^\rho v(\varphi,\varepsilon)$ - любая производная по φ_i $(i=\overline{1,m})$ функции $v(\varphi,\varepsilon)$ порядка ρ.

Ответ на первый вопрос дает следующая

Т е о р е м а I0. Пусть

I. Матричные функции $\alpha, A, P, B, f \in C^r(R^m, 2\pi), r \geq 0, \alpha \in C^{0,5}(R^m, 2\pi)$ и непрерывны по ε на $[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$.

2. Для всех $\varphi \in R^m$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $\Delta(\varphi, \varepsilon) \neq 0$, причем $[A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)]^* \not\equiv A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)$, $0 \leq \operatorname{rank} A(\varphi) \neq const$.

3. В зависимости от значения r для всех $\varphi \in R^m$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливо одно из неравенств

$$\beta(\varphi, \varepsilon) > 0 \quad (r = 0), \quad \beta(\varphi, \varepsilon) - r\alpha(\varphi, \varepsilon)|\Delta(\varphi, \varepsilon)| > 0 \quad (r \geq 1).$$

Тогда можно указать такое $\varepsilon^\circ \in (0, \varepsilon_0]$, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^\circ]$ система уравнений (I4) имеет единственный инвариантный тор: $x = u(\varphi, \varepsilon)$, $u(\varphi, \varepsilon) \in C^r(R^m, 2\pi)$, удовлетворяющий неравенству

$$|u(\varphi, \varepsilon)|_r \leq K \left| \frac{Q(\varphi, \varepsilon) f(\varphi, \varepsilon)}{\beta(\varphi, \varepsilon) - r\alpha(\varphi, \varepsilon)|\Delta(\varphi, \varepsilon)|} \right|_r$$

с положительной постоянной K, не зависящей от ε, и являющийся экспоненциально устойчивым, если матрица $H(\varphi, \varepsilon)$ на $R^m \times (0, \varepsilon_0]$ отрицательно определена и неустойчивым, если $H(\varphi, \varepsilon)$ на $R^m \times (0, \varepsilon_0]$ положительно определена.

Оказывается, что ответ на второй вопрос в общем случае отрицательный. Например, система уравнений

$$\begin{cases} (1+\varepsilon+\sin t)\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -5x_1, \\ -(1+\sin t)(1+\varepsilon+\sin t)\dot{x}_1 + \varepsilon\dot{x}_2 = 5(1+\sin t)x_1 - x_2 + (1+\frac{\cos t}{3})(1+\varepsilon+\sin t)^{1/3} \end{cases}$$

обладает периодическим решением $x^\circ(t, \varepsilon)$ таким, что в точке $t = \frac{3}{2}\pi$ $\|x^\circ(t, \varepsilon)\| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Вместе с тем существуют системы, удовлетворяющие условиям теоремы I0 и обладающие, например, периодическими решениями, непрерывными в точке $\varepsilon = 0$. А именно, имеет место

Т е о р е м а II. Пусть относительно системы уравнений (I4)

где $a\equiv 1$, $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $P=\{p_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $B=\{b_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $f=\{f_i\}_{i=1,2}$, справедливы условия теоремы I0 с $m=r=1$ и следующие соотношения $b_0-\max\limits_{\varphi\in R^1}|\dot{\Delta}_1(\varphi,0)|>0$,

$a_{ij}(\varphi)+\varepsilon p_{ij}(\varphi,\varepsilon)\equiv k(\varphi,\varepsilon)b_{ij}(\varphi,\varepsilon)$ $(i=1,2;\ j=1$ или $j=2)$,

где $\min\limits_{\varphi\in R^m,\,0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}|\det B(\varphi,\varepsilon)|\ge b_0=const>0$, $\Delta_1(\varphi,\varepsilon)=\Delta(\varphi,\varepsilon)k^{-1}(\varphi,\varepsilon)$.

Тогда система (I4) обладает периодическим решением $x=x^0(\varphi,\varepsilon)\in C^1(R^1,2\pi)$ удовлетворяющим для всех $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ оценке $\|x^0(\varphi,\varepsilon)\|\le K\|f(\varphi,\varepsilon)\|$ с постоянной $K>0$, не зависящей от ε.

Приведен пример, иллюстрирующий теорему II.

В § 6 продолжено изучение системы уравнений (I4) но в случае постоянности ранга матрицы $A(\varphi)$. Система (I4) невырожденным для всех $\varphi\in R^m$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ преобразованием приводится к виду

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=a(\varphi,\varepsilon),\ \dot{y}=b(\varphi,\varepsilon)y+c(\varphi,\varepsilon)z+g_1(\varphi,\varepsilon),\\ \varepsilon\dot{z}=\varepsilon d(\varphi,\varepsilon)y+p(\varphi,\varepsilon)z+\varepsilon g_2(\varphi,\varepsilon).\end{cases}\qquad (I5)$$

Доказано, что система (I5) имеет $(m+k)$-параметрическое интегральное многообразие $z=L(\varphi,\varepsilon)y+q(\varphi,\varepsilon)$, являющееся экспоненциально устойчивым или экспоненциально дихотомичным, где $(n-k)\times k$-матрица $L(\varphi,\varepsilon)$ и $(n-k)$-вектор $q(\varphi,\varepsilon)$ принадлежат $C^r(R^m,4\pi)$ и $|L(\varphi,\varepsilon)|_r\le\Delta(\varepsilon)$, $|q(\varphi,\varepsilon)|_r\le\rho(\varepsilon)$, $\max(\Delta,\rho)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Используя упрощение системы (I5) на этом многообразии а также его единственность для каждого $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$, $0<\varepsilon^0\le\varepsilon_0$, показано, что при определенных условиях исходная система (I4) имеет неразрывные инвариантные торы, непрерывные в точке $\varepsilon=0$ и обладающие условной устойчивостью.

Глава III посвящена изучению колебаний нелинейных сингулярно возмущенных систем.

В § 7 для системы

$$P(t,\varepsilon)\dot{z} = F(z,t,\varepsilon), \qquad (16)$$

где $P(t,\varepsilon)$ определена формулами (12),(13), P и F - периодические по t с периодом 2π и аналитические по своим переменным при $\|z\| \le a$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, $t \in R^1$ матричные функции, установлены достаточные условия существования гладкого периодического решения и построено асимптотическое разложение этого решения в предположении, что известно гладкое периодическое решение вырожденной системы, соответствующей (16) при $\varepsilon = 0$. При этом существенно использовались условия существования периодических решений систем (8) и (11).

В § 8 доказано, что имеет место сохранение инвариантного тора при матричном сингулярном возмущении нелинейной системы дифференциальных уравнений. А именно, справедлива

Т е о р е м а 14. Предположим, что относительно системы уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon), \quad [A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]\dot{x} = X(\varphi,x) + \varepsilon F(\varphi,x,\varepsilon) \qquad (17)$$

выполняются следующие условия.

1. Вырожденная система $\dot{\varphi} = a(\varphi,0)$, $A(\varphi)\dot{x}^{(0)} = X(\varphi,x^{(0)})$ имеет гладкий инвариантный тор $x^{(0)} = u^{(0)}(\varphi)$, $u^{(0)}(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, $r \ge 2$.

2. Матричные функции a, A, P, X и F определены и непрерывны для всех $\varphi \in R^m$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\|x - u^{(0)}(\varphi)\| \le d$, периодические по φ_i $(i=\overline{1,m})$ с периодом 2π, непрерывно дифференцируемы по φ и x до порядка $r \ge 2$ включительно и имеют непрерывную производную по ε.

3. $0 < \operatorname{rank} A(\varphi) \equiv k < n$, $\det[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)] \ne 0$ $\forall (\varphi,\varepsilon) \in R^m \times (0,\varepsilon_0]$, функции $a(\varphi,\varepsilon)$, $A(\varphi)$, $P(\varphi,\varepsilon)$ и $B(\varphi,0) = b(\varphi,0,0)$, где

$$b(\varphi,y,\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[X(\varphi,u^{(0)}(\varphi)+\theta y) + \varepsilon F(\varphi,u^{(0)}(\varphi)+\theta y,\varepsilon)\right] d\theta,$$

такие, что система (14) обладает гладким инвариантным тором из

$C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, непрерывным в точке $\varepsilon = 0$.

Тогда можно указать число $0 < \varepsilon^* \leq \varepsilon_0$ такое, что система (17) для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ имеет инвариантный тор $x = U^{(0)}(\varphi) + U(\varphi, \varepsilon)$, обладающий условной устойчивостью, где функция $U(\varphi, \varepsilon)$ непрерывна на $R^m \times [0, \varepsilon^*]$ и такая, что $\lim |U(\varphi, \varepsilon)|_{r-2} = 0$, $\varepsilon \to 0$.

В § 9 для системы вида

$$\varepsilon \dot{x} = X(x) + \varepsilon^{1+\alpha} Q(x, t), \qquad (18)$$

где $x, X, Q \in R^{n+m}$, X и Q определены для всех $t \in R^1$, x из области $\mathcal{D} \subset R^{n+m}$, $Q(x, t+T) = Q(x, t)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha = const > 0$, изучены условия существования периодических решений в окрестности тороидального многообразия решений вырожденной системы. При этом система (18) приведена к системе специального вида, для которой при определенных условиях доказано существование инвариантного тороидального многообразия, а затем обоснована возможность делать вывод о существовании замкнутых траекторий на этом многообразии, исходя из первого приближения к этому многообразию.

Краткие выводы по выполненной диссертационной работе содержит заключение.

В конце работы приведен библиографический список, включающий 103 наименования литературных источников советских и зарубежных авторов.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре по математической физике и теории нелинейных колебаний Института математики АН УССР, руководимом академиком АН УССР Ю.А. Митропольским, на Республиканских семинарах, проводимых на кафедре дифференциальных уравнений в Киевском госуниверситете, на Всесоюзной конференции по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных уравнений (Алма-Ата, июнь

1979 г.) и опубликованы в работах [32-35,45] .

Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР, профессору А.М. Самойленко за предложенную тему работы, постоянное внимание к работе, ценные советы и замечания.

Г Л А В А I.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ.

§ I. Некоторые свойства функциональных матриц.

Изучим используемые в последующих параграфах некоторые свойства матриц, элементы которых – функции нескольких действительных переменных, периодические по каждой из них.

Ниже под $C^r(R^m_{,2\pi})$ будем понимать множество периодических по действительным переменным φ_i, $i=\overline{1,m}$, с периодом 2π векторных или матричных функций $\Phi(\varphi)$, непрерывных вместе со своими производными до порядка r включительно, для которого введена норма:

$$|\Phi(\varphi)|_r = \max_{0\le\rho\le r} |D^\rho\Phi(\varphi)|_0, \quad |\Phi(\varphi)|_0 = \max_{\varphi\in R^m} \|\Phi(\varphi)\|, \qquad (I.I)$$

где $D^\rho\Phi(\varphi)$ – любая производная функции $\Phi(\varphi)$ порядка ρ.

I.I. Критерий постоянности структуры периодической матрицы относительно одного из собственных значений.

В случае $m=1$ обозначим $\varphi_1=t$.

Будем говорить, что n-мерная матрица имеет на R^1 постоянную структуру относительно собственного значения $\lambda_i(t)$ кратности s $(s\le n)$ с элементарными делителями

$$[\lambda-\lambda_i(t)]^{\rho_1}, [\lambda-\lambda_i(t)]^{\rho_2}, \ldots, [\lambda-\lambda_i(t)]^{\rho_k} \quad \left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j = s\right),$$

если целочисленные функции времени $s, k, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ сохраняют постоянные значения для всех $t\in R^1$.

Л е м м а I. Если $l\times l$-матрица $B(t)\in C^r(R^1_{,2\pi})$, $r\ge 0$, имеет постоянную структуру относительно нулевого собственного значения кратности l, то $\operatorname{rank} B^j(t)=\beta_j$, $j=\overline{1,l-k+1}$, где β_j $(j=\overline{1,l-k+1})$ не зависят от изменения t на R^1, k – количество элементарных делителей, соответствующих нулевому собственному

значению.

Доказательство. Матрица $B(t)$ по условию сохраняет в каждой точке R^1 нормальную форму Жордана. В силу теоремы I из [86] существует матрица $S(t)\in C^r(R^1,4\pi)$ такая, что

$$\det S(t)\neq 0.\ \forall t\in R^1,\ S^{-1}(t)B(t)S(t)=diag\{J_1,J_2,\dots,J_k\}, \qquad (I.2)$$

где J_i - жорданова клетка, соответствующая элементарному делителю λ^{ρ_i} $(i\in[1,k],\ \sum_{i=1}^{k}\rho_i=\ell)$.

Используя (I.2), получаем требуемые равенства:

$$rank\,B^i(t)=rank\,S^{-1}(t)B^i(t)S(t)=rank\,S^{-1}(t)B(t)S(t)S^{-1}B^{i-1}(t)S(t)=$$
$$=rank\left[S^{-1}(t)B(t)S(t)\right]^i=rank\left[diag\{J_1,J_2,\dots,J_k\}\right]^i=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}rank\,J_j^i=\beta_i\equiv const\quad (t\in R^1,\ i=\overline{1,\ell-k+1}).$$

Теорема I. Необходимым и достаточным условием постоянности структуры $n\times n$-матрицы $A(t)\in C^r(R^1,2\pi)$, $r\geq 0$, относительно нулевого собственного значения является выполнение равенств

$$rank\,A^i(t)=\alpha_i\equiv const\quad (t\in R^1,\ i=\overline{1,\rho}), \qquad (I.3)$$

где ρ - индекс матрицы $A(t)$, т. е. :

$$rank\,A^{\rho-1}(t)>rank\,A^{\rho}(t)=rank\,A^{\rho+1}(t). \qquad (I.4)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица $A(t)\in C^r(R^1,2\pi)$ имеет постоянную структуру относительно нулевого собственного значения. Если кратность нулевого собственного значения матрицы $A(t)$ $s=n$, то из леммы I следуют соотношения (I.3), (I.4).

Предположим, что $s<n$. В соответствии с теоремой 2 из [86] произведем блочную диагонализацию матрицы $A(t)$:

$$T^{-1}(t)A(t)T(t)=diag\{E_1(t),E_2\}, \qquad (I.5)$$

где матрицы $T(t)$ и $E_1(t)$ принадлежат $C^r(R^1,4\pi)$ и невырождены на R^1,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (I.6)$$

ε_i $(i=\overline{1,s-1})$ сохраняют значения 0 или I в каждой точке R^1. Из равенства (I.5) следует, что

$$T^{-1}(t)A^i(t)T(t)=\left[T^{-1}(t)A(t)T(t)\right]^i=diag\{E_1^i(t),E_2^i\} \quad (t\in R^1),$$

откуда с учетом невырожденности $T(t)$, соотношений (I.5),(I.6) и леммы I получаем

$$rank\,A^i(t)=rank\,E_1^i(t)+rank\,E_2^i=n-s+\beta_i=\alpha_i \quad (i=\overline{1,\rho};t\in R^1),$$

где ρ - наибольший из показателей степеней элементарных делителей вида λ^i. Очевидно, что ρ удовлетворяет соотношениям (I.4).

Достаточность. Исходя из соотношений (I.3),(I.4), определим все элементарные делители матрицы $A(t)$, отвечающие нулевому собственному значению:

$$\underbrace{\lambda,\dots,\lambda}_{g_1(t)};\ \underbrace{\lambda^2,\dots,\lambda^2}_{g_2(t)};\ \dots;\ \underbrace{\lambda^\rho,\dots,\lambda^\rho}_{g_\rho(t)},$$

где целочисленные функции $g_i(t)\geq 0$, $g_\rho(t)>0$, $(i=\overline{1,\rho-1};t\in R^1)$. В каждой точке $t\in R^1$ имеют место [26, с. I57] равенства

$$\begin{aligned} &g_1(t)+g_2(t)+g_3(t)+\dots+g_\rho(t)=\alpha_1(t),\\ &g_1(t)+2g_2(t)+2g_3(t)+\dots+2g_\rho(t)=\alpha_2(t),\\ &g_1(t)+2g_2(t)+3g_3(t)+\dots+3g_\rho(t)=\alpha_3(t),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &g_1(t)+2g_2(t)+3g_3(t)+\dots+\rho g_\rho(t)=\alpha_\rho(t), \end{aligned} \qquad (I.7)$$

где $\alpha_i(t)$ - дефект матрицы $A^i(t)$, т.е.

$$\alpha_i(t)=n-\operatorname{rank}A^i(t)=n-\alpha_i(t) \quad (i=\overline{1,\rho}), \tag{I.8}$$

ρ определено (I.4).

Решая систему линейных алгебраических уравнений (I.7) с учетом (I.8), получим единственное решение $g_i(t)=\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}-2\alpha_i$ $(i=\overline{1,\rho};\ \alpha_0=n,\ \alpha_{\rho+1}=\alpha_\rho;\ t\in R^1)$. Следовательно, в силу условий (I.3), (I.4) кратность нулевого собственного значения $(s=n-\alpha_\rho)$ и структура элементарных делителей постоянна в каждой точке R^1.

С л е д с т в и е . Для того, чтобы матрица $A\in C^r(R^1,2\pi)$ имела постоянную на R^1 структуру относительно собственного значения необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\operatorname{rank}\left[A(t)-\lambda_j I_n\right]^i=\alpha_i\equiv const \quad \forall t\in R^1,\ i=\overline{1,\rho},$$

где ρ определяется соотношениями

$$\operatorname{rank}\left[A(t)-\lambda_j(t)I_n\right]^{\rho-1}>\operatorname{rank}\left[A(t)-\lambda_j(t)I_n\right]^{\rho}=\operatorname{rank}\left[A(t)-\lambda_j(t)I_n\right]^{\rho+1},$$

I_n - единичная $n\times n$-матрица.

I.2. Невырожденное преобразование периодической $n\times\rho$-матрицы ранга k в периодическую матрицу с нулевым $(n-k)\times\rho$-мерным блоком.

Рассмотрим сначала случай $m=1$.

Л е м м а 2. [62, теорема 3]. Пусть $n\times\rho$-матрица $(n<\rho)$ $A(t)\in C^r(R^1,2\pi)$, $r\geq 1$, $\operatorname{rank}A(t)\equiv n$.

Тогда существует $\rho\times(\rho-n)$-матрица $P(t)\in C^r(R^1,2\pi)$ такая, что для всех $t\in R^1$ $A(t)P(t)=0$, $\operatorname{rank}P(t)=\rho-n$.

Л е м м а 3. Пусть $n\times\rho$-матрица $A(t)\in C^r(R^1,2\pi)$, $r\geq 1$, и $\operatorname{rank}A(t)=k\equiv const$, $k<n$ при $n\leq\rho$ и $k\leq\rho$ при $n>\rho$.

Тогда существует $\rho\times(\rho-k)$-матрица $P(t)\in C^r(R^1,4\pi)$ такая, что для всех $t\in R^1$ $A(t)P(t)=0$, $\operatorname{rank}P(t)\equiv\rho-k$.

При этом если элементы $A(t)$ комплекснозначные, то $P(t)\in C^r(R^1,2\pi)$, если же действительные, то матрицу $P(t)$ можно построить так, что ее элементы будут действительными, но в общем случае $P(t)\in C^r(R^1,4\pi)$.

Доказательство. Если $n=p$, то утверждение леммы 3 является следствием теоремы 6 и замечаний 2 и 3 работы [IOI].

Если $n<p$, то заменив $A(t)$ матрицей $\begin{pmatrix} A(t) \\ 0_{p-n,p} \end{pmatrix}$, где $0_{p-n,p}$ - нулевая $(p-n)\times p$ -матрица, приходим к рассмотренному случаю $n=p$.

Пусть $n>p$. Тогда в силу рассмотренного выше случая $n<p$ существует $n\times(n-k)$ -матрица $V_1(t)\in C^r(R^1,4\pi)$ такая, что

$$A^*(t)V_1(t)=0,\ \operatorname{rank} V_1(t)=p-k \quad (t\in R^1), \tag{I.9}$$

где $*$ обозначает операцию транспонирования матрицы. В соответствии с леммой 2 существует $k\times n$ -матрица $V_2(t)$ из $C^r(R^1,4\pi)$, обладающая свойствами $V_1^*(t)V_2(t)=0,\ \operatorname{rank} V_2(t)=k \quad (t\in R^1)$. Свойства матриц V_1, V_2 гарантируют невырожденность на R^1 $n\times n$-матрицы $V=\begin{pmatrix} V_2 \\ V_1^* \end{pmatrix}$ и включение $V\in C^r(R^1,4\pi)$. Умножив слева на матрицу V уравнение $A(t)x=0$, с учетом первого равенства (I.9) получим равносильное уравнение

$$V_2(t)A(t)x=0. \tag{I.10}$$

Так как $\operatorname{rank} V_2A=\operatorname{rank} VA\equiv k$ и V_2A — $k\times p$ -матрица из $C^r(R^1,4\pi)$, то лемма 2 гарантирует существование $p-k$ линейно независимых векторов из $C^r(R^1,4\pi)$, составляющих искомую матрицу $P(t)$.

Л е м м а 4. Пусть $n\times p$ -матрица $A(t)\in C^r(R^1,2\pi)$, $r\geq 1$, $\operatorname{rank} A(t)=k\equiv\text{const}$, $k<n$ при $n\leq p$ и $k\leq p$ при $n>p$.

Тогда существует невырожденная на R^1 $n\times n$ -матрица $W(t)\in C^r(R^1,4\pi)$ такая, что

$$W(t)A(t)=\begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0_{n-k,p} \end{pmatrix},\ \operatorname{rank} A_1(t)\equiv k \quad (t\in R^1). \tag{I.11}$$

Доказательство. В силу леммы 3 существует $n\times(n-k)$ -матрица $W_1(t)\in C^r(R^1,4\pi)$, удовлетворяющая на R^1 равенствам

$$A^*(t)W_1(t)=0,\ \operatorname{rank} W_1(t)\equiv n-k \quad (t\in R^1). \tag{I.12}$$

В соответствии с леммой 2 можно найти $k\times n$ -матрицу $W_2(t)\in C^r(R^1_{,4\pi})$ такую, что

$$W_1^*(t)W_2(t)=0,\ \operatorname{rank} W_2(t)=k \quad (t\in R^1). \tag{I.I3}$$

Из (I.I2) и (I.I3) следует невырожденность на R^1 матрицы $W=\begin{pmatrix} W_2 \\ W_1^* \end{pmatrix}$ и справедливость соотношений (I.II).

Рассмотрим случай $m\geq 2$.

Лемма 5 [62, теорема 2]. Пусть $n\times p$ -матрица $A(\varphi)\in C^r(R^m_{,2\pi})$, $r\geq 1$, $\operatorname{rank} A(\varphi)\equiv n$ и $p>m+n$.

Тогда существует $p\times(p-n)$ -матрица $P(\varphi)\in C^r(R^m_{,2\pi})$,удовлетворяющая на R^m равенствам $A(\varphi)P(\varphi)=0$, $\operatorname{rank} P(\varphi)=p-n$.

Справедливы следующие два утверждения, принадлежащие А.М. Самойленко и В.Л. Кулику.

Лемма 6.Пусть $n\times p$ -матрица $(n\geq p)$ $A(\varphi)\in C^r(R^m_{,2\pi})$, $r\geq 0$, и $\operatorname{rank} A(\varphi)\equiv p-1$.

Тогда существует p -вектор $\ell(\varphi)\in C^r(R^m_{,4\pi})$ такой, что

$$A(\varphi)\ell(\varphi)=0,\ \|\ell(\varphi)\|=1 \quad \forall\varphi\in R^m. \tag{I.I4}$$

Лемма 7.Пусть $n\times p$-матрица $A(\varphi)\in C^r(R^m_{,2\pi})$, $r\geq 0$, и $\operatorname{rank}A(\varphi)\equiv 1$.

Тогда существуют векторы $\lambda(\varphi)$ и $\mu(\varphi)$ размерности p и n соответственно, из $C^r(R^m_{,2\pi})$ такие, что для всех

$$\lambda(\varphi)\equiv\mu(\varphi)A(\varphi),\ \|\mu(\varphi)\|\equiv 1,\ \|\lambda(\varphi)\|\neq 0. \tag{I.I5}$$

Лемма 8. Пусть $n\times p$ -матрица $A(\varphi)\in C^r(R^m_{,2\pi})$, $r\geq 1$, $\operatorname{rank} A(\varphi)=k\equiv const$, $1\leq k\leq n-1$ при $n\geq p$ и $1\leq k\leq n-2$ при $n<p$, выполняется неравенство

$$n>\begin{cases} m+1, & k=1,\ k=n-1, \\ m+k, & 1<k<n, \end{cases} \tag{I.I6}$$

причем в случае $1<k<n-1$ матрица A имеет k линейно независимых столбцов или строк с фиксированными номерами.

Тогда существует невырожденная на R^m $n\times n$ -матрица $V(\varphi)$ такая, что $V(\varphi)A(\varphi)=\begin{pmatrix} A_1(\varphi) \\ O_{n-k,n} \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank} A_1(\varphi)=k$ $(\varphi\in R^m)$.

При этом $V(\varphi) \in \begin{cases} C^r(R^m, 4\pi), & k=1, k=n-1; \\ C^r(R^m, 2\pi), & 1<k<n-1. \end{cases}$

Доказательство. Пусть $k=1$. Тогда в соответствии с леммой 7 существует n-вектор $\mu(\varphi)$ из $C^r(R^m, 4\pi)$, удовлетворяющий соотношениям (I.I5). Лемма 5 гарантирует с учетом (I.I6) существование $(n-1)\times n$-матрицы $V_2(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi)$ такой, что для всех $\varphi \in R^m$

$$\mu(\varphi) V_2(\varphi) = 0, \quad \operatorname{rank} V_2(\varphi) = n-1 \quad (\varphi \in R^m).$$

Положив $V_1(\varphi) \equiv \mu(\varphi)$, получим искомую матрицу $V(\varphi)$.

Пусть $k=n-1$. Тогда согласно лемме 6 в качестве $V_2(\varphi)$ можно взять вектор $\ell(\varphi)$ из $C^r(R^m, 4\pi)$, если в первом равенстве (I.I4) положить $A^*(\varphi)$ вместо $A(\varphi)$. На основании леммы 5 матрица $V_2(\varphi)$ дополняема $(n-k)\times n$-матрицей $V_1(\varphi)$ до невырожденной на R^m искомой матрицы $V(\varphi)$.

Пусть $1<k<n-1$. Если имеется k линейно независимых строк с фиксированными номерами, то в качестве V берется произведение невырожденных $n\times n$-матриц W_1 и W_2, где W_1 - матрица, осуществляющая превращение строк, являющихся линейными комбинациями фиксированных базисных k строк, в нулевые, а W_2 - матрица, производящая перестановку k базисных строк на место первых k строк. Известно [26], что W_1 и W_2 существуют. Если же A содержит k линейно независимых столбцов с фиксированными номерами, то матрицу $V_1(\varphi)$ составим из этих столбцов, а $V_2(\varphi)$ - из линейно независимых строк, ортогональных матрице и существующих в силу леммы 5.

I.3. Постоянность ранга некоторых произведений матриц.

I.3.I. Установим, при каких условиях имеет место равенство

$$\operatorname{rank} V_2(\varphi) B(\varphi) = \ell \equiv \text{const} \quad \forall \varphi \in R^m, \quad 0 \le \ell \le \min(n-k, \rho), \qquad (I.I7)$$

где B и V_2 принадлежат $C^r(R^m, 2\pi)$ и $C^r(R^m, 4\pi)$ соответственно, $r \ge 0$; B - $n\times\rho$-матрица, $(n-k)\times n$-матрица V_2 удовлетворяет на R^m соотношениям

$V_2(\varphi)A(\varphi)=0,\ \operatorname{rank}V_2(\varphi)=n-k\quad(\varphi\in R^m)$, (I.18)

A – $n\times p$-матрица ранга k из $C^r(R^m,2\pi)$, $1\le k<n$ при $n\le p$ и $1\le k\le p$ при $n>p$.

Лемма 9. Равенство (I.17) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}[A(\varphi),B(\varphi)]=l+k\quad\forall\varphi\in R^m. \tag{I.19}$$

Доказательство. Найдем соотношение, связывающее ранги матриц $V_2(\varphi)B(\varphi)$ и $[A(\varphi),B(\varphi)]$, из которого будут следовать требуемые утверждения.

В соответствии с предложением 6.2 работы [97] для произвольных постоянных прямоугольных матриц M и N согласованной размерности имеет место равенство

$$\operatorname{rank}N=\operatorname{rank}MN+\dim[\ker M\cap\mathcal{C}(N)], \tag{I.20}$$

где $\ker M$ – ядро матрицы M, т.е. множество решений системы $Mx=0$, $\mathcal{C}(N)$ – пространство вектор-столбцов матрицы N. Зафиксировав произвольным образом $\varphi\in R^m$ и положив в (I.20) $M=V_2(\varphi)$, $N=[A(\varphi),B(\varphi)]$, получим

$$\operatorname{rank}V_2(\varphi)[A(\varphi),B(\varphi)]=\operatorname{rank}[A(\varphi),B(\varphi)]-\dim\{\ker V_2(\varphi)\cap\mathcal{C}[A(\varphi),B(\varphi)]\}\ (\varphi\in R^m). \tag{I.21}$$

С учетом (I.18) и свойства матрицы $A(\varphi)$ для каждого $\varphi\in R^m$

$$\ker V_2(\varphi)\equiv\mathcal{C}[A(\varphi)]. \tag{I.20}$$

Используя равенства

$$\mathcal{C}[A(\varphi),B(\varphi)]=\mathcal{C}[A(\varphi)]\cup\mathcal{C}[B(\varphi)],\ \operatorname{rank}V_2(\varphi)B(\varphi)=\operatorname{rank}V_2(\varphi)[A(\varphi),B(\varphi)]$$

и (I.22), из (I.21) найдем

$$\operatorname{rank}V_2(\varphi)B_2(\varphi)=\operatorname{rank}[A(\varphi),B(\varphi)]-k\quad(\varphi\in R^m),$$

откуда очевидным образом получаем требуемые утверждения.

I.3.2. Выделим класс $n\times p$-матриц из $C^r(R^m,2\pi)$, $r\ge 0$, таких, что

$$\operatorname{rank}Q(\varphi)U(\varphi)=s=\text{const}\ \forall\varphi\in R^m,\ 0\le s\le\min(k,p-l), \tag{I.23}$$

где $Q=V_1A$, V_1 – $k\times n$-матрица из $C^r(R^m,4\pi)$, все строки которой ортогональны всем строкам матрицы V_2 из п. I.3.2; $p\times(p-l)$-матрица

$U(\varphi)\in C^{r}(R^{m},4\pi)$ удовлетворяет равенствам

$$B_2(\varphi)U(\varphi)=0,\ \operatorname{rank}U(\varphi)=p-\ell\quad(\varphi\in R^m),\tag{I.24}$$

$$\ell=\operatorname{rank}B_2(\varphi)\equiv const,\ 1\le\ell\le\min(n-k,p),\ B_2(\varphi)=V_2(\varphi)B(\varphi).\tag{I.25}$$

Л е м м а 10. Для выполнения равенства (I.23) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A(\varphi)\\ V_2(\varphi)B(\varphi)\end{pmatrix}=s+\ell\quad\forall\varphi\in R^m.\tag{I.26}$$

Доказательство. Используя соотношения (I.24), (I.25) и (I.20) при $M=U,^{*}N=(Q^{*},B_2^{*})$, получим следующую цепочку равенств

$$\operatorname{rank}Q(\varphi)U(\varphi)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}Q(\varphi)\\ B_2(\varphi)\end{pmatrix}U(\varphi)=\operatorname{rank}U^{*}(\varphi)\left[Q^{*}(\varphi),B_2^{*}(\varphi)\right]=$$

$$=\operatorname{rank}\left[Q^{*}(\varphi),B_2^{*}(\varphi)\right]-\dim\left\{\ker U^{*}(\varphi)\cap\mathcal{C}\left[Q^{*}(\varphi),B_2^{*}(\varphi)\right]\right\}=$$

$$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}Q(\varphi)\\ B_2(\varphi)\end{pmatrix}-\dim\left\{\mathcal{C}\left[B_2^{*}(\varphi)\right]\cap\left[\mathcal{C}(Q^{*}(\varphi))\cup\mathcal{C}(B_2^{*}(\varphi))\right]\right.=\tag{I.27}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}Q(\varphi)\\ B_2(\varphi)\end{pmatrix}-\ell\quad(\varphi\in R^m).$$

Из построения V_1 получаем тождество $V_2(\varphi)\left[A(\varphi),V_1^{*}(\varphi)\right]=0\ \forall\varphi\in R^m$, из которого в соответствии с равенствами $\operatorname{rank}A(\varphi)=\operatorname{rank}V_1^{*}(\varphi)=k$ следует, что столбцы $V_1^{*}(\varphi)$ составляют базис пространства вектор-столбцов матрицы $A(\varphi)$ и возможно скелетное разложение [26, с.32]

$$A(\varphi)=V_1^{*}(\varphi)W_1(\varphi)\quad(\varphi\in R^m),\tag{I.28}$$

где $W_1(\varphi)$ — $(n-k)\times n$ -матрица, строки которой в каждой точке R^m образуют базис пространства вектор-строк матрицы $A(\varphi)$. Используя определение Q, B_2 и равенство (I.28), получим

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}Q(\varphi)\\ B_2(\varphi)\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A(\varphi)\\ V_2(\varphi)B(\varphi)\end{pmatrix}\quad(\varphi\in R^m),$$

откуда с учетом (I.27) следует выполнение утверждений леммы 10.

Отметим, что из (I.27) очевидным образом следует легко проверяемое необходимое условие выполнения (I.23): если имеет место равенство (I.23), то

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A(\varphi) \\ B(\varphi) \end{pmatrix} = s+\ell \qquad \forall \varphi \in R^m.$$

I.4. Периодические решения уравнения $A(t,\varepsilon)x=0$.

Если элементы некоторой матрицы $B(t,\varepsilon)$ являются непрерывными по ε на отрезке $\mathcal{J}_0=[0,\varepsilon_0]$ и при каждом $\varepsilon\in\mathcal{J}_0$ принадлежат $C^r(R^m,2\pi)$, $r\geq 0$, то будем обозначать это включением $B(t,\varepsilon)\in C^r(R^m,\mathcal{J}_0,2\pi)$.

Лемма II. Пусть $n\times p$ -матрица $(n\leq p)$ $A(t,\varepsilon)\in C^r(R^1,\mathcal{J}_0,2\pi)$, $r\geq 0$, и $\operatorname{rank} A(t,\varepsilon)=\operatorname{rank} A(t,0)=k\equiv const$, $k<n\,(n=p)$, $k\leq n\,(n<p)$, $t\in R^1$, $\varepsilon\in\mathcal{J}_0$.

Тогда существуют число $\varepsilon^\circ\in(0,\varepsilon_0]$ и $p\times(p-k)$ -матрица $P(t,\varepsilon)\in C^r(R^1,\mathcal{J}^\circ,4\pi)$ такие, что на $R^1\times\mathcal{J}^\circ$

$$A(t,\varepsilon)P(t,\varepsilon)=0,\quad \operatorname{rank}P(t,\varepsilon)=\operatorname{rank}P(t,0)=p-k.$$

Доказательство леммы II для $n=p$ проводится с незначительными изменениями по схеме доказательства теоремы 6 работы [IOI]: строятся решения уравнения $A(t,\varepsilon)x=0$ на интервалах (a_i,b_i), $a_i<a_{i+1}<b_i<b_{i+1}$, $\mathcal{J}_i$ покрывающих компакт $[0,4\pi]$, затем эти решения сшиваются в точках a_{i+1}, 0 и 4π. В силу леммы Бореля число этих интервалов конечно, а $\varepsilon^\circ=\min_i\{\varepsilon_i\}$.

Если же $n<p$, то вместо матрицы A рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} A \\ 0_{p-n,p} \end{pmatrix}$ и используем рассмотренный случай $n=p$.

Лемма I2. Пусть $n\times n$ -матрица $A(t,\varepsilon)\in C^r(R^1,\mathcal{J}_0,2\pi)$, $r\geq 0$ и $\operatorname{rank}A(t,\varepsilon)=\operatorname{rank}A(t,0)=k\equiv const$, $1\leq k<n$.

Тогда существует $n\times n$-матрица $W(t,\varepsilon)\in C^r(R^1,\mathcal{J}^\circ,8\pi)$ такая, что на $R^1\times\mathcal{J}^\circ$ $|\det W(t,\varepsilon)|\geq\lambda=const>0$, $W(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} A_1(t,\varepsilon) \\ 0_{n-k,n} \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}A_1(t,0)=k$.

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы I2. Тогда существует $n\times(n-k)$ -матрица $W_1(t,\varepsilon)\in C^r(R^1,\mathcal{J}_1,4\pi)$, удовлетворяющая

на $R^1\times J_1$, $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_0$ равенствам

$$A^*(t,\varepsilon)W_1(t,\varepsilon)=0,\ \operatorname{rank}W_1(t,0)=\operatorname{rank}W_1(t,\varepsilon)=n-k \tag{I.30}$$

в силу леммы II. Согласно этой же лемме существуют число $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ и $k\times n$-матрица $W_2(t,\varepsilon)\in C^r(R^1,J_2,2\pi)$ такая, что на $R^1\times J_2$

$$W_1^*(t,\varepsilon)W_2(t,\varepsilon)=0,\ \operatorname{rank}W_2(t,0)=k\ . \tag{I.31}$$

Из (I.30) и (I.3I) следует невырожденность на R^1 матрицы $W(t,0)=\begin{pmatrix}W_2(t,0)\\W_1^*(t,0)\end{pmatrix}$. Тогда первое неравенство (I.29) выполняется, если выбрать $\varepsilon^0\in(0,\varepsilon_2]$ достаточно малым, а второе и третье соотношения вытекают из (I.30).

§ 2. Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$P(t)\dot x=A(t)x+f(t), \tag{2.I}$$

где P и A — $n\times p$-матрицы, x и f — p-векторы, P, A и $f\in C^r(R^1,2\pi)$, $r\ge1$ — достаточно большое число (возможно, не меньшее $p-1$), точка обозначает дифференцирование по t.

Изучим условия существования гладких периодических решений системы (2.I), выясняя одновременно условия совместности системы (2.I), на необходимость проведения чего указывают простые примеры. Эта задача решается при помощи итерационного метода последовательного понижения порядка системы уравнений (2.I), который при определенных условиях на последнем шаге приводит к системе с матрицей при производных вида $(I_\alpha,0)$ или $(0,0)$, где I_α — единичная $\alpha\times\alpha$-матрица, или вырождающейся на некотором непустом подмножестве множества R^1, не совпадающем с R^1.

Под $C^r(T)$ в этом параграфе будем понимать $C^r(R^1,T)$ (см.§I).

2.I. Системы с постоянным рангом матриц при производных.

Пусть

$$\operatorname{rank} P(t)=k \quad t\in R^1,\ 1\le k=\mathrm{const}<n,\ k\le p. \tag{2.2}$$

Опишем детально первую итерацию итерационного процесса.

Лемма 4 гарантирует существование невырожденной на R^1 $n\times n$-матрицы $V=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}$ из $C^r(4\bar{\pi})$ такой, что

$$\operatorname{rank} V_1(t)P(t)=k,\ V_2(t)P(t)=0,\ \operatorname{rank} V_2(t)=n-k \quad (t\in R^1). \tag{2.3}$$

Умножив слева уравнение (2.I) на матрицу V, получим

$$\begin{cases} Q(t)\dot{x}=B_1(t)x+g_1(t), & (2.4)\\ 0=B_2(t)x+g_2(t), & (2.5)\end{cases}$$

где

$$Q=V_1P,\ B_j=V_jA,\ g_j=V_jf \quad (j=1,2). \tag{2.6}$$

Суть итерации состоит в решении алгебраической системы (2.5), подстановке найденного общего решения в дифференциальную систему (2.4), в результате которой порядок дифференциальной системы понижается, а также в установлении условий на коэффициенты системы (2.I), гарантирующих получение системы вида (2.I) (меньшего порядка) с матрицей при производных одного из типов: прямоугольной ненулевого постоянного ранга, меньшего меньшей размерности строк или столбцов; единичной; нулевой. При этом продолжение процесса происходит только в первом случае.

Решим алгебраическую систему (2.5). Если на неоднородность кроме условий совместности системы (2.5) не накладывать дополнительных ограничений, то при изменении ранга матрицы $B_2(t)$ решение системы (2.5) в общем случае будет терпеть разрывы в точках изменения ранга $B_2(t)$. Например, уравнение $(1-\cos t)x_1+(1-\cos t)^2x_2-\sin t=0$ совместно, но обладает разрывными в точках $t=2m\pi$ $(m=0,\pm1,\pm2,\dots)$ решениями. Поэтому будем требовать выполнения условия

$\operatorname{rank} B_2(t) = \ell \equiv const \quad (t \in R^1,\ \ell \in [0, \min(n-k, p)]$,

для чего в соответствии с обозначениями (2.6) и леммой 9 необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}[P(t), A(t)] = k + \ell \equiv const \quad (t \in R^1,\ 0 \le \ell \le \min(n-k, p)). \tag{2.7}$$

Производимые ниже преобразования ориентированы на значения $0 < \ell < \min(n-k, p)$; случаи $\ell = 0$ и $\ell = \min(n-k, p)$ с незначительными изменениями следуют из основного.

Пусть выполняется равенство (2.7). В силу леммы 4 существует невырожденная на R^1 $(n-k)\times(n-k)$-матрица $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$ из $C^r(8\pi)$ такая, что

$$MB_2 = \begin{pmatrix} M_1 B_2 \\ M_2 B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где B_3 — $\ell \times (n-k)$-матрица ранга ℓ . Умножив (2.5) слева на M, с учетом (2.8) получим

$$B_3(t)x + M_1(t)g_2(t) = 0, \tag{2.9}$$

$$M_2(t)g_2(t) = 0. \tag{2.10}$$

Общее решение системы (2.9) при выполнении условия совместности (2.10) системы (2.5) имеет вид

$$x = Ux^{(1)} - B_3^*(B_3 B_3^*)^{-1} M_1 g_2, \tag{2.11}$$

где $x^{(1)}$ - произвольный $(p-\ell)$-вектор, U — $p\times(p-\ell)$-матрица из $C^r(8\pi)$, удовлетворяющая соотношениям

$$B_3 U = 0, \ \operatorname{rank} U = p - \ell \quad (t \in R^1) \tag{2.12}$$

и существующая в силу леммы 3.

Отметим, что при $\ell = n-k$ $M = I_n$ и система (2.5) совместна для любого вектора g_2 и $U \in C^r(4\pi)$. При $\ell = 0$ уравнение (2.9) отсутствует, условие (2.10) равносильно равенству $g_2(t) = 0$, а формула (2.11) примет вид $x = x^{(1)}$.

Подставив (2.II) в (2.4), придем к уравнению относительно $x^{(1)}$:

$$P^{(1)}(t)\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}(t)x^{(1)} + f^{(1)}(t), \tag{2.I3}$$

где

$$P^{(1)}=QU, A^{(1)}=B_1U-Q\dot{U}, f^{(1)}=g_1-B_3^*(B_3B_3^*)^{-1}M_1g_2+Q\frac{d}{dt}\left[B_3^*(B_3B_3^*)^{-1}M_1g_2\right], \tag{2.I4}$$

матрицы $P^{(1)}$ и $A^{(1)}$ имеют размерности $k\times(p-\ell)$; при $0<\ell<n-k\le p$ и $0<\ell\le p<n-k$ $A^{(1)}$ и $f^{(1)}\in C^{r-1}(8\pi), P^{(1)}\in C^r(8\pi)$; при $\ell=0$ $A^{(1)}, P^{(1)}$ и $f^{(1)}\in C^r(4\pi)$; а при $\ell=n-k$ $A^{(1)}$ и $f^{(1)}\in C^{r-1}(4\pi), P^{(1)}\in C^r(4\pi)$.

Если

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P \\ V_2A \end{pmatrix} = s+\ell \equiv const \quad (t\in R^1), \tag{2.I5}$$

то в силу леммы I0 $\operatorname{rank}P^{(1)}=s\equiv const$. Найдем пределы изменения s для разных пар матриц P и A. Используя (2.I5) и (2.2), получим $k\le s+\ell\le k+[\min(n,p)-k]$, или

$$k-\ell\le s\le \min(n,p)-\ell. \tag{2.I6}$$

В зависимости от значений постоянных ℓ и s рассмотрим следующие четыре основных случая.

I^0. Пусть $n=p, \ell=n-k, s=n-\ell$ или $n>p, \ell=p-k, s=p-\ell$. Тогда $k\times k$ -матрица $P^{(1)}$ невырождена на R^1 и уравнение (2.I3) имеет единственное периодическое решение из $C^r(4\pi)$ при любой неоднородности, если единственным периодическим решением системы уравнений

$$\dot{y} = [P^{(1)}(t)]^{-1}A^{(1)}(t)y$$

является нулевое. С учетом формулы (2.II) можно сделать вывод, что и уравнение (2.I) имеет единственное решение $x_0(t)\in C^r(8\pi)$. Но так как коэффициенты уравнения (2.I) принадлежат $C^r(2\pi)$, то в силу единственности $x_0(t)$ следует равенство $x_0(t+2\pi)=x_0(t)$ для всех $t\in R^1$, т.е. $x_0(t)\in C^r(2\pi)$.

2^0. Пусть: а) $n<p, \ell=n-k, s=n-\ell$ или в) $\ell=0$. Тогда с учетом (2.3) и (2.6) матрица $P^{(1)}$ размерности $k\times(p-\ell)$ в случае а) и $k\times p$ в случае в) имеет ранг k. Произведем в (2.13) замену переменных по формуле

$$x^{(1)}=\{(P^{(1)})^*[P^{(1)}(P^{(1)})^*]^{-1}, S\}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где матрица S из $C^r(4\pi)$ имеет размерность $(p-\ell)\times(p-\ell-k)$ в случае а) и $p\times(p-k)$ в случае в), а также удовлетворяет на R^1 равенствам $P^{(1)}S=0, \operatorname{rank} S=p-\ell-k$ (а), $\operatorname{rank} S=p-k$ (б), $t\in R^1$, и существует в силу леммы 3; векторы y_1 и y_2 имеют соответственно размерности k и $p-\ell-k$ (случай а), k и $p-k$ (случай в). В результате получим систему

$$\dot{y}_1=\mathcal{D}_1(t)y_1+\mathcal{D}_2(t)y_2+f^{(1)}(t), \qquad (2.17)$$

где

$$\mathcal{D}_1=A_1(P^{(1)})^*[P^{(1)}(P^{(1)})^*]^{-1}-P^{(1)}\frac{d}{dt}\{(P^{(1)})^*[P^{(1)}(P^{(1)})^*]^{-1}\}, \mathcal{D}_2=A^{(1)}S-P^{(1)}\dot{S}. \qquad (2.18)$$

Если $\mathcal{D}_2\equiv 0$, то уравнение (2.17) имеет единственное периодическое решение из $C^r(4\pi)$ (случай а) или из $C^{r+1}(4\pi)$ (случай в) всякий раз, когда единственным периодическим решением уравнения

$$\dot{\xi}=\mathcal{D}_1(t)\xi \qquad (2.19)$$

является нулевое. Следовательно, и исходная система (2.1) имеет единственное периодическое решение, которое, как можно это показать по аналогии с п. 1^0, принадлежит $C^r(2\pi)$ (случай а) или $C^{r+1}(2\pi)$ (случай в).

Если же $\mathcal{D}_2(t)\not\equiv 0$, то при выполнении указанного в случае $\mathcal{D}_2\equiv 0$ требования относительно системы (2.19) исходная система (2.1) обладает бесконечным множеством периодических решений из $C^r(4\pi)$ (а) или $C^{r+1}(4\pi)$ (в), содержащих $p-\ell-k$ (а) или $p-k$ (в) произвольных функций.

3^0. Пусть $0<s<\min(n,p)-\ell$. Тогда система (2.I3) в силу постоянности ранга $P^{(1)}$ аналогична системе (2.I) и имеет порядок $p-\ell$. Поэтому к ней применима повторная итерация, если матрицы $P^{(1)}(t)$ и $A^{(1)}(t)$ удовлетворяют равенству вида (2.7).

4^0. Пусть $s=0$, для чего в соответствии с первым неравенством (2.I6) необходимо, чтобы $k\le\ell$. Тогда система (2.I3) вырождается в алгебраическую

$$A^{(1)}(t)x^{(1)}+f^{(1)}(t)=0. \tag{2.20}$$

Если $\operatorname{rank}A^{(1)}=k$ и $p-\ell=k$, то система (2.20) совместна при любой неоднородности и имеет единственное решение $x_0^{(1)}(t)=-\left[A^{(1)}(t)\right]^{-1}f^{(1)}(t)$ принадлежащее $C^{r-1}(8\pi)$. Но тогда с учетом замены (2.II) исходная система (2.I) также обладает единственным периодическим решением, которое принадлежит $C^{r-1}(2\pi)$.

Если $A^{(1)}(t)\equiv0$, то равенство $f^{(1)}(t)\equiv0$ гарантирует совместность системы (2.20), которой удовлетворяет произвольный вектор $x^{(1)}$. С учетом (2.II) исходной системе (2.I) будет удовлетворять любой вектор $x(t)$, в частности и принадлежащий $C^{\alpha}(2m\pi)$, где неотрицательные числа α и m (α - целое) - произвольны.

Пусть $0<\operatorname{rank}A^{(1)}(t)=m\equiv const<k$. Лемма 4 гарантирует существование невырожденной на R^1 $k\times k$ -матрицы $N=\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}$ из $C^{r-1}(16\pi)$ такой, что

$$NA^{(1)}=\begin{pmatrix}N_1A^{(1)}\\N_2A^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\0\end{pmatrix}, \tag{2.2I}$$

где A_1 — $m\times(p-\ell)$ -матрица ранга m. Умножив (2.20) слева на N, с учетом (2.2I) получим:

$$A_1(t)x^{(1)}+N_1(t)f^{(1)}(t)=0, \tag{2.22}$$

$$N_2(t)f^{(1)}(t)=0. \tag{2.23}$$

Общее решение системы (2.22) при выполнении условий совместности

(2.23) системы (2.20) имеет вид

$$x^{(1)} = W(t)z(t) - A_1^*(t)\left[A_1(t)A_1^*(t)\right]^{-1}N_1(t)f^{(1)}(t), \qquad (2.24)$$

где W — $(p-\ell)\times(p-\ell-m)$ -матрица из $C^{r-1}(16\pi)$, удовлетворяющая соотношениям $A_1 W = 0$, $\operatorname{rank} W = p-\ell-m$ $(t\in R^1)$, z — произвольный $(p-\ell-m)$ -вектор. Выбрав z из $C^{r-1}(16\pi)$, согласно формулам (2.24) и (2.II) получим, что исходная система (2.I) обладает бесконечным множеством периодических решений из $C^{r-1}(16\pi)$ содержащих $p-\ell-m$ произвольных функций.

Выше приведено детальное описание первой итерации. Если $0<s<\min(n,p)-\ell$ и $\operatorname{rank}\left[P^{(1)}(t), A^{(1)}(t)\right]\equiv const$, то к системе (2.I3) порядка $p-\ell$ применима повторная итерация и т. д.

Описанный итерационный процесс конечен в силу конечности порядка системы (2.I) и положительности ℓ_i $(\ell_0=\ell)$. Он заканчивается, если не выполняется хотя бы одно из условий совместности вида (2.I0), или нарушается хотя бы одно из условий вида (2.7), (2.I5), или справедливо одно из условий пунктов I^0, 2^0 и 4^0. В последнем случае, как это следует из содержания перечисленных пунктов, можно сделать выводы о существовании периодического решения (семейства решений) у исходной системы (2.I).

Прежде чем резюмировать вышеизложенное в виде утверждений, введем некоторые обозначения.

Пусть $P^{(i)}(t)$ и $A^{(i)}(t)$ — $n_i\times p_i$ -матрицы, элементы которых являются периодическими функциями с некоторыми периодом и гладкостью. Обозначим:

$V^{(i)} = \begin{pmatrix} V_1^{(i)} \\ V_2^{(i)} \end{pmatrix}$ — $n_i\times n_i$ -матрица, обладающая на R^1 свойствами

$$V_2^{(i)}P^{(i)} = 0,\ \operatorname{rank} V_2^{(i)} = n_i - k_i,\ 1\le k_i\equiv const<\min(n_i,p_i), \qquad (2.25)$$
$$(V_2^{(i)})^* V_1^{(i)} = 0,\ \operatorname{rank} V_1^{(i)} = \operatorname{rank} P^{(i)} = k_i\ ;$$

$M^{(i)} = \begin{pmatrix} M_1^{(i)} \\ M_2^{(i)} \end{pmatrix}$ — $(n_i-k_i)\times(n_i-k_i)$- матрица такая, что для всех $t\in R^1$ и

$l_i \equiv const$, $0 < l_i < n_i - k_i$ $(n_i - k_i \le \rho_i)$, $0 < l_i \le \rho_i$ $(\rho_i < n_i - k_i)$,
$M_2^{(i)}(V_2^{(i)}A^{(i)}) = 0$, $rank\, M_2^{(i)} = n_i - k_i - l_i$,
$(M_2^{(i)})^* M_1^{(i)} = 0$, $rank\, M_1^{(i)} = rank\, V_2^{(i)}A^{(i)} = l_i$, (2.26)
а при $l_i = n_i - k_i$ $M^{(i)} \equiv I_{n_i - k_i}$;
$U^{(i)}$ — $\rho_i \times (\rho_i - l_i)$ -матрица, удовлетворяющая на R^1 условиям

$$(M_1^{(i)} V_2^{(i)} A^{(i)}) U^{(i)} = 0, \quad rank\, U^{(i)} = \rho_i - l_i . \tag{2.27}$$

Условия реализации итерационного процесса дает

Л е м м а I3. Пусть относительно системы уравнений

$$P^{(i)}(t)\dot{x}^{(i)} = A^{(i)}(t)x^{(i)} + f^{(i)}(t) \tag{2.28}$$

выполняются следующие условия.

I. Матрицы размерности $n_i \times \rho_i$ $P^{(i)}$ и $A^{(i)}$ а также n_i -вектор $f^{(i)}$ принадлежат $C^{r_i}(2^{\rho_i}\pi)$, где i - некоторое целое неотрицательное число, $P^{(0)} = P$, $A^{(0)} = A$, $f^{(0)} = f$, $r_0 = r$, $\rho_0 = 1$, $r \ge 1$ - достаточно большое целое число.

2. Справедливы равенства

$$rank\, P^{(i)} = k_i \equiv const < n_i, \quad rank[P^{(i)}, A^{(i)}] = l_i + k_i \equiv const, \quad 0 < l_i \le \min(n_i - k_i, \rho_i),$$
$$rank \begin{pmatrix} P^{(i)} \\ V_2^{(i)} A^{(i)} \end{pmatrix} = s_i + l_i \equiv const, \quad k_i - l_i \le s_i \le \min(n_i, \rho_i) - l_i . \tag{2.29}$$

Тогда существуют матрицы $V^{(i)}, M^{(i)}, U^{(i)}$ из $C^{r_{i+1}}(2^{\rho_{i+1}}\pi)$ со свойствами соответственно (2.25), (2.26) и (2.27) такие, что в результате умножения (2.28) на невырожденную на R^1 матрицу $V^{(i)}$ и замены переменных по формуле

$$x^{(i)} = U^{(i)}x^{(i+1)} - (M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)})^* \left[M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)}(M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)})^*\right]^{-1} M_1^{(i)}V_2^{(i)}f^{(i)} \equiv U^{(i)}x^{(i+1)} + \Phi^{(i)} \tag{2.30}$$

можно получить систему уравнений

$$P^{(i+1)}(t)\dot{x}^{(i+1)} = A^{(i+1)}(t)x^{(i+1)} + f^{(i+1)}(t) \tag{2.31}$$

порядка $\rho_{i+1} = \rho_i - l_i$, где $rank\, P^{(i+1)} = s_i$,

$$P^{(i+1)} = V_1^{(i)} P^{(i)} U^{(i)}, \quad A^{(i+1)} = V_1^{(i)}\left[A^{(i)} - \dot{U}^{(i)}\right], \quad f^{(i+1)} = V_1^{(i)} f^{(i)} -$$
$$-(M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)})^*\left[M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)}(M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)})^*\right]^{-1} M_1^{(i)}V_2^{(i)}f^{(i)} + \tag{2.32}$$

$$+V_1^{(i)}P^{(i)}\frac{d}{dt}\{(M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)})^*[M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)}(M_1^{(i)}V_2^{(i)}A^{(i)})^*]^{-1}M_1^{(i)}V_2^{(i)}f^{(i)}\},$$

матрицы $P^{(i+1)}$ и $A^{(i+1)}$ имеют размерность $n_{i+1}\times\rho_{i+1}=(n_i-k_i)\times(\rho_i-\ell_i)$, $f^{(i+1)}$ — n_{i+1}-вектор, $P^{(i+1)}\in C^{r_i}(2^{\rho_{i+1}}\pi)$, $A^{(i+1)}, f^{(i+1)}\in C^{r_{i+1}}(2^{\rho_{i+1}}\pi)$,

$$r_{i+1}=r_i-1,\quad \rho_{i+1}=\begin{cases}\rho_i+2, & \ell_i<n_i-k_i,\\ \rho_i+1, & \ell_i=n_i-k_i.\end{cases}$$

Применение итерационного процесса к системе (2.I) позволяет получить информацию о совместности этой системы и о наличии периодических решений.

Т е о р е м а 2. Пусть существует такое целое положительное число $q\le\rho-1$, что на каждом шаге итерационного процесса, описанного в лемме I3, выполняется условие совместности вида

$f^{(i)}\equiv 0$ при $\ell_i=0$; $M_2^{(i)}V_2^{(i)}f^{(i)}\equiv 0$ при $\ell_i\ne n_i-k_i$ $(i=\overline{0,q})$,

а также справедливо одно из нижеследующих условий:

I°. $n_q=\rho_q, \ell_q=n_q-k_q, s_q=n_q-\ell_q$ или $n_q>\rho_q, \ell_q=\rho_q-k_q, s_q=\rho_q-\ell_q$;

единственное периодическое решение уравнения $\dot y=[P^{(q+1)}(t)]^{-1}A^{(q+1)}(t)y$ является нулевым.

2°. а) $n_q<\rho_q, \ell_q=n_q-k_q, s_q=n_q-\ell_q$ или в) $\ell_q=0$;

единственное периодическое решение уравнения

$$\dot y_1=\{A^{(q+1)}(P^{(q+1)})^*[P^{(q+1)}(P^{(q+1)})^*]^{-1}-P^{(q+1)}\frac{d}{dt}\{(P^{(q+1)})^*[P^{(q+1)}(P^{(q+1)})^*]^{-1}\}\}y_1$$

является нулевым.

3°. Выполняются условия 2° и равенство $A^{(q+1)}S=P^{(q+1)}\dot S$, где матрица S имеет размерность $(\rho_q-\ell_q)\times(\rho_q-\ell_q-k_q)$ в случае а) или $\rho_q\times(\rho_q-k_q)$ в случае в) и удовлетворяет на R^1 равенствам $\operatorname{rank}S=\rho_q-\ell_q-k_q$ (сл. а), $\operatorname{rank}S=\rho_q-k_q$ (сл. в), $P^{(q+1)}S=0$ $(t\in R^1)$.

4°. $s_q=0$, $\rho_q-\ell_q=k_q$, $\operatorname{rank}A^{(q+1)}=k_q$.

5°. $s_q=0$, $0<\operatorname{rank}A^{(q+1)}=m=\mathrm{const}<k_q$.

6°. $A^{(q+1)}\equiv 0$, $f^{(q+1)}\equiv 0$.

Тогда исходная система (2.I) совместна и обладает периоди-

ческими решениями, свойства которых (количество, период и гладкость) представлены в следующей сводке, пункты которой соответствуют пунктам условий I^0 - 6^0.

I^0. Одно и принадлежит $C^{r-q}(2\pi)$.

2^0. Бесконечное множество из $C^{r-q}(2^{2q-\beta}\pi)$ (случай а) или $C^{r-q+1}(2^{2q-\beta+1}\pi)$ (случай в); содержит $\rho_q - \ell_q - k_q$ (случай а) или $\rho_q - k_q$ (случай в) произвольных функций; постоянная β определена формулой

$$\beta = \sum_{\substack{i=0 \\ \ell_i = n_i - k_i}}^{q} 1 . \tag{2.33}$$

3^0. Одно и принадлежит $C^{r-q}(2\pi)$ в случае а) или $C^{r-q+1}(2\pi)$ в случае в).

4^0. Одно и принадлежит $C^{r-q-1}(2\pi)$.

5^0. Бесконечное множество из $C^{r-q-1}(2^{2q-\beta+2}\pi)$, содержит $\rho_q - \ell_q - m$ произвольных функций, постоянная β определена (2.33).

6^0. Бесконечное множество из $C^{\gamma}(\delta)$, содержит $\rho_q - \ell_q$ произвольных функций, неотрицательные постоянные γ и δ - произвольны, γ - целое.

Замечание I. Используя формулы (2.30), можно показать, что периодическое решение (решения) $x_0(t)$ системы (2.I) представимо в таком виде

$$x_0(t) = \prod_{i=0}^{q-1} U^{(i)}(t) x_0^{(q)}(t) + \sum_{j=0}^{q-1} \prod_{i=0}^{j-1} U^{(i)}(t) \Phi^{(j)}(t), \tag{2.34}$$

где матрицы $U^{(i)}$ определены соотношениями (2.27), $\Phi^{(i)}$ — формулами (2.30), а $x_0^{(q)}(t)$ - периодическое решение системы

$$P^{(q)}(t)\dot{x}^{(q)} = A^{(q)}(t)x^{(q)} + f^{(q)}(t), \tag{2.35}$$

в которой $P^{(q)}(t) \equiv 0$, либо невырожденной на R^1 заменой переменных приводится к нормальному виду.

С другой стороны, равенство (2.34) можно понимать и как за-

мену переменных в системе (2.I), в результате которой и одновременного умножения слева (2.I) на невырожденную матрицу $\prod_{i=0}^{q-1} M^{(i)}(t)$ получим уравнение (2.35). Следовательно, если $x_0(t)$ и $x_0^{(q)}(t)$ произвольные решения системы (2.I) и (2.35) соответственно, то представление (2.34) может быть испльзовано для выяснения структуры общего решения системы (2.I), а также частных решений, если систему (2.I) дополнить, например, начальным условием. Существенным обстоятельством в последнем случае является необходимость согласованного выбора начальных условий, состоящего в выполнении в начальный момент равенства

$$x_0(t_0)=\prod_{i=0}^{q-1} U^{(i)}(t_0)\,x_0^{(q)}(t_0)+\sum_{j=0}^{q-1}\prod_{i=0}^{j-1} U^{(i)}(t_0)\,\Phi^{(j)}(t_0),$$

где ρ_q -вектор $x_0^{(q)}$ может принимать произвольные значения.

Замечание 2. Из леммы I3 и теоремы 2 можно извлечь условия существования периодических решений системы (2.I) для произвольного вектора $f(t)$.

Замечание 3. Если коэффициенты системы (2.I) являются комплексными функциями, то периодические решения, свойства которых приведены в пунктах 2^0 и 5^0, обладают тем же периодом, что и коэффициенты системы. Это следует из леммы 4.

2.2. Примеры.

Приведем примеры, иллюстрирующие лемму I3 и теорему 2. Первый из них характерен тем, что нулевое собственное значение матрицы при производных меняет кратность с течением времени, и для него не применима теорема Сибуи [I0I] о периодической блочной диагонализации. А второй указывает на существование систем, для которых число проведенных итераций не менее двух.

Пример I. Рассмотрим систему уравнений вида (2.I)

$$\begin{pmatrix} -1+\sin 2t & \cos 2t \\ -\cos 2t & 1+\sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4\sin t \\ -4\cos t \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Легко проверить, что $\operatorname{rank} P(t)=k\equiv 1$ и нулевое собственное

значение матрицы $P(t)$ меняет кратность в точках $\frac{\pi}{2}m\ (m=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

Произведем предварительный анализ с целью установления вида редуцированной системы. В силу постоянности ранга матрицы P и леммы 4 существует невырожденная на R^1 2×2-матрица $V(t)$ из $C^\infty(2\pi)$ такая, что после умножения слева системы (2.36) на $V(t)$ получим систему вида (2.4)-(2.5). Так как $\operatorname{rank}[P,A]=k+\ell\equiv 2$, то алгебраическое уравнение вида (2.5) совместно при любой неоднородности, а в общее решение входит в качестве множителя произвольная скалярная функция. Матрица $P^{(1)}(t)$ редуцированной системы вида (2.13) невырождена на R^1, поскольку в условии вида (2.15)

$$s=1:\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix} P \\ V_2 A \end{pmatrix}=\ell+s\equiv 2,\quad \text{где}\quad V_2=(\sin t+\cos t,\ \sin t-\cos t)\in C^\infty(2\pi).$$

Найдем единственное периодическое решение системы (2.36). Умножив слева (2.36) на матрицу из $C^\infty(2\pi)$

$$V(t)=\begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin t-\cos t & -(\sin t+\cos t) \\ \sin t+\cos t & \sin t-\cos t \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{cases} -(\sin t-\cos t)\dot{x}_1-(\sin t+\cos t)\dot{x}_2=(\sin t-\cos t)x_1+(\sin t+\cos t)x_2+2, & (2.37) \\ 0=(\sin t+\cos t)x_1-(\sin t-\cos t)x_2+2. & (2.38) \end{cases}$$

Подставив общее решение уравнения (2.38)

$$x_1(t)=(\sin t-\cos t)y-(\sin t+\cos t),\quad x_2(t)=(\sin t+\cos t)y+\sin t-\cos t, \qquad (2.39)$$

где $y(t)$ – произвольная скалярная функция, в (2.37), придем к уравнению относительно y: $\dot{y}=-y-2$, единственным периодическим решением которого является $y_0=-2$.

Таким образом, исходная система (2.36) обладает единственным периодическим решением, принадлежащим $C^\infty(2\pi)$ и с учетом (2.39) имеющим вид

$$x_1^0(t)=-3\sin t+\cos t,\quad x_2^0(t)=-\sin t-3\cos t.$$

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} \sin 2t-1 & -\cos 2t & 0 \\ -\cos t & -\sin 2t-1 & 0 \\ 2\sin t & -2\cos t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sin t \\ -1 & 1 & -\cos t \\ \sin t+\cos t & \sin t-\cos t & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

В данном случае $\operatorname{rank} P(t)=k\equiv 2$ и матрица P имеет постоянную структуру относительно нулевого собственного значения.

Первая итерация. Умножив систему (2.40) слева на невырожденную матрицу

$$V^{(0)}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin t-\cos t & -\sin t-\cos t & 0 \\ \sin t+\cos t & \sin t-\cos t & 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{cases} 2\sin t\dot{x}_1 - 2\cos t\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = (\sin t+\cos t)x_1+(\sin t-\cos t)x_2-x_3+1, \\ -2(\sin t-\cos t)\dot{x}_1+2(\sin t+\cos t)\dot{x}_2=2\sin t x_1-2\cos t x_2+x_3+1, \quad (2.41) \\ 0=2\cos t x_1+2\sin t x_2+x_3+1. \quad (2.42) \end{cases}$$

Решив уравнение (2.42) относительно x_3 и подставив результат в дифференциальную систему (2.41), придем к системе вида (2.13):

$$\begin{pmatrix} 2(\sin t-\cos t) & -2(\sin t+\cos t) \\ -2(\sin t-\cos t) & 2(\sin t+\cos t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin t+3\cos t & 3\sin t+\cos t \\ 2(\sin t-\cos t) & -2(\sin t+\cos t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Отметим, что матрица при производных системы (2.43) уже не имеет постоянной структуры относительно нулевого собственного значения, поскольку оно меняет кратность с течением времени.

Вторая итерация. Умножим слева (2.43) на матрицу $V^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

В результате получим систему вида (2.4)-(2.5):

$$\begin{cases} 2(\sin t-\cos t)\dot{x}_1-2(\sin t+\cos t)\dot{x}_2=(-\sin t+3\cos t)x_1+(3\sin t+\cos t)x_2+2, \quad (2.44) \\ 0=(\sin t+\cos t)x_1+(\sin t-\cos t)x_2+2. \quad (2.45) \end{cases}$$

Общее решение уравнения (2.45) имеет вид

$x_1(t)=(\sin t-\cos t)y(t)-(\sin t+\cos t)$, $x_2(t)=-(\sin t+\cos t)y(t)-(\sin t-\cos t)$, (2.46)

где $y(t)$ - произвольная скалярная функция. Подставив (2.46) в (2.44), придем к уравнению $\dot{y}=-y+1$, которое обладает единственным периодическим решением $y_0=-1$.

Используя соотношения (2.46), (2.42), получим единственное периодическое решение исходной системы (2.40):

$$x_1^0(t)=\sin t,\ x_2^0(t)=-\cos t,\ x_3^0(t)=1.$$

2.3. Системы с переменным рангом матриц при производных.

Существенным требованием описанного выше итерационного процесса является постоянность ранга матрицы при производных систем, получаемых при каждой итерации. Однако схема процесса применима также и в случае нарушения этого требования и при определенных условиях сводит вопрос о существовании периодических решений исходной системы к аналогичному вопросу для системы меньшего порядка, матрица при производных которой вырождается только на некотором множестве точек Ω, где $\Omega\subset R^1$, $\Omega\neq R^1$, $\Omega\neq\emptyset$.

Пусть $P^{(i)}$ и $\bar{P}^{(i)}$ - матрицы из $C^{r_i}(2^{\rho_i}\pi)$ размерности $n_i\times\rho_i$ и $n_i\times\bar{\rho}_i$ соответственно, такие что $\operatorname{rank}[P^{(i)},\bar{P}^{(i)}]=k_i$.

Обозначим $\bar{V}^{(i)}=\begin{pmatrix}\bar{V}_1^{(i)}\\ \bar{V}_2^{(i)}\end{pmatrix}$ $n_i\times n_i$ -матрицу, обладающую на R^1 свойствами

$$\bar{V}_2^{(i)}(P^{(i)},\bar{P}^{(i)})=0,\ \operatorname{rank}\bar{V}_2^{(i)}=n_i-k_i,\ 1\le k\equiv\text{const}<n_i,$$
$$(\bar{V}_2^{(i)})^*\bar{V}_1^{(i)}=0,\ \operatorname{rank}\bar{V}_1^{(i)}=\operatorname{rank}(P^{(i)},\bar{P}^{(i)})=k_i. \qquad (2.47)$$

Справедлива следующая

Лемма I4. Пусть относительно системы уравнений (2.28) выполняется условие I леммы I3, существует $n_i\times\bar{\rho}_i$ -матрица $\bar{P}^{(i)}_{(t)}$ из $C^{r_i}(2^{\rho_i}\pi)$ такая, что $\operatorname{rank}[P^{(i)},\bar{P}^{(i)}]=k_i\equiv\text{const}$, $1\le k_i<n_i$, $k_i\le\rho_i$, а также справедливо равенство

$$\operatorname{rank}[P^{(i)},\bar{P}^{(i)},A^{(i)}]=\ell_i+k_i\equiv\text{const},\ 0<\ell_i\le\min(n_i-\rho_i,\rho_i).$$

Тогда существуют матрицы $\overline{V}^{(i)}$, $M^{(i)}$, $U^{(i)}$ из $C^{r_{i+1}}(2^{\rho_{i+1}}\pi)$ со свойствами соответственно (2.47), (2.26) и (2.27) такие, что в результате умножения (2.28) на невырожденную на R^1 матрицу $\overline{V}^{(i)}$ и замены переменных по формуле (2.30) можно получить систему уравнений (2.3I) порядка $\rho_{i+1}=\rho_i-\ell_i$, коэффициенты которой определяются соотношениями (2.32), где $V_j^{(i)}\equiv\overline{V}_j^{(i)}(j=1,2)$ при этом матрицы $P^{(i+1)}$ и $A^{(i+1)}$ имеют размерность $n_{i+1}\times\rho_{i+1}=(n_i-k_i)\times(\rho_i-\ell_i)$, $f^{(i+1)}$ — n_{i+1} -вектор, $P^{(i+1)}\in C^{r_i}(2^{\rho_{i+1}}\pi)$, $A^{(i+1)}, f^{(i+1)}\in C^{r_{i+1}}(2^{\rho_{i+1}}\pi)$,

$$r_{i+1}=r_i-1,\quad \rho_{i+1}=\begin{cases}\rho_i+2, & \ell_i<n_i-k_i,\\ \rho_i+1, & \ell_i=n_i-k_i.\end{cases}$$

Доказательство леммы I4 аналогично доказательству леммы I3, поскольку осуществление каждой итерации (например, переход от системы (2.I) к (2.I3)) отличается от аналогичной операции для случая постоянного ранга матрицы P только заменой матриц V_j на $\overline{V}_j$ $(j=1,2)$, где V_j определены (2.47).

Т е о р е м а 3. Пусть существует такое целое неотрицательное число $q\le\rho-1$, что на каждом шаге итерационного процесса, описанного в лемме I4, выполняется условие совместности вида

$$f^{(q)}\equiv 0\quad(\ell_q=0),\ M_2^{(i)}\overline{V}_2^{(i)}f^{(i)}\equiv 0\ (\ell_i\ne n_i-k_i),\ i=\overline{0,q}, \tag{2.48}$$

а также справедливо одно из нижеследующих условий:

I^0. Существует хотя бы одна точка $t^*\in R^1$, для которой $\operatorname{rank}P^{(q)}(t^*)=n_q$.

2^0. $\ell_q=0$ и существует $\overline{n}_q\times\rho_q$ -матрица $\hat{P}$ из $C^{r-q+1}(2^{\rho_q-\beta}\pi)$ (β определено (2.33)) такая, что $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}P^{(q)}\\ \hat{P}\end{pmatrix}\equiv k_q$.

Тогда исходная система (2.I) совместна и обладает периодическим решением $x_0(t)$ всякий раз, когда совместна и имеет периодическое решение одна из систем

$$P^{(q)}(t)\dot{x}^{(q)}=A^{(q)}(t)x^{(q)}+f^{(q)}(t)\qquad\text{(случай I}^0\text{)}\tag{2.49}$$

$$\overline{V}_1^{(q)}(t)P^{(q)}(t)W_1(t)\dot{x}_1^{(q)}=\overline{V}_1^{(q)}(t)\Big[\big(A^{(q)}(t)W_1(t)-P^{(q)}(t)\dot{W}_1(t)\big)x_1^{(q)}+$$
$$+\big(A^{(q)}(t)W_2(t)-P^{(q)}(t)\dot{W}_2(t)\big)x_2^{(q)}\Big]+\overline{V}_1^{(q)}f^{(q)}(t) \quad \text{(случай } 2^0\text{)} \qquad (2.50)$$

при этом

$$x_0(t)=\prod_{i=0}^{q-1}U^{(i)}(t)y_0(t)+\sum_{j=0}^{q-1}\prod_{i=0}^{j-1}U^{(i)}(t)\Phi^{(j)}(t). \qquad (2.51)$$

Здесь $P^{(q)}, A^{(q)}, f^{(q)}$ принадлежат $C^{r-q+1}(2^{2q-\beta}_{\pi})$ и определены формулами (2.32), где необходимо положить $i=q-1$ и заменить $V_j^{(q-1)}$ на $\overline{V}_j^{(q-1)}(j=1,2)$; матрицы W_1 и W_2 из $C^{r-q+1}(2^{2q-\beta+1}_{\pi})$ имеют размерность $\rho_q\times k_q$ и $\rho_q\times(\rho_q-k_q)$ соответственно и удовлетворяют равенствам

$$\begin{pmatrix}P^{(q)}\\ \hat{P}^{(q)}\end{pmatrix}W_2=0,\ \operatorname{rank}W_2=\rho_q-k_q,\ W_2^*W_1=0,\ \operatorname{rank}W_1=k_q\ (t\in R^1), \qquad (2.52)$$

векторы $x^{(q)}, x_1^{(q)}, x_2^{(q)}$ имеют размерности ρ_k, k_q, ρ_q-k_q соответственно, $x_2^{(q)}$ может принимать произвольные значения; периодическое решение уравнения (2.49) (случай I^0) или (2.50) (случай 2^0), матрицы $U^{(i)}, \Phi^{(i)}$ определены соответственно формулами (2.27), (2.30), где $V_j^{(i)}$ необходимо заменить на $\overline{V}_j^{(i)}(j=1,2)$.

Доказательство. Если справедливо условие I^0, то итерационный процесс, одним из условий продолжения которого на i -том шаге является выполнение неравенства $\operatorname{rank}P^{(i)}=k_i<n_i$, прекращается ввиду нарушения этого неравенства на q -том шаге.

Если же имеет место условие 2^0, то в начале $q+1$ итерации с учетом первого условия совместности (2.48) получим уравнение

$$\overline{V}_1^{(q)}(t)P^{(q)}(t)\dot{x}^{(q)}=\overline{V}_1^{(q)}(t)A^{(q)}(t)x^{(q)}+\overline{V}_1^{(q)}(t)f^{(q)}(t), \qquad (2.53)$$

где $\overline{V}_1^{(q)}P^{(q)}-k_q\times\rho_q$ -матрица, для которой существует по крайней мере одна точка t^* такая, что $\operatorname{rank}\overline{V}_1^{(q)}(t^*)P^{(q)}(t^*)=k_q$, $x^{(q)}$ - вектор размерности ρ_q. В соответствии с условием 2^0 и леммой 3 можно построить $\rho_q\times(\rho_q-k_q)$-матрицу $W_2\in C^{r-q+1}(2^{2q-\beta+1}_{\pi})$, удовлетворяющую первым двум равенствам (2.52). Лемма 2 гарантиру-

ет существование $p_q \times k_q$ -матрицы W_1, которая принадлежит $C^{r-q+1}(2^{2q-\beta+1}\pi)$ и удовлетворяет двум последним равенствам (2.52). В результате замены переменных в уравнении (2.53) по формуле $x^{(q)} = (W_1(t), W_2(t)) \begin{pmatrix} x_1^{(q)} \\ x_2^{(q)} \end{pmatrix}$ получим уравнение (2.49). Формула (2.5I) является следствием суперпозиции формул вида (2.30), в которых необходимо заменить $V_j^{(i)}$ на $\overline{V}_j^{(i)}$ $(j=1,2)$.

Отметим, что пример системы с матрицей при производных переменного ранга приведен в следующем параграфе.

§ 3. Гладкие инвариантные торы линейных расширений динамических систем на торе с вырожденной матрицей при производных.

Объектом изучения является система уравнений на торе

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad B(\varphi)\dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{3.I}$$

где φ, a – m -векторы, B, A – $n \times n$ -матрицы, x, f – n -векторы, $a, B, A, f \in C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geq 1$, точка обозначает дифференцирование по независимой переменной t.

Определение. Равенством $x = u(\varphi)$ определяется гладкое инвариантное тороидальное многообразие системы уравнений (3.I), если $u(\varphi) \in C^l(R^m, 2\pi)$, $1 \leq l \leq r$, и имеет место тождество

$$B(\varphi)\frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi}a(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi).$$

Задача состоит в установлении условий существования для произвольного вектора неоднородности единственного гладкого инвариантного тора системы (3.I). В п. 3.I исследуется случай, когда ранг матрицы $B(\varphi)$, изменяясь при изменении φ, не превосходит I, а в п. 3.2 – когда ранг $B(\varphi)$ может быть большим I.

Если в (3.I) положить $a(\varphi) \equiv \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$, где ω_i $(i = \overline{1,m})$ – система несоизмеримых чисел, то получим условия су-

ществования единственного гладкого квазипериодического решения.

3.I. Гладкие торы системы (3.I) в случае $1 \geq \operatorname{rank} B(\varphi) \neq \text{const}$.

3.I.I. Имеет место следующая

Л е м м а I5. Пусть скалярная функция $\rho(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$. Тогда векторна функция $u(\varphi)$, определяющая гладкое тороидальное многообразие одной из двух систем уравнений

$$\dot{\varphi} = \rho(\varphi) a(\varphi), \quad B(\varphi)\dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{3.2}$$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \rho(\varphi) B(\varphi)\dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{3.3}$$

определяет также гладкое инвариантное многообразие и другой.

Действительно, с учетом коммутативности $\rho(\varphi)$ с любой матричной функцией получаем одно и то же уравнение в частных производных для функций, которые определяют гладкие инвариантные тороидальные многообразия систем (3.2) и (3.3):

$$\rho(\varphi) B(\varphi) \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi) = A(\varphi) u(\varphi) + f(\varphi).$$

Отсюда следует справедливость леммы I5.

Т е о р е м а 4. Пусть относительно системы уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \rho(\varphi)\dot{x} = b(\varphi)x + c(\varphi), \tag{3.4}$$

где φ и x векторы размерности m и n соответственно, $\rho(\varphi)$ - скалярная функция, b — $n \times n$ -матрица, $a, \rho, b, c \in C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geq 1$, выполняются следующие условия.

I. Существует невырожденная $n \times n$ -матрица $S(\varphi) \in C^0(R^m, 2\pi)$, $S^*(\varphi) \equiv S(\varphi)$, $S(\varphi_t(\varphi)) \in C^1(R^1)$ такая, что матрица

$$\hat{S}(t,\varphi) = \frac{d}{dt} S(\varphi_t(\varphi)) + S(\varphi_t(\varphi)) A(\varphi_t(\varphi)) + A^*(\varphi_t(\varphi)) S(\varphi_t(\varphi))$$

отрицательно определена: $\max_{\langle x, x\rangle = 1} \langle \hat{S}(t,\varphi)x, x\rangle \leq -2\gamma < 0$, где $\varphi_t(\varphi)$ — решение системы $\dot{\varphi} = \rho(\varphi)a(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$; γ - положительная постоянная, не зависящая от $t \in R^1$ и $\varphi \in R^m$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - обычное скалярное произведение в E^n.

2. Справедливо неравенство

$$\gamma_1 - l\alpha > 0, \tag{3.5}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{\max\limits_{\langle x,x\rangle=1,\varphi\in R^m} |\langle S(\varphi)x,x\rangle|}, \quad \alpha \geq \max\limits_{\langle z,z\rangle=1,\varphi\in R^m} \left|\left\langle \frac{\partial[\rho(\varphi)a(\varphi)]}{\partial\varphi} z,z\right\rangle\right|, \tag{3.6}$$

l – некоторое натуральное число, $1 \leq l \leq r$.

Тогда система уравнений (3.4) имеет единственный гладкий инвариантный тор $x = u(\varphi)$, $u(\varphi) \in C^l(R^m, 2\pi)$, представимый равенством

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) c(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau, \tag{3.7}$$

где $G_0(\tau,\varphi)$ – функция Грина задачи об инвариантном торе системы

$$\dot\varphi = \rho(\varphi)a(\varphi), \quad \dot y = b(\varphi)y. \tag{3.8}$$

Доказательство. Найдем гладкий инвариантный тор $y = u(\varphi)$ системы уравнений

$$\dot\varphi = \rho(\varphi)a(\varphi), \quad \dot y = b(\varphi)y + c(\varphi), \tag{3.9}$$

который в силу леммы I5 будет также гладким инвариантным тором системы (3.I).

В соответствии с теоремой I работы [65] условие I гарантирует дихотомичность тора $y = 0$ системы уравнений (3.8). Последнее означает для каждого фиксированного $\varphi \in R^m$ представимость единственным образом пространства E в виде прямой суммы двух подпространств $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$ размерности соответственно r и $n-r$ таких, что каждое решение $y(t,\varphi)$ системы уравнений (3.8) с начальным значением $y(0,\varphi)$ удовлетворяет неравенствам

$$\|y(t,x)\| \leq K \cdot \begin{cases} \exp\{-\gamma_1(t-\tau)\}\,\|y(\tau,\varphi)\|, & y(0,\varphi)\in E^+(\varphi),\ t \geq \tau, \\ \exp\{\gamma_1(t-\tau)\}\,\|y(\tau,\varphi)\|, & y(0,\varphi)\in E^-(\varphi),\ t \leq \tau, \end{cases} \tag{3.I0}$$

где $K = const > 0$ положительная постоянная γ_1 определена пер-

вой формулой (3.6), $\|\cdot\|^2=\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Известно, [29], что функция Грина $G_t(\tau,\varphi)$ задачи об ограниченных решениях системы уравнений

$$\dot{y}=B(\varphi_t(\varphi))y+C(\varphi_t(\varphi)) \tag{3.11}$$

в общем случае имеет вид

$$G_t(\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_0^t(\varphi)P_1(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau<t,\\ -\Omega_0^t(\varphi)P_2(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau>t,\end{cases} \tag{3.12}$$

где $\Omega_0^t(\varphi)$ - фундаментальная матрица решений однородной системы, соответствующей (3.11), $\Omega_0^0(\varphi)=I_n$, $P_1(\varphi)$ и $P_2(\varphi)$ - проекционные матрицы, для которых справедливы соотношения $P_1^2(\varphi)\equiv P_1(\varphi)$, $P_1(\varphi)+P_2(\varphi)=I_n$. Покажем, что имеет место оценка

$$\|G_t(\tau,\varphi)\|\le N\exp\{-\gamma_1|t-\tau|\}\quad(N=const>0,\ t,\tau\in R^1,\ \varphi\in R^m). \tag{3.13}$$

Для взаимно дополнительных проекторов $P_1(\varphi)$ и $P_2(\varphi)$ на подпространства $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$ выполняются [29] тождества

$$P_i(\varphi_t(\varphi))=\Omega_0^t(\varphi)P_i(\varphi)\Omega_t^0(\varphi)\quad(t\in R^1,\ i=1,2). \tag{3.14}$$

Из построения $E^+(\varphi)$ и $E^-(\varphi)$ следует неравенство

$$\|P_i(\varphi)\|\le M=const\quad(\varphi\in R^m,\ i=1,2),$$

которое совместно с (3.14) влечет выполнение оценки

$$\|P_i(\varphi_t(\varphi))\|\le M\quad(t\in R^1,\ \varphi\in R^m,\ i=1,2). \tag{3.15}$$

Положив в (3.10) решение $y(\tau,\varphi)$ с начальным значением $y(0,\varphi)=P_1(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)x$, где $x\in E^n$, при $t\ge\tau$ с учетом (3.10), (3.14) и (3.15) получим оценку (3.13):

$$\|\Omega_0^t(\varphi)P_1(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)x\|=\|y(t,\varphi)\|=\|\Omega_0^t(\varphi)y(0,\varphi)\|\le$$

$$\le K\exp\{-\gamma_1(t-\tau)\}\|y(\tau,\varphi)\|=K\exp\{-\gamma_1(t-\tau)\}\|\Omega_0^\tau(\varphi)P_1(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)x\|\le$$

$$\le MK\exp\{-\gamma_1(t-\tau)\}=N\exp\{-\gamma_1(t-\tau)\}.$$

Точно так же получается оценка (3.13) и в случае $t<\tau$.

Функция $G_t(\tau,\varphi)$ порождает при $t=0$ функцию Грина $G_0(\tau,\varphi)$ задачи об инвариантном торе [60] системы уравнений (3.8). При этом из (3.I3) следует оценка

$$\|G_0(\tau,\varphi)\| \le N\exp\{-\gamma_1|\tau|\} \quad (\tau\in R^1, \varphi\in R^m).$$

Тогда искомый инвариантный тор $y=u(\varphi)$ системы уравнений (3.9) представим равенством (3.7).

Гладкость коэффициентов системы (3.9), условие 2 и теорема I2 работы [44] гарантируют непрерывную дифференцируемость функции $G_0(\tau,\varphi)$ по φ до порядка ℓ включительно, а также справедливость оценки $\|D_\varphi^\ell G_0(\tau,\varphi)\| \le K_1 \exp\{-(\gamma_1-\ell\alpha)|\tau|\}$ $(\tau\in R^1, \varphi\in R^m)$, где $K_1=const>0$, D_φ^ℓ - оператор дифференцирования порядка ℓ по φ. Включение $u(\varphi)\in C^\ell(R^m, 2\pi)$ следует из (3.7) и этой оценки.

Докажем единственность инвариантного тора. Предположим, что система (3.4) имеет еще одно гладкое инвариантное многообразие $x=v(\varphi)\not\equiv u(\varphi)$. Тогда функция $z(\varphi)=u(\varphi)-v(\varphi)$, ограниченная для всех $\varphi\in R^m$, должна удовлетворять, согласно лемме I5, на траекториях решений $\varphi_t(\varphi)$ уравнению $\dot z = b(\varphi_t(\varphi))z$. В силу же неравенства (3.I0) единственным ограниченным на всей оси R^1 решением этого уравнения является тривиальное. Поэтому $v(\varphi)\equiv u(\varphi)$ $\forall\varphi\in R^m$.

3.I.2. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot\varphi = a(\varphi), \ \langle g(\varphi), \dot x\rangle = \langle \rho_1(\varphi), x\rangle + f_1(\varphi), \\ 0 = \langle \rho_i(\varphi), x\rangle + f_i(\varphi), \ i=\overline{2,n}, \end{cases} \tag{3.I6}$$

где $\langle \rho_i(\varphi), x\rangle = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}(\varphi)x_j$ — обычное скалярное произведение, $g=(g_1, g_2, \dots, g_n)$, $a, g, \rho_i, f_i \in C^{r+1}(R^m, 2\pi)$, $i=\overline{1,n}$, $r\ge 1$. Нас интересуют условия, при которых система уравнений (3.I6) при каждой неоднородности $f(\varphi)=(f_1,\dots,f_n)\in C^{r+1}(R^m, 2\pi)$ имеет единственный гладкий инвариантный тор.

Введем обозначения

$$P_2=\begin{pmatrix}\rho_2\\ \vdots\\ \rho_n\end{pmatrix},\ F_2=\begin{pmatrix}f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix}\rho_1\\ P_2\end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}g\\ P_2\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\dot g\\ P_2\end{vmatrix},$$

где $|B|\equiv\det B$.

Т е о р е м а 5. Пусть $\operatorname{rank}P_2(\varphi)\equiv n-1$ и выполняются все условия теоремы 4, где $\rho(\varphi)\equiv\Delta_1(\varphi)$, $b(\varphi)\equiv\Delta(\varphi)+\Delta_2(\varphi)-\dot\Delta_1(\varphi)$.

Тогда система уравнений (3.16) при каждой неоднородности $f(\varphi)\in C^{r+1}(R^m,2\pi)$ имеет единственный гладкий инвариантный тор $x=u(\varphi)$, $u(\varphi)\in C^l(R^m,2\pi)$, $1\le l\le r$.

Доказательство. Запишем общее решение алгебраической системы в виде

$$x=v(\varphi)y+q(\varphi),\qquad(3.17)$$

где

$$v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\ v_i=(-1)^{i+1}\begin{vmatrix}\rho_{21}\cdots\rho_{2,i-1}\ \rho_{2,i+1}\cdots\rho_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho_{n1}\cdots\rho_{n,i-1}\ \rho_{n,i+1}\cdots\rho_{nn}\end{vmatrix},\ q=-P_2^*(P_2P_2^*)^{-1}F_2,$$

y – произвольная скалярная функция. Подставив (3.17) в первое уравнение (3.16), получим

$$\langle g(\varphi),v(\varphi)\rangle\dot y=\left[\langle\rho_1(\varphi),\dot v(\varphi)\rangle-\langle g(\varphi),\dot v(\varphi)\rangle\right]y+\langle\rho_1(\varphi),q(\varphi)\rangle-\langle g(\varphi),\dot q(\varphi)\rangle+f_1(\varphi).\qquad(3.18)$$

Приняв во внимание то, что $\langle\rho_1(\varphi),v(\varphi)\rangle=\Delta(\varphi)$, $\langle g(\varphi),v(\varphi)\rangle=\Delta_1(\varphi)$, $\langle g(\varphi),\dot v(\varphi)\rangle=\dot\Delta_1(\varphi)-\Delta_2(\varphi)$, с учетом утверждений теоремы 4 убеждаемся в справедливости теоремы 5.

3.1.3. Сформулируем основной результат п. 3.1. относительно системы уравнений (3.1).

Т е о р е м а 6. Пусть система уравнений (3.1), все коэффициенты которой принадлежат $C^r(R^m,2\pi)$, $r\ge2$, удовлетворяет следующим условиям.

1. Матрица $A(\varphi)$ невырождена при всех $\varphi\in R^m$.

2. Существует $n\times k$ -матрица $\hat B(\varphi)\in C^r(R^m,2\pi)$ такая, что

$$\operatorname{rank}\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]\equiv 1.$$

Тогда можно указать такое фиксированное число $\delta>0$, что неравенство

$$\|a\|\|B\|\|A^{-1}\|+\left\|\frac{\partial a}{\partial\varphi}\right\|\|B\|\|A^{-1}\|+\|a\|\|B\|\left\|\frac{\partial A^{-1}}{\partial\varphi_i}\right\|+\|a\|\left\|\frac{\partial B}{\partial\varphi_i}\right\|\|A^{-1}\|\le\delta,\ i=\overline{1,m},\quad(3.19)$$

где нормы матриц операторные, обеспечивает существование единственного гладкого инвариантного тора $x=U(\varphi),\ U(\varphi)\in C^{r-1}(R^m,2\pi)$, системы уравнений (3.1) для любой неоднородности $f(\varphi)\in C^r(R^m,2\pi)$.

Доказательство. Приведем сначала систему уравнений (3.1) к системе вида (3.16). Матрица $\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]$ удовлетворяет условиям леммы 7, согласно которой существует n-мерный вектор $\mu(\varphi)$ из $C^r(R^m,4\pi)$ такой, что

$$\mu(\varphi)\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]=\lambda(\varphi),\ \|\mu(\varphi)\|\equiv 1,\ \|\lambda(\varphi)\|\neq 0\quad(\varphi\in R^m).\quad(3.20)$$

Покажем, что для каждого вектора $\nu(\varphi)$, ортогонального к $\mu(\varphi)$, выполняется равенство $\nu(\varphi)\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]=0$ для всех $\varphi\in R^m$. Зафиксируем произвольным образом точку $\bar{\varphi}\in R^m$. Тогда можно найти векторы $\nu_1(\bar{\varphi}),\nu_2(\bar{\varphi}),\dots,\nu_{n-1}(\bar{\varphi})$ такие, что

$$\nu_i(\bar{\varphi})\mu^*(\bar{\varphi})=0\ \ (i=\overline{1,n-1}),\ \det\begin{pmatrix}\mu(\bar{\varphi})\\ \nu_1(\bar{\varphi})\\ \vdots\\ \nu_{n-1}(\bar{\varphi})\end{pmatrix}\neq 0.\quad(3.21)$$

С другой стороны, с учетом условия 2 матрицу $\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]$ в точке $\varphi=\bar{\varphi}$ можно представить в следующем виде

$$\left[B(\bar{\varphi}),\hat{B}(\bar{\varphi})\right]=\left(\alpha_1 b(\bar{\varphi}),\alpha_2 b(\bar{\varphi}),\dots,\alpha_{n+k}b(\bar{\varphi})\right),$$

где $\sum_{i=1}^{n+k}\alpha_i^2>0,\ \|b(\bar{\varphi})\|>0$. В соответствии с условием 2 и неравенством (3.21)

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\mu(\bar{\varphi})\\ \nu_1(\bar{\varphi})\\ \vdots\\ \nu_{n-1}(\bar{\varphi})\end{pmatrix}\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\alpha_1\mu(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})\dots\alpha_{n+k}\mu(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})\\ \alpha_1\nu_1(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})\dots\alpha_{n+k}\nu_1(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})\\ \\ \alpha_1\nu_{n-1}(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})\dots\alpha_{n+k}\nu_{n-1}(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})\end{pmatrix}=1,$$

откуда с учетом неравенства (3.20) следует, что либо $\nu_i(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})=0$ $(i=\overline{1,n-1})$, либо $\nu_i(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})=\beta_i\mu(\bar{\varphi})b(\bar{\varphi})$ $(\beta_i=const, i=\overline{1,n-1})$. Однако последние равенства противоречат равенствам (3.21). Таким образом, векторы $\nu_i(\bar{\varphi})$ $(i=\overline{1,n-1})$ определенные соотношениями (3.21), удовлетворяют равенствам $\nu_i(\bar{\varphi})\left[B(\bar{\varphi}),\hat{B}(\bar{\varphi})\right]=0$, $i=\overline{1,n-1}$. В силу произвола выбора точки $\bar{\varphi}$ следует требуемое утверждение. Точно так же можно показать равенство

$$\operatorname{rank}\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi),\mu^*(\varphi)\right]=1 \quad \forall\varphi\in R^m. \tag{3.22}$$

Применение к матрице $(B,\hat{B})$ леммы 8 не всегда возможно, поскольку она предполагает выполнение неравенства $n>m+1$. Поэтому построим следующую матрицу размерности $(n+1)\times n$

$$Q(\varphi)\equiv\begin{pmatrix}\mu(\varphi)\\ Q_1(\varphi)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\mu(\varphi)\\ I_n-\mu^*(\varphi)\mu(\varphi)\end{pmatrix},$$

которая обладает такими свойствами:

$$\operatorname{rank}Q(\varphi)\equiv n,\ Q_1(\varphi)\mu^*(\varphi)\equiv 0,\ Q(\varphi)\in C^r(R^m,4\pi). \tag{3.23}$$

Так как все строки матрицы Q_1, согласно (3.23), ортогональны вектору μ^*, то, как показано выше, с необходимостью $Q_1(\varphi)\left[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)\right]\equiv 0$. Умножив вторую систему уравнений (3.1) слева на $Q(\varphi)$, придем к следующей равносильной, с учетом второго равенства (3.23), системе

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=a(\varphi),\ \mu(\varphi)B(\varphi)\dot{x}=\mu(\varphi)A(\varphi)x+\mu(\varphi)f(\varphi), & (3.24)\\ 0=Q_1(\varphi)\left[A(\varphi)x+f(\varphi)\right]. & (3.25)\end{cases}$$

Общее решение алгебраической системы (3.25) можно представить, используя невырожденность матрицы $A(\varphi)$ в виде

$$x=A^{-1}(\varphi)\mu^*(\varphi)y-A^{-1}(\varphi)f(\varphi), \tag{3.26}$$

где y – произвольная скалярная функция. Подставив (3.26) во второе дифференциальное уравнение (3.24), получим

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\ \rho(\varphi)\dot{y}=b(\varphi)y+c(\varphi), \tag{3.27}$$

где

$$\rho=\mu B A^{-1}\mu^{*},\ b=1-\mathcal{D}\equiv 1-\left(\mu B\frac{dA^{-1}}{dt}\mu^{*}+\mu BA^{-1}\frac{d\mu^{*}}{dt}\right),\qquad (3.28)$$

$$c=\mu B\frac{d}{dt}\left(A^{-1}f+\mu f\right).$$

Применим теорему 4 к системе (3.27). С этой целью потребуем близости функции $b(\varphi)$ к 1, что дает возможность в качестве $S(\varphi)$ выбрать -1, и малость функции $\rho(\varphi)$, что позволяет добиться требуемой гладкости тора. В нашем случае неравенство (3.5) при $\ell=r-1$ имеет вид

$$1-|\mathcal{D}(\varphi)|-(r-1)\left\|\frac{\partial[\rho(\varphi)a(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\|>0.\qquad (3.29)$$

Оценивая $|\mathcal{D}(\varphi)|$ и $\left\|\frac{\partial[\rho(\varphi)a(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\|$ с учетом (3.28) получаем

$$|\mathcal{D}(\varphi)|\le\|B(\varphi)\|\|a(\varphi)\|\left\{\left[\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial A^{-1}(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right]^{1/2}+\|A^{-1}(\varphi)\|\left[\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial\mu(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right]^{1/2}\right\},$$

$$\left\|\frac{\partial[\rho(\varphi)a(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\|\le\|B(\varphi)A^{-1}(\varphi)\|\left\|\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\right\|+\sqrt{m}\,\|a(\varphi)\|\max_{1\le i\le m}\left[2\|B(\varphi)A^{-1}(\varphi)\|\left\|\frac{\partial\mu(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi_i}A^{-1}(\varphi)\right\|+\left\|B(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi_i}A^{-1}(\varphi)\right\|\right].$$

Отсюда и из включения $\mu(\varphi)\in C^{r}(R^{m},2\pi)$ следует, что выбор достаточно малого $\delta>0$ в неравенстве (3.19) обеспечивает выполнение неравенства (3.29), а это значит, что система уравнений (3.1) имеет единственный $r-1$ раз непрерывно дифференцируемый инвариантный тор $x=u(\varphi)$. При этом единственность влечет за собой включение $u(\varphi)\in C^{r-1}(R^{m},2\pi)$, т. е. периодичность по φ_i $(i=\overline{1,m})$ с периодом 2π, а не с 4π. Теорема 6 доказана.

Замечание 1. Для конкретных систем (3.1) более удобным, по сравнению с неравенством (3.19), является неравенство

$$d+(r-1)d_1<1,\qquad (3.30)$$

где

$$d=\max_{\varphi\in R^{m}}\left\{\|B(\varphi)\|\|a(\varphi)\|\left[\left\|\frac{\partial A^{-1}(\varphi)}{\partial\varphi}\right\|+\frac{2\sqrt{n+k}}{\|[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)]\|}\|A^{-1}(\varphi)\|\left\|\frac{\partial}{\partial\varphi}[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)]\right\|\right]\right.,\qquad (3.31)$$

$$\alpha_1 = \max_{\varphi \in R^m} \left\{ \|B(\varphi)A^{-1}(\varphi)\| \left[\left\| \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right\| + \frac{4\sqrt{n+k}}{\|[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]\|} \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} [B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] \right\| \right] + \|a\| \left\| \frac{\partial [B(\varphi)A^{-1}(\varphi)]}{\partial \varphi} \right\| \right\}, \quad (3.32)$$

нормы матриц и векторов евклидовы.

Чтобы получить (3.30), достаточно в неравенстве (3.29) оценить $|\mathcal{D}(\varphi)|$ и $\left\| \frac{\partial [\rho(\varphi)a(\varphi)]}{\partial \varphi} \right\|$ таким образом, чтобы в искомые оценки входили только коэффициенты системы уравнений (3.I). Осуществим это. Из равенства (3.22) следует, что для произвольной точки $\varphi \in R^m$ найдется номер $i \in [1, n+k]$ такой, что

$$\|b_i(\varphi)\| \geq \|b_j(\varphi)\|, \; j = \overline{1, n+k}, \; \|b_i(\varphi)\| > 0, \; \mu^*(\varphi) = \frac{\pm b_i(\varphi)}{\|b_i(\varphi)\|}, \quad (3.32')$$

где $[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] = \{b_s(\varphi)\}_{s=\overline{1, n+k}}$. Из первого неравенства (3.32′) следуют оценки

$$\frac{1}{\sqrt{n+k}} \|[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]\| \leq \|b_i(\varphi)\| \leq \|[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]\|, \quad (3.33)$$

где норма матрицы евклидова. Дифференцируя по φ_s, $s = \overline{1, m}$ в окрестности, возможно односторонней, точки φ последнее равенство (3.32′), с учетом (3.33) можно получить неравенство

$$\left\| \frac{\partial \mu^*(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \leq 2\sqrt{n+k} \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} [B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] \right\| \|[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)]\|^{-1}, \quad (3.34)$$

используя которое и произвол выбора φ из R^m приходим к оценкам $|\mathcal{D}(\varphi)| \leq d$, $\left\| \frac{\partial [\rho(\varphi)a(\varphi)]}{\partial \varphi} \right\| \leq \alpha_1$, где d и α_1 определены формулами (3.3I) и (3.32) соответственно.

Замечание 2. В случае выполнения вместо (3.30) неравенства $d + \ell\alpha < 1$ для некоторого натурального $\ell \in [1, r-1]$ система (3.I) обладает единственным инвариантным тором $x = U(\varphi) \in C^\ell(R^m_{2\pi})$, если справедливы условия I и 2 теоремы 6.

3.I.4. Приведем пример, иллюстрирующий теорему 6.

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами и вырожденной матрицей при производных

$$\rho\begin{pmatrix}(\sin t)\sin\sqrt{2}t & 1+\cos t\\ (1-\cos t)\sin\sqrt{2}t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(t,\sqrt{2}t)\\ f_2(t,\sqrt{2}t)\end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

где ρ – некоторый фиксированный параметр из промежутка $(0,1]$, $f_i(t,\sqrt{2}t)$, $i=1,2$, – некоторые фиксированные квазипериодические функции такие, что $f_i(\varphi_1,\varphi_2)\in C^r(R^2,2\pi)$, $i=1,2$, $r\geq 2$.

Задача состоит в нахождении таких значений параметра $\rho\in(0,1]$, чтобы система уравнений (3.35) при каждой неоднородности $f_i(t,\sqrt{2}t)$, $i=1,2$, имела единственное квазипериодическое решение.

Рассмотрим расширенную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}_1=1,\quad \dot{\varphi}_2=\sqrt{2},$$

$$\rho\begin{pmatrix}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & 1+\cos\varphi_1\\ (1-\cos\varphi_1)\sin\varphi_2 & \sin\varphi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(\varphi_1,\varphi_2)\\ f_2(\varphi_1,\varphi_2)\end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

В данном случае $\operatorname{rank}B(\varphi)$ принимает значения 0 или 1 в зависимости от значений φ_1,φ_2, но $B(\varphi)$ дополняема до матрицы $[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)]$ единичного ранга, достаточно в качестве $\hat{B}(\varphi)$ взять вектор-столбец $\begin{pmatrix}\sin\varphi_1\\ 1-\cos\varphi_1\end{pmatrix}$. Замечаем, что векторная функция $\mu(\varphi_1)=\left(\cos\frac{\varphi_1}{2},\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)$ с единичной нормой пропорциональна каждому столбцу матрицы $[B(\varphi),\hat{B}(\varphi)]$. После умножения второй системы уравнений (3.36) на матрицу

$$\begin{pmatrix}\mu\\ I_2-\mu^*\mu\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos\frac{\varphi_1}{2} & 2\sin\frac{\varphi_1}{2}\\ 1-\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & 1+\cos\varphi_1\end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_1=1,\ \dot{\varphi}_2=\sqrt{2},\ 2\rho\left(\sin\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2},\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\left(\cos\frac{\varphi_1}{2},\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(\varphi_1,\varphi_2)\\ f_2(\varphi_1,\varphi_2)\end{pmatrix}\right],\\ 0=\begin{pmatrix}1-\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & 1+\cos\varphi_1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(\varphi_1,\varphi_2)\\ f_2(\varphi_1,\varphi_2)\end{pmatrix}\right].\end{cases}$$

Общее решение алгебраической системы , найденное по формуле (3.26) имеет вид

$$x_1=\left(\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)y-f_2(\varphi_1,\varphi_2),\ x_2=\left(\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)y-f_1(\varphi_1,\varphi_2). \tag{3.37}$$

Подставляя его в дифференциальное уравнение, получаем

$$\rho(\varphi)\dot{y}=b(\varphi)y+c(\varphi),$$

где

$$\rho(\varphi)=\rho(1+\sin\varphi_2+\cos\varphi_1-\cos\varphi_1\sin\varphi_2),\ b(\varphi)=1-\mathcal{D}(\varphi)=1-\frac{\rho}{2}(\sin\varphi_2\sin\varphi_1-\sin\varphi_1),$$
$$c(\varphi)=2\rho\left[\sin\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial\varphi_1}+\frac{\partial f_2}{\partial\varphi_2}\sqrt{2}\right)+\cos\frac{\varphi_1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1}+\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_2}\sqrt{2}\right)\right]. \tag{3.38}$$

Найдем ρ , при которых выполняется неравенство (3.29). Имеем

$$|\mathcal{D}(\varphi)|=\left|-\frac{\rho}{2}\sin\varphi_1(1-\sin\varphi_2)\right|\le\rho,$$

$$\left\|\frac{\partial[\rho(\varphi)a(\varphi)]}{\partial\varphi}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\frac{\partial\rho(\varphi)}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial\rho(\varphi)}{\partial\varphi_2}\\ \sqrt{2}\frac{\partial\rho(\varphi)}{\partial\varphi_1} & \sqrt{2}\frac{\partial\rho(\varphi)}{\partial\varphi_2}\end{pmatrix}\right\|=\max_{\langle\eta,\eta\rangle=1}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_1}\eta_1+\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_2}\eta_2\right)^2+2\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_1}\eta_1+\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_2}\eta_2\right)^2\right]^{1/2}\le$$

$$\le\left\{6\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_1}\right)^2\eta_1^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_2}\right)^2\eta_2^2\right]\right\}^{1/2}\le\left[24\rho^2(\eta_1^2+\eta_2^2)\right]^{1/2}=\rho\sqrt{24},$$

Используя (3.29), получим $1-\rho-(r-1)\rho\sqrt{24}>0.$

откуда следует, что неравенство (3.29) справедливо всякий раз, когда $0<\rho<\left[1+(r-1)\sqrt{24}\right]^{-1}.$

Таким образом, подводя итог сказанному, утверждаем, что система уравнений (3.35) при каждой неоднородности $f_i(t,\sqrt{2}t)$ $f_i(\varphi_1,\varphi_2)\in C^r(R^2,2\pi),\ i=1,2,$ имеет единственное квазипериодическое решение $x_i(t,\sqrt{2}t),\ x_i(\varphi_1,\varphi_2)\in C^{r-1}(R^2,2\pi),\ i=1,2,$ как только $0<\rho<\left[1+(r-1)\sqrt{24}\right]^{-1},$ и это решение представимо с учетом (3.37) в виде

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}f_2(t,\sqrt{2}t)\\ f_1(t,\sqrt{2}t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sin\frac{t}{2}\\ \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}\int_0^\infty c(\varphi_\tau(t,\sqrt{2}t))\exp\left\{\int_\tau^0 b(\varphi_\xi(t,\sqrt{2}t))d\xi\right\}d\tau,$$

где $\varphi_\tau=\begin{pmatrix}\varphi_{1,\tau}\\ \varphi_{2,\tau}\end{pmatrix},\ \varphi_0=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot\varphi_1 = \rho(1+\sin\varphi_2+\cos\varphi_1-\cos\varphi_1\sin\varphi_2), \\ \dot\varphi_2 = \rho\sqrt{2}\,(1+\sin\varphi_2+\cos\varphi_1-\cos\varphi_1\sin\varphi_2), \end{cases}$$

функции c и b определены формулами (3.38).

Отметим, что в полученном квазипериодическом решении частотный базис такой же, как и коэффициентов исходной системы (3.35).

3.I.5. При доказательстве теоремы 6 существенно использовалось условие 2. В связи с этим отметим, что существуют матричные функции $B(\varphi)$ из $C^r(R^m, 2\pi)$, $r\geq 1$, которые нельзя дополнить матричной функцией $\hat B(\varphi)$ из $C^r(R^m, 2\pi)$ так, чтобы $\operatorname{rank}[B(\varphi), \hat B(\varphi)] \equiv 1$. Примером такой функции является матрица $B(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Оказывается, что системы уравнений (3.I), для которых условие 2 теоремы 6 не выполнимо, могут иметь гладкие инвариантные торы, а именно, имеет место

Т е о р е м а 7. Пусть относительно системы уравнений

$$\dot\varphi = a(\varphi),\quad \rho B(\varphi)\dot x = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{3.39}$$

где a, $B=\{b_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $f\in C^r(R^m, 2\pi)$, $r\geq 2$, ρ — параметр, $\rho\in[0,\rho_0]$, известно, что

I) $\det A(\varphi)\neq 0 \quad \forall\varphi\in R^m$;

2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{11} & a_{11} \\ b_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \equiv 1$ или $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv 1$.

Тогда можно указать такое значение $\rho_1\in[0,\rho_0]$, что при всех $\rho\in[0,\rho_1]$ система уравнений (3.39) имеет единственный гладкий инвариантный тор $x = u(\varphi)$, $u(\varphi)\in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, для каждой неоднородности $f(\varphi)\in C^r(R^m, 2\pi)$.

Доказательство. Пусть, например, имеет место второе равенство условия 2). Лемма 6 гарантирует существование 2-мерного вектора $\mu(\varphi)$, удовлетворяющего системе уравнений

$$\begin{cases} b_{12}(\varphi)\mu_1 + b_{22}(\varphi)\mu_2 = 0, \\ a_{12}(\varphi)\mu_1 + a_{22}(\varphi)\mu_2 = 0, \end{cases} \tag{3.40}$$

и такого, что $\|\mu(\varphi)\| = 1$, $\mu(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi)$. Домножив вторую систему уравнений (3.39) слева на невырожденную на R^m матрицу $\begin{pmatrix} \mu_1(\varphi) & \mu_2(\varphi) \\ -\mu_2(\varphi) & \mu_1(\varphi) \end{pmatrix}$, с учетом (3.40) получим

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \rho \begin{pmatrix} b'_{11}(\varphi) & 0 \\ b'_{21}(\varphi) & b'_{22}(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}(\varphi) & 0 \\ a'_{21}(\varphi) & a'_{22}(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f'_1(\varphi) \\ f'_2(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

где $b'_{11} = \mu_1 b_{11} + \mu_2 b_{21}$, $b'_{21} = -\mu_2 b_{11} + \mu_1 b_{21}$, $b'_{22} = -\mu_2 b_{12} + \mu_1 b_{22}$, $a'_{11} = \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{21}$, $a'_{21} = -\mu_2 a_{11} - \mu_1 a_{21}$, $a'_{22} = -\mu_2 a_{12} + \mu_1 a_{22}$, $f'_1 = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$, $f'_2 = -\mu_2 f_1 + \mu_1 f_2$.

Первое условие теоремы 7 и результаты теоремы 4 дают возможность утверждать существование единственного гладкого тора $x_1 = u_1(\varphi)$, $u_1(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi)$, системы уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \rho b'_{11}(\varphi)\dot{x}_1 = a'_{11}(\varphi)x_1 + f'_1(\varphi)$$

при достаточно малых значениях $\rho > 0$. Подставляя $x_1 = u_1(\varphi)$ во второе уравнение системы (3.41), получаем систему

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \rho b'_{22}(\varphi)\dot{x}_2 = a'_{22}(\varphi)x_2 + f'_2(\varphi) - \rho b'_{21}(\varphi)\dot{u}_1(\varphi) + a'_{21}(\varphi)u_1(\varphi),$$

которая с учетом теоремы 4 также обладает единственным тором $x_2 = u_2(\varphi)$, $u_2(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 4\pi)$, для достаточно малого $\rho_1 \in [0, \rho_0]$ и всех $\rho \in [0, \rho_1]$. Поскольку тор $x_i = u_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, системы уравнений (3.39) единственный, а коэффициенты этой системы периодические, то имеет место включение $u_i(\varphi) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, $i = 1, 2$. Теорема 7 доказана.

Теорема 7 позволяет, например, утверждать существование гладкого квазипериодического решения системы уравнений

$$\rho \begin{pmatrix} \sin\omega_1 t & 0 \\ \sin\omega_2 t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t & \sin\omega_2 t \\ -\sin\omega_2 t & \cos\omega_2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\omega_1 t, \omega_2 t) \\ f_2(\omega_1 t, \omega_2 t) \end{pmatrix}$$

при каждой неоднородности $f_i(\omega_1 t, \omega_2 t), f_i(\varphi_1, \varphi_2) \in C^r(R^m, 2\pi)$, $i=1,2$, $r \geq 2$; при этом параметр ρ нужно выбрать из отрезка $\left[0, \frac{1}{8r(\omega_1^2+\omega_2^2)}\right]$.

3.2. Гладкие торы системы (3.I) в случае $1 \leq \operatorname{rank} B(\varphi) \neq const$.

Применим итерационный процесс, описанный в § 2, для решения поставленной в начале § 3 задачи.

Опишем первую итерацию.

Предположим, что существует $n \times p$ -матрица $\hat{B}(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$ (r - достаточно большое число, не превышающее, однако, $n+1$) такая, что $\operatorname{rank}[B(\varphi), \hat{B}(\varphi)] = k \equiv const$, $0 < k < n$.

Пусть выполняется также неравенство

$$n > \begin{cases} m+1, & k=1, \ k=n-1, \\ m+k, & 1<k<n. \end{cases} \tag{3.42}$$

Тогда лемма 8 гарантирует существование невырожденной на R^m $n \times n$ -матрицы $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяющей соотношениям

$$\operatorname{rank} V_1(B, \hat{B}) = k, \ V_2(B\hat{B}) = 0, \ \operatorname{rank} V_2 = n-k \quad (\varphi \in R^m) \tag{3.43}$$

и принадлежащей $C^r(R^m, 2\pi)$ при $k \in (1, n-1)$ или $C^r(R^m, 4\pi)$ при $k=1$, $k=n-1$. Умножив второе уравнение (3.I) слева на V, с учетом (3.43) получим

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = a(\varphi), \ Q(\varphi)\dot{x} = D_1(\varphi)x + g_1(\varphi); & (3.44) \\ 0 = D_2(\varphi)x + g_2(\varphi), & (3.45) \end{cases}$$

где $Q = V_1 B$, $D_j = V_j A$, $g_j = V_j f$ $(j=1,2)$.

Поскольку алгебраическая система (3.45) должна быть совместной при любом g_2, то мы должны требовать выполнения равенства $\operatorname{rank} D_2(\varphi) \equiv n-k$, для чего в соответствии с леммой 9 необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}[B(\varphi), \hat{B}(\varphi), A(\varphi)] \equiv n$.

Предположим дополнительно в случае $1<k<n-1$, что $k>m$.

Тогда общее решение системы (3.45) имеет вид

$$x=Ux^{(1)}-D_2^*(D_2D_2^*)^{-1}g_2, \tag{3.46}$$

где $U-$ $n\times k$ -матрица из $\begin{cases} C^r(R^m,8\pi), & k=1,\\ C^r(R^m,4\pi), & k=n-1,\\ C^r(R^m,2\pi), & 1<k<n-1, \end{cases}$

существующая при $k=1$ в силу леммы 6, а при $k>1$ - леммы 5, $x^{(1)}$ - произвольный k -вектор. Подставив (3.46) во второе уравнение (3.44), придем к уравнению относительно $x^{(1)}$ порядка $n_1=k$:

$$\dot\varphi=a(\varphi),\ B^{(1)}_{(\varphi)}\dot x^{(1)}=A^{(1)}_{(\varphi)}x^{(1)}+f^{(1)}(\varphi), \tag{3.47}$$

где $B^{(1)}=QU,\ A^{(1)}=D_1U-Q\dot U,\ f^{(1)}=g_1-D_1D_2^*(D_2D_2^*)^{-1}g_2+Q\frac{d}{dt}[D_2^*(D_2D_2^*)^{-1}g_2]$,

$B^{(1)},A^{(1)}-n_1\times n_1$-матрицы, $f^{(1)}-n_1$-вектор, $B^{(1)},A^{(1)},f^{(1)}\in\begin{cases} C^{r-1}(R^m,8\pi), & k=1,\\ C^{r-1}(R^m,4\pi), & k=n-1,\\ C^{r-1}(R^m,2\pi), & 1<k<n-1. \end{cases}$

Согласно лемме 10, если $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} B\\ V_2A\end{pmatrix}=s_1+n-k$, то $\operatorname{rank}B^{(1)}=s$,

при этом нетрудно проверить, что $0\le s\le k$ для разных пар матриц B и A. В зависимости от значения s_1 рассмотрим следующие пять основных случаев.

1^0. $1<s_1<n_1$. Тогда если существует $n_1\times p_1$ -матрица $\hat B^{(1)}_{(\varphi)}$, удовлетворяющая равенству $\operatorname{rank}[B^{(1)}_{(\varphi)},\hat B^{(1)}_{(\varphi)}]=k_1\equiv const$ и (3.42), то к системе (3.47) применима повторная итерация. Отметим, что в случае $s_1\equiv const$ $\hat B^{(1)}$ существует всегда (например, $\hat B^{(1)}\equiv 0$), и остается требовать выполнения неравенства (3.42).

2^0. $s_1\le 1$ и коэффициенты системы (3.47) удовлетворяют условиям теоремы 6. Тогда система (3.1) при $r\ge 3$ обладает единственным гладким инвариантным тором $x=u(\varphi)$, $u(\varphi)\in C^{r-2}(R^m,2\pi)$, для произвольного вектора $f(\varphi)\in C^r(R^m,2\pi)$.

3^0. $s_1\equiv k$. Тогда $B^{(1)}$ невырождена на R^m и система

(3.47) имеет единственный гладкий инвариантный тор $x^{(1)}=u^{(1)}(\varphi)$, $u^{(1)}(\varphi)\in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, всякий раз, когда $r\geq 2$ и система уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\ \dot{x}^{(1)}=\left[B^{(1)}_{(\varphi)}\right]^{-1}\left[A^{(1)}_{(\varphi)}x^{(1)}+f^{(1)}_{(\varphi)}\right]$$

удовлетворяет условиям теоремы 4 с $\rho\equiv 1$ и $\ell=r-1$. С учетом замены (3.46) можно сделать вывод, что и система (3.I) имеет единственный гладкий инвариантный тор $x=u(\varphi)$, для которого в силу единственности справедливо включение $u(\varphi)\in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$.

4^0. $s_1\equiv 0$. Тогда $B^{(1)}(\varphi)\equiv 0$ и исходная система (3.I) обладает единственным гладким инвариатным тором $x=u(\varphi)$, $u(\varphi)\in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, если $r\geq 2$ и $\det A^{(1)}(\varphi)\neq 0\ \ \forall\varphi\in R^m$.

5^0. $B^{(1)}(\varphi)=\rho(\varphi)B^{(1)}_1(\varphi)$, где $\det B^{(1)}_1(\varphi)\neq 0\ \forall\varphi\in R^m$, ρ -скалярная функция. Тогда если $r\geq 2$ и система уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\ \rho(\varphi)\dot{x}^{(1)}=\left[B^{(1)}_1(\varphi)\right]^{-1}\left[A^{(1)}_{(\varphi)}x^{(1)}+f^{(1)}_{(\varphi)}\right]$$

удовлетворяет условиям теоремы 4, то в силу этой теоремы и с учетом замены (3.46) можно сделать вывод, что система (3.I) имеет единственный гладкий инвариантный тор $x=u(\varphi)$, $u(\varphi)\in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$.

Итерационный процесс, первый шаг которого описан выше, конечен в силу конечности $n_0=n$ и положительности k_i. Он заканчивается, если выполняется одно из условий 2^0 - 4^0 или в случае недополняемости матрицы $B^{(i)}$ матрицей $\hat{B}^{(i)}$ таким образом, чтобы $\operatorname{rank}[B^{(i)},\hat{B}^{(i)}]\equiv k_i$ или в случае невыполнения неравенств

$$n_i>\begin{cases} m+1, & k_i=1,\\ m+k_i, & 1<k_i<n_i,\end{cases}\quad \text{и}\quad k_i>m \ \text{при}\ k_i\in(1, n_i-1). \tag{3.48}$$

Условия реализации итерационного процесса дает

Л е м м а I6. Пусть относительно системы уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi),\ B^{(i)}_{(\varphi)}\dot{x}^{(i)}=A^{(i)}_{(\varphi)}x^{(i)}+f^{(i)}(\varphi) \tag{3.49}$$

выполняются следующие условия.

I. m -вектор $a\in C^r(R^m, 2\pi)$, матрицы размерности $n_i\times n_i$ $B^{(i)}$ и $A^{(i)}$ а также n_i -вектор $f^{(i)}$ принадлежат $C^r(R^m, 2^i\pi)$, где

i — некоторое целое неотрицательное число, $B^{(0)}=B, A^{(0)}=A$, $f^{(0)}=f, r_0=r, \rho_0=1$, r — достаточно большое целое число, не превышающее, однако, $n+1$.

2^0. Существует $n_i\times\rho_i$ -матрица $\hat{B}^{(i)}(\varphi)\in C^{r_i}(R^m, 2\pi\rho_i)$ такая, что $\operatorname{rank}[B^{(i)}, \hat{B}^{(i)}]=k_i\equiv const$ $(0<k_i<n_i)$, $\operatorname{rank}[B^{(i)}, \hat{B}^{(i)}, A^{(i)}]\equiv n_i$, и справедливы неравенства (3.48).

Тогда существуют матрицы $V_1^{(i)}, V_2^{(i)}$ и $U^{(i)}$ размерности соответственно $k_i\times n_i$, $(n_i-k_i)\times n_i$ и $n_i\times k_i$ из $C^{r_{i+1}}(R^m, 2\pi\rho_{i+1})$ такие, что в результате умножения второго уравнения (3.49) на невырожденную на R^m матрицу $V^{(i)}=\begin{pmatrix}V_1^{(i)}\\ V_2^{(i)}\end{pmatrix}$ и замены переменных по формуле

$$x^{(i)}=U^{(i)}x^{(i+1)}-(V_2^{(i)}A^{(i)})^*\left[V_2^{(i)}A^{(i)}(V_2^{(i)}A^{(i)})^*\right]^{-1}V_2^{(i)}f^{(i)}$$

можно получить систему уравнений

$$\dot{\varphi}=\omega(\varphi),\ B^{(i+1)}(\varphi)\dot{x}^{(i+1)}=A^{(i+1)}(\varphi)x^{(i+1)}+f^{(i+1)}(\varphi)$$

порядка $n_{i+1}=k_i$ относительно $x^{(i+1)}$, где

$$B^{(i+1)}=V_1^{(i)}B^{(i)}U^{(i)},\ A^{(i+1)}=V_1^{(i)}\left[A^{(i)}U^{(i)}-B^{(i)}\dot{U}^{(i)}\right],\ f^{(i+1)}=V_1^{(i)}f^{(i)}-V_1^{(i)}\{A^{(i)}(V_2^{(i)}A^{(i)})^*\times$$
$$\times\left[V_2^{(i)}A^{(i)}(V_2^{(i)}A^{(i)})^*\right]^{-1}V_2^{(i)}f^{(i)}+B^{(i)}\frac{d}{dt}\left[A^{(i)}(V_2^{(i)}A^{(i)})^*\left[V_2^{(i)}A^{(i)}(V_2^{(i)}A^{(i)})^*\right]^{-1}V_2^{(i)}f^{(i)}\right]\},$$

строки $V_2^{(i)}$ составляют базис $\ker(B^{(i)})^*$, а столбцы $U^{(i)}$ являются базисом $\ker V_2^{(i)}A^{(i)}$, все строки $V_1^{(i)}$ ортогональны всем строкам $V_2^{(i)}$, матрицы $B^{(i+1)}$ и $A^{(i+1)}$ имеют размерность $n_{i+1}\times n_{i+1}$, $f^{(i+1)}$ — n_{i+1}-вектор, $B^{(i+1)}\in C^{r_i}(R^m, 2\pi\rho_{i+1})$, $A^{(i+1)}\in C^{r_{i+1}}(R^m, 2\pi\rho_{i+1})$, $f^{(i+1)}\in C^{r_{i+1}}(R^m, 2\pi\rho_{i+1})$, $r_{i+1}=r_i-1$, $\rho_{i+1}=\rho_i+\begin{cases}2, & k_i=1,\\ 1, & k_i=n_i-1,\\ 0, & 1<k_i<n_i-1.\end{cases}$

Применение итерационного процесса к системе (3.I) дает информацию о существовании единственного гладкого инвариантного тора этой системы.

Обозначим $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B^{(q-1)}\\ V_2^{(q-1)}A^{(q-1)}\end{pmatrix}=s_q+n_{q-1}-k_{q-1}$.

Т е о р е м а 8. Пусть выполняются условия леммы I6 и существует такое целое положительное число $q \le n$, что выполняется одно из нижеследующих условий:

I°. $s_q \le 1$ и система уравнений (3.49) при $i=q$ удовлетворяет условиям теоремы 6.

2°. $s_q \equiv n_q$ и система уравнений

$$\dot\varphi = a(\varphi),\ \dot x^{(q)} = \left[B^{(q)}(\varphi)\right]^{-1}\left[A^{(q)}(\varphi)x^{(q)} + f^{(q)}(\varphi)\right]$$

удовлетворяет условиям теоремы 4 с $\rho \equiv 1$ и $l = r-q$.

3°. $s_q \equiv 0$ и $\det A^{(q)}(\varphi) \neq 0 \ \ \forall \varphi \in R^m$.

4°. $B^{(q)}(\varphi) = \rho(\varphi) B_1^{(q)}(\varphi)$, где $\det B_1^{(q)}(\varphi) \neq 0, \forall \varphi \in R^m$, ρ — скалярная функция, и система уравнений

$$\dot\varphi = a(\varphi),\ \rho(\varphi)\dot x^{(q)} = \left[B_1^{(q)}(\varphi)\right]^{-1}\left[A^{(q)}(\varphi)x^{(q)} + f^{(q)}(\varphi)\right]$$

удовлетворяет условиям теоремы 4 с $l = r-q$.

Тогда система уравнений (3.I) обладает единственным гладким инвариантным тором $x = u(\varphi)$, $u(\varphi) \in C^{r-q-1}(R^m, 2\pi)$, $r \ge q+2$, в случае I° и $u(\varphi) \in C^{r-q}(R^m, 2\pi)$, $r \ge q+1$, в случаях 2°–4°.

§ 4. Периодические решения сингулярно возмущенной системы линейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$P(t,\varepsilon)\dot x = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \qquad (4.I)$$

где $n \times n$ -матрицы P, A и n -вектор f непрерывны по ε на отрезке $J_0 = [0, \varepsilon_0]$ и при каждом $\varepsilon \in J_0$ принадлежат $C^r(R^1, 2\pi)$ (будем обозначать ниже это включением $P, A, f \in C^r(J_0, 2\pi)$), $r \ge 1$ — достаточно большое целое число, которое может быть не большим $n-k+1$, $P(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} P_1(t,\varepsilon) \\ \varepsilon P_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, P_1 и P_2 матрицы размер-

ности $k\times n$ и $(n-k)\times n$ соответственно,

$$\operatorname{rank} P_1(t,0)\equiv k,\ \operatorname{rank} P_2(t,0)\equiv n-k,\ 1\le k\equiv const\le n-1, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{rank} P(t,\varepsilon)=\operatorname{rank} P(t,0)\equiv p=const,\ \min(k,n-k)\le p\le n-1. \tag{4.3}$$

Изучим условия существования для произвольного вектора f единственного решения $x_0(t,\varepsilon)$ системы (4.I), удовлетворяющего на $R^1\times J^\circ,\ \varepsilon^\circ>0$ оценке

$$\|x_0(t,\varepsilon)\|\le K\max_t\|f(t,\varepsilon)\| \tag{4.4}$$

с некоторой положительной постоянной K, не зависящей от ε.

Решение этой задачи упростится, если в результате соответствующих преобразований матрица при производных системы, равносильной (4.I), приобретет диагональный вид. С этой целью произведем в (4.I) замену переменных по формуле

$$x=\left(P_1^*(t,\varepsilon),\ \Phi_1(t,\varepsilon)\right)y=\Phi(t,\varepsilon)y \tag{4.5}$$

и умножим после этого слева на невырожденную для всех $t\in R^1,\varepsilon\in J_0$ $n\times n$ - матрицу

$$H(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\left[P_1(t,\varepsilon)P_1^*(t,\varepsilon)\right]^{-1} & 0_{k,n-k}\\ -\varepsilon P_2(t,\varepsilon)P_1^*(t,\varepsilon)\left[P_1(t,\varepsilon)P_1^*(t,\varepsilon)\right]^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

где $n\times(n-k)$ -матрица Φ_1 удовлетворяет на $R^1\times J_1,\ 0<\varepsilon_1\le\varepsilon_0$ равенствам $P_1(t,\varepsilon)\Phi_1(t,\varepsilon)=0,\ \operatorname{rank}\Phi_1(t,\varepsilon)=n-k,$ принадлежит $C^r(J_1,4\pi)$ и существует в силу леммы II. Отметим, что с учетом (4.2) $|\det\Phi(t,\varepsilon)|\ge\beta=const>0\ \ \forall\varepsilon\in J_1$. В результате получим

$$\begin{cases}\dot y_1=B_1(t,\varepsilon)y+q_1(t,\varepsilon), & (4.7)\\ \varepsilon Q(t,\varepsilon)\dot y_2=B_2(t,\varepsilon)y+q_2(t,\varepsilon), & (4.8)\end{cases}$$

где $B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=H(A\Phi-P\dot\Phi),\ q=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=Hf,\ Q=P_2\Phi_1.$

Из неравенств (4.3) и невырожденности матриц H и Φ следует, что

$$\operatorname{rank} Q(t,\varepsilon)=\operatorname{rank} Q(t,0)=p-k \quad ((t,\varepsilon)\in R^1\times J_1). \tag{4.9}$$

Ниже для установления достаточных условий существования единственного периодического решения системы (4.7)-(4.8) используется обобщенный итерационный процесс.

Рассмотрим два случая: $p=k$ и $p>k$.

I°. Пусть $p=k$. Тогда в силу (4.9) система (4.7)-(4.8) примет вид

$$\begin{cases} (I_k, 0_{k,n-k})\dot{y} = B_1(t,\varepsilon)y + q_1(t,\varepsilon), & (4.10)\\ 0 = B_2(t,\varepsilon)y + q_2(t,\varepsilon). & (4.11) \end{cases}$$

В соответствии с поставленной задачей система (4.II) должна быть совместной при любом векторе q_2 а также обладать ограниченными на $R^1\times J^\circ$ решениями. Поэтому требуем, чтобы $\operatorname{rank} B_2(t,0)\equiv n-k$. Тогда общее решение системы (4.II) для всех $\varepsilon\in J_2$, $0<\varepsilon_2\le\varepsilon_1$, имеет вид

$$y=U(t,\varepsilon)z-B_2^*(t,\varepsilon)\left[B_2(t,\varepsilon)B_2^*(t,\varepsilon)\right]^{-1}q_2(t,\varepsilon), \tag{4.12}$$

где z – произвольный k-вектор, U – $n\times k$- матрица из $C^{r-1}(J_2,\delta\pi)$, удовлетворяющая на $R^1\times J_2$ равенствам $B_2(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon)=0$, $\operatorname{rank} U(t,0)=k$, и существующая в силу леммы II. Подставив (4.I2) в (4.I0), придем к системе порядка k

$$S(t,\varepsilon)\dot{z}=M(t,\varepsilon)z+g(t,\varepsilon), \tag{4.13}$$

где $S=(I_k,0_{k,n-k})U$, $M=B_1U-(I_k,0_{k,n-k})\dot{U}$,

$$g=q_1-B_1B_2^*(B_2B_2^*)^{-1}q_2+(I_k,0_{k,n-k})\frac{d}{dt}\left[B_2^*(B_2B_2^*)^{-1}q_2\right],$$

матрицы S и M имеют размерность $k\times k$ и принадлежат вместе с k-вектором g $C^{r-2}(J_2,\delta\pi)$. Обозначим $B_2=(B_{21},B_{22})$, где B_{21} и B_{22} – матрицы размерности $(n-k)\times k$ и $(n-k)\times(n-k)$ соответственно. Используя формулу (I.20) и свойства матриц B_2 и U, получим следующую цепочку равенств для всех $t\in R^1$, $\varepsilon\in J_2$

$$\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S)^* = \operatorname{rank}\left[U^*\begin{pmatrix} I_k & B_{21}^* \\ 0_{k,n-k} & B_{22}^* \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_k & B_{21}^* \\ 0_{k,n-k} & B_{22}^* \end{pmatrix} - \dim\left[\ker U^* \cap \mathcal{C}\begin{pmatrix} I_k & B_{21}^* \\ 0_{k,n-k} & B_{22}^* \end{pmatrix}\right] = \tag{4.14}$$

$$= \operatorname{rank} B_{22}^* - \dim\left\{\mathcal{C}\begin{pmatrix} B_{21}^* \\ B_{22}^* \end{pmatrix} \cap \left[\mathcal{C}\begin{pmatrix} I_k \\ 0_{k,n-k} \end{pmatrix} \cup \mathcal{C}\begin{pmatrix} B_{21}^* \\ B_{22}^* \end{pmatrix}\right]\right\} =$$

$$= \operatorname{rank} B_{22} + 2k - n .$$

Если $\operatorname{rank} B_{22}(t,0) \equiv n-k$, то из (4.I4) следует, что $\operatorname{rank} S(t,0) \equiv k$. Поэтому для достаточно малого $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2]$ и всех $t \in R^1, \varepsilon \in J_3$ $|\det S(t,\varepsilon)| \geq \alpha = const > 0$ и система (4.I3) примет вид

$$\dot{z} = \left[S(t,\varepsilon)\right]^{-1}\left[M(t,\varepsilon)z + g(t,\varepsilon)\right]. \tag{4.15}$$

Используя методы гл. 4, § 2 монографии [89] можно показать, что если единственным периодическим решением уравнения $\dot{\xi} = \left[S(t,0)\right]^{-1} M(t,0)\xi$ является нулевое, то существует такое $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_3]$, что система (4.I5) для произвольной неоднородности и всех $\varepsilon \in J_4$ обладает единственным решением, принадлежащим $C^{r-1}(J_4, 8\pi)$ и удовлетворяющим оценке $\|z_0(t,\varepsilon)\| \leq K_1 \max_t \|g(t,\varepsilon)\|$ для всех $\varepsilon \in J_4$, где $K = const > 0$. Тогда единственное периодическое решение исходной системы (4.I) определится по формуле (4.I2), где $U = \begin{pmatrix} I_k \\ -B_{22}^{-1} B_{21} \end{pmatrix}$, в силу единственности принадлежит $C^{r-1}(J_4, 2\pi)$, а также с учетом свойств матриц H и Φ удовлетворяет оценке (4.4).

Пусть $\operatorname{rank} B_{22}(t,\varepsilon) = \operatorname{rank} B_{22}(t,0) = \begin{cases} n-2k, & n \leq 2k, \\ 0, & n > 2k. \end{cases}$

Тогда с учетом (4.I4) $S(t,\varepsilon)\equiv 0$, система (4.I3) примет вид $M(t,\varepsilon)z+g(t,\varepsilon)=0$, и имеет единственное решение из $C^{r-2}(J_5,8\pi)$ всякий раз, когда $\det M(t,0)\neq 0$, $|\det M(t,\varepsilon)|\geq\alpha_1=const>0\ \forall\varepsilon\in J_5$, $0<\varepsilon_5\leq\varepsilon_3$. С учетом замены (4.I2) делаем вывод, что система (4.I) для произвольной неоднородности и всех $\varepsilon\in J_5$ обладает единственным решением $x_0(t,\varepsilon)$, принадлежащим $C^{r-2}(J_5,2\pi)$ и удовлетворяющим оценке (4.4).

Пусть на $R^1\times J_2$ $\operatorname{rank}B_{22}(t,\varepsilon)=\operatorname{rank}B_{22}(t,0)\equiv const$ и $0<k_1=2k-n+\operatorname{rank}B_{22}(t,0)<k$. Тогда из (4.I4) следует

$$\operatorname{rank}S(t,\varepsilon)=\operatorname{rank}S(t,0)\equiv k_1\quad\forall(t,\varepsilon)\in R^1\times J_2.$$

Согласно леммам I2 и II соответственно существует $k\times k$ -матрица $V(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}V_1(t,\varepsilon)\\V_2(t,\varepsilon)\end{pmatrix}\in C^{r-1}(J_6,2^5\pi)$, $0<\varepsilon_6\leq\varepsilon_2$, и $k\times k$ -матрица $W(t,\varepsilon)\in C^{r-1}(J_7,2^6\pi)$, $0<\varepsilon_7\leq\varepsilon_6$, такие, что на $R^1\times J_7$

$$|\det V(t,\varepsilon)|\geq\alpha_2=const>0,\ V(t,\varepsilon)S(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}V_1(t,\varepsilon)S(t,\varepsilon)\\0_{k-k_1,k}\end{pmatrix},\ \operatorname{rank}V_1S=k_1,\quad(4.I6)$$

$$V_1(t,\varepsilon)S(t,\varepsilon)W(t,\varepsilon)=0,\ \operatorname{rank}W(t,\varepsilon)=k-k_1.\quad(4.I7)$$

Умножив систему (4.I3) слева на $V(t,\varepsilon)$ и совершив замену переменных по формуле

$$z=\{(V_1S)^*[V_1S(V_1S)^*]^{-1},W\}y=Ty,\quad(4.I8)$$

где $|\det T(t,\varepsilon)|\geq\alpha_4=const>0\ \forall(t,\varepsilon)\in R^1\times J_8$, $0<\varepsilon_8\leq\varepsilon_7$, придем к системе порядка $n_1=k$ вида (4.I0)-(4.II):

$$\begin{cases}(I_{k_1},0_{k_1,n_1-k_1})\dot y^{(1)}=B_1^{(1)}(t,\varepsilon)y^{(1)}+q_1^{(1)}(t,\varepsilon),&(4.I9)\\ 0=B_2^{(1)}(t,\varepsilon)y^{(1)}+q_2^{(1)}(t,\varepsilon),&(4.20)\end{cases}$$

где $B_1^{(1)}=V_1(MT-S\dot T)$, $B_2^{(1)}=V_2MT$, $B_{22}^{(1)}=V_2MW$, $q_i^{(1)}=V_ig$, $i=1,2$, $B_i^{(1)},q_i^{(1)}\in C^{r-2}(R^1,J_8,2^6\pi)$, $i=1,2$.

Этим завершается описание первой итерации. Для проведения второй достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $\operatorname{rank} B_2^{(1)}(t,0) \equiv n_1 - k_1$, $\operatorname{rank} B_{22}^{(1)}(t,\varepsilon) \equiv const$ $\varepsilon \in J_8$.

Прежде чем сформулировать в виде утверждения результат применения итерационного процесса к системе (4.10)-(4.11), введем следующие обозначения

$$B_1^{(i+1)} = V_1^{(i)}(M^{(i)}T^{(i)} - S^{(i)}\dot{T}^{(i)}),\ B_2^{(i+1)} = V_2^{(i)}M^{(i)}T^{(i)},\ B_{22}^{(i+1)} = V_2^{(i)}M^{(i)}W^{(i)},$$
$$S^{(i)} = (I_{k_i}, 0_{k_i, n_i - k_i})U^{(i)},\ M^{(i)} = B_1^{(i)}U^{(i)} - (I_{k_i}, 0_{k_i, n_i - k_i})\dot{U}^{(i)},$$
$$T^{(i)} = \{(V_1^{(i)}S^{(i)})^*[V_1^{(i)}S^{(i)}(V_1^{(i)}S^{(i)})^*]^{-1}, W^{(i)}\},\ q_\ell^{(i+1)} = V_\ell^{(i)}g^{(i)}, \qquad (4.21)$$
$$g^{(i)} = q_1^{(i)} - B_1^{(i)}(B_2^{(i)})^*[B_2^{(i)}(B_2^{(i)})^*]^{-1}q_2^{(i)} + (I_{k_i}, 0_{k_i, n_i - k_i})\frac{d}{dt}\{(B_2^{(i)})^* \times$$
$$\times [B_2^{(i)}(B_2^{(i)})^*]^{-1}q_2^{(i)}\},\ \begin{pmatrix} B_1^{(0)} \\ B_2^{(0)} \end{pmatrix} = H(A\Phi - P\dot{\Phi}),\ \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \end{pmatrix} = Hf,\ i = \overline{0,s};\ \ell = 1,2,$$

столбцы матриц $U^{(i)}, (V_1^{(i)})^*, (V_2^{(i)})^*$ и $W^{(i)}$, существующих в силу лемм 11 и 12, составляют базис $\ker B_2^{(i)}, \ker (S^{(i)})^*, \ker V_1^{(i)}$ и $\ker (V_1^{(i)}S^{(i)})$ соответственно, матрицы $B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, U^{(i)}, S^{(i)}, M^{(i)}$, $V_1^{(i)}$, $V_2^{(i)}$, $W^{(i)}$ имеют размерности $k_i \times n_i$, $(n_i - k_i) \times n_i$, $n_i \times k_i$, $k_i \times k_i$, $k_i \times k_i$, $k_{i+1} \times n_{i+1}$, $(n_{i+1} - k_{i+1}) \times n_{i+1}$, $(n_{i+1} - k_{i+1}) \times n_{i+1}$ и принадлежат вместе с векторами $g^{(i)}$, $q_1^{(i)}$, $q_2^{(i)}$ размерности $n_i, k_i, n_i - k_i$, соответственно, $C^{r_i}(J^{(i)}, 2^{\rho_i}\pi)$, где $n_0 = n$, $k_0 = k$, $n_{i+1} = k_i$, $k_i \equiv \operatorname{rank} B_{22}^{(i)}(t,0) = \operatorname{rank} B_{22}^{(i)}(t,\varepsilon)$, $r_{i+1} = r_i - 1$, $0 < \varepsilon^{(i+1)} \le \varepsilon^{(i)}$, $\rho_{i+1} = \rho_i + 4$, $r_0 = r - 1$, $\rho_0 = 2$, $\varepsilon^{(0)} = \varepsilon_1$.

Лемма 17. Пусть относительно системы (4.1) выполняются следующие условия.

1. $P(t,\varepsilon), A(t,\varepsilon), f(t,\varepsilon) \in C^r(J_0, 2\pi)$.

2. Справедливы соотношения (4.2), (4.3), где $\rho = k$.

3. При некоторых $0 < \bar{\varepsilon} \le \varepsilon_0$ и целом $s \ge 0$ для всех $i = \overline{0,s}$, $(t,\varepsilon) \in R^1 \times \bar{J}$ $\operatorname{rank} B_2^{(i)}(t,0) = n_i - k_i$, $\operatorname{rank} B_{22}^{(i)}(t,\varepsilon) = \operatorname{rank} B_{22}^{(i)}(t,0) = const$.

4. Верно одно из условий:

(а) $\operatorname{rank} B_{22}^{(s)}(t,0)\equiv n_s-k_s$, и единственное периодическое решение уравнения $\dot{\xi}=[S^{(s)}(t,0)]^{-1}M^{(s)}(t,0)\xi$ является нулевым;

(в)

$$\operatorname{rank} B_{22}^{(s)}(t,\varepsilon)=\operatorname{rank} B_{22}^{(s)}(t,0)=\begin{cases} n_s-2k_s, & n_s\le 2k_s, \\ 0, & n_s>2k_s, \end{cases}$$ и $\det M^{(s)}(t,0)\neq 0$.

Тогда можно указать число $\varepsilon^0\in(0,\varepsilon_0]$ такое, что для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}^0$ система (4.I) обладает единственным решением $x_0(t,\varepsilon)$, которое принадлежит $C^{r-s-1}(\mathcal{J}^0;2\pi)$ в случае (а) и $C^{r-s-2}(\mathcal{J}^0;2\pi)$ в случае (в), а также удовлетворяет оценке (4.4).

При этом

$$x_0(t,\varepsilon)=\Phi(t,\varepsilon)\Big\{\prod_{i=0}^{s}U^{(i)}(t,\varepsilon)x_0^{(s)}(t,\varepsilon)-\sum_{j=0}^{s}\prod_{i=0}^{j-1}U^{(i)}(t,\varepsilon)\big(B_2^{(j)}(t,\varepsilon)\big)^{*}\Big[B_2^{(j)}(t,\varepsilon)\big(B_2^{(j)}(t,\varepsilon)\big)^{*}\Big]^{-1}q_2^{(j)}(t,\varepsilon)\Big\}, \quad (4.22)$$

где при выполнении (а) $x_0^{(s)}(t,\varepsilon)$ - единственное периодическое решение уравнения $\dot{x}^{(s)}=[S^{(s)}(t,\varepsilon)]^{-1}[M^{(s)}(t,\varepsilon)x^{(s)}+g^{(s)}(t,\varepsilon)]$,

а при выполнении (в) $x_0^{(s)}(t,\varepsilon)=-[M^{(s)}(t,\varepsilon)]^{-1}g^{(s)}(t,\varepsilon)$.

2°. Пусть $p>k$. Запишем систему (4.7)-(4.8) в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1=B_{11}(t,\varepsilon)y_1+B_{12}(t,\varepsilon)y_2+q_1(t,\varepsilon), & (4.23) \\ \varepsilon Q(t,\varepsilon)\dot{y}_2=B_{21}(t,\varepsilon)y_1+B_{22}(t,\varepsilon)y_2+q_2(t,\varepsilon). & (4.24) \end{cases}$$

Обозначим $n-k=n_0$, $p-k=k_0$. Тогда с учетом (4.9) $n_0\times n_0$- матрица Q из $C^r(\mathcal{J}_1,4\pi)$ на $R^1\times\mathcal{J}_1$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{rank}Q(t,\varepsilon)=\operatorname{rank}Q(t,0)\equiv k_0.$$

Согласно лемме I2 существует $n_0\times n_0$ -матрица $V=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}\in C^r(\mathcal{J}_2,2\frac{4}{\pi})$, $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$ такая, что для всех $(t,\varepsilon)\in R^1\times\mathcal{J}_2$

$$|\det V|\ge d_2\equiv\text{const}>0,\quad VQ=\begin{pmatrix}V_1Q\\0_{n_0-k_0,\,n_0}\end{pmatrix},\quad \operatorname{rank}V_1Q\equiv k_0,$$

где V_1, V_2 -матрицы размерности $k_0\times n_0$, $(n_0-k_0)\times n_0$ соответственно. Умножив (4.24) слева на V, получим

$$\begin{cases} \varepsilon Q_1(t,\varepsilon)\dot{y}_2 = V_1(t,\varepsilon)\left[B_{21}(t,\varepsilon)y_1 + B_{22}(t,\varepsilon)y_2 + q_2(t,\varepsilon)\right], & (4.25) \\ 0 = \bar{B}_{21}(t,\varepsilon)y_1 + \bar{B}_{22}(t,\varepsilon)y_2 + \bar{q}_2(t,\varepsilon), & (4.26) \end{cases}$$

где $Q_1 = V_1 Q$, $\bar{B}_{2i} = V_2 B_{2i}$, $i = 1,2$, $\bar{q}_2 = V_2 q_2$.

Если $\operatorname{rank}\left[Q(t,0), B_{22}(t,0)\right] \equiv n_0$, то в силу леммы 9 $\operatorname{rank}\bar{B}_{22}(t,0) \equiv n_0 - k_0$. Тогда уравнение (4.26) совместно и для всех $\varepsilon \in J_{10}$, $0 < \varepsilon_{10} \le \varepsilon_9$ общеее решение имеет вид

$$y_2 = U(t,\varepsilon)y_2^{(1)} - \bar{B}_{22}^{*}(t,\varepsilon)\left[\bar{B}_{22}(t,\varepsilon)\bar{B}_{22}^{*}(t,\varepsilon)\right]^{-1}\left[\bar{B}_{21}(t,\varepsilon)y_1 + \bar{q}_2(t,\varepsilon)\right], \quad (4.27)$$

где $n_0 \times k_0$ -матрица $U \in C^{r-1}(J_{10}, 2^5_{\pi})$, удовлетворяет на $R^1 \times J_{10}$ равенствам $\bar{B}_{22}U = 0$, $\operatorname{rank}U \equiv k_0$ и существует согласно лемме II. Подставив (4.27) в (4.23) и (4.25), придем к системе порядка $k + k_0 < n$ вида (4.23)-(4.24):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = B_{11}^{(1)}(t,\varepsilon)y_1 + B_{12}^{(1)}(t,\varepsilon)y_2^{(1)} + q_1^{(1)}(t,\varepsilon), & (4.28) \\ \varepsilon Q^{(1)}(t,\varepsilon)\dot{y}_2^{(1)} = B_{21}^{(1)}(t,\varepsilon)y_1 + B_{22}^{(1)}(t,\varepsilon)y_2^{(1)} + q_2^{(1)}(t,\varepsilon), & (4.29) \end{cases}$$

где $B_{11}^{(1)} = B_{11} - B_{12}\bar{B}_{22}^{*}\left[\bar{B}_{22}\bar{B}_{22}^{*}\right]^{-1}\bar{B}_{21}$, $B_{12}^{(1)} = B_{12}U$, $Q^{(1)} = V_1 Q U$,

$$B_{21}^{(1)} = V_1\left[B_{21} - B_{22}\bar{B}_{22}^{*}\left[\bar{B}_{22}\bar{B}_{22}^{*}\right]^{-1}\bar{B}_{21} + \varepsilon Q\frac{d}{dt}\left\{\bar{B}_{22}^{*}\left(\bar{B}_{22}\bar{B}_{22}^{*}\right)^{-1}\bar{B}_{21}\right\}\right],$$

$$B_{22}^{(1)} = V_1\left[B_{22}U - \varepsilon Q\dot{U}\right], q_1^{(1)} = q_1 - B_{12}\bar{B}_{22}^{*}\left[\bar{B}_{22}\bar{B}_{22}^{*}\right]^{-1}V_2 q_2,$$

$$q_2^{(1)} = V_1\left[q_2 - B_{22}\bar{B}_{22}^{*}\left(\bar{B}_{22}\bar{B}_{22}^{*}\right)^{-1}V_2 q_2 + \varepsilon Q\frac{d}{dt}\left\{\bar{B}_{22}^{*}\left(\bar{B}_{22}\bar{B}_{22}^{*}\right)^{-1}V_2 q_2\right\}\right],$$

матрицы $Q^{(1)}, B_{21}^{(1)}, B_{22}^{(1)}, B_{11}^{(1)}, B_{12}^{(1)}$ имеют соответственно размерности $n_1 \times n_1$, $n_1 \times k$, $n_1 \times n_1$, $k \times k$, $k \times n_1$, $n_1 \equiv k_0$, и принадлежат $C^{r-1}(J_{10}, 2^5_{\pi})$. В силу леммы I0

$$\operatorname{rank}Q^{(1)}(t,\varepsilon) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q(t,\varepsilon) \\ V_2(t,\varepsilon)B_{22}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} - n_0 + k_0 \quad \forall (t,\varepsilon) \in R^1 \times J_{10}. \quad (4.30)$$

Пусть

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q(t,0) \\ V_2(t,0)B_{22}(t,0) \end{pmatrix} \equiv n_0 \quad \forall t \in R^1. \tag{4.31}$$

Тогда с учетом (4.30) $\operatorname{rank} Q^{(1)}(t,0) \equiv k_0 = n_1$ и для всех $\varepsilon \in J_{11}$, $0 < \varepsilon_{11} \le \varepsilon_{10}$, $|\det Q^{(1)}(t,\varepsilon)| \ge \alpha_4 = const > 0$.

Поэтому на $R^1 \times J_{11}$ система (4.29) примет вид

$$\varepsilon \dot{y}_2^{(1)} = \left[Q^{(1)}(t,\varepsilon)\right]^{-1}\left[B_{21}^{(1)}(t,\varepsilon)y_1 + B_{22}^{(1)}(t,\varepsilon)y_2^{(1)} + q_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right]. \tag{4.32}$$

Из леммы 5 работы [59] следует, что для достаточно малого $\varepsilon_{12} \in (0, \varepsilon_{11}]$ и всех $\varepsilon \in J_{12}$ система (4.28), (4.32) обладает единственным решением, принадлежащим $C^r(J_{12}, 2^5\pi)$ и удовлетворяющим оценке

$$\max\left\{\|y_{1,0}(t,\varepsilon)\|, \|y_{2,0}^{(1)}(t,\varepsilon)\|\right\} \le K_3 \max_t\left[\|q_1^{(1)}(t,\varepsilon)\| + \|q_2^{(1)}(t,\varepsilon)\|\right] \tag{4.33}$$

всякий раз, когда спектр матрицы $\left[Q^{(1)}(t,0)\right]^{-1}B_{22}^{(1)}(t,0)$ не лежит на мнимой оси и единственное периодическое решение системы

$$\dot{\xi} = \left\{B_{11}^{(1)}(t,0) - B_{12}^{(1)}(t,0)\left[B_{22}^{(1)}(t,0)\right]^{-1}B_{21}^{(1)}(t,0)\right\}\xi \tag{4.34}$$

является нулевым. Следовательно, исходная система (4.I) имеет единственное периодическое решение $x_0(t,\varepsilon)$, удовлетворяющее оценке вида (4.4) и принадлежащее в силу единственности $C^r(J_{12}, 2\pi)$.

Пусть на $R^1 \times J_{13}$, $0 < \varepsilon_{13} \le \varepsilon_{10}$,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q(t,\varepsilon) \\ V_2(t,\varepsilon)B_{22}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} \equiv n_0 - k_0. \tag{4.35}$$

Тогда в соответствии с (4.30) $Q^{(1)}(t,\varepsilon) \equiv 0 \quad \forall (t,\varepsilon) \in R^1 \times J_{13}$.

Нетрудно убедиться, что если $\operatorname{rank} B_{22}^{(1)}(t,0) \equiv k$ и единственным периодическим решением системы (4.34) является нулевое, то система (4.28), (4.29) обладает единственным периодическим решением, удовлетворяющим оценке вида (4.33) и принадлежащим $C^r(J_{14}, 2^5\pi)$, где $0 < \varepsilon_{14} \le \varepsilon_{13}$. Поэтому можно сделать вывод, что и система (4.I) имеет единственное периодическое решение $x_0(t,\varepsilon) \in C^r(J_{14}, 2\pi)$,

которое удовлетворяет оценке (4.4).

Если же на $R^1 \times J_{10}$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q(t,\varepsilon) \\ V_2(t,\varepsilon)B_{22}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q(t,0) \\ V_2(t,0)B_{22}(t,0) \end{pmatrix} = k_1 - n_0 + k_0,$$

где $n_0 - k_0 < k_1 \equiv const < n_0$, то к системе (4.28)-(4.29) применима повторная итерация.

Предположим, что при осуществлении s -ой итерации выполняется одно из условий вида (4.31) или (4.35), а также указанные выше ограничения на решение уравнения вида (4.34) и на одну из матриц $[Q^{(s)}(t,0)]^{-1}B_{22}^{(s)}(t,0), B_{22}^{(s)}(t,0)$. Тогда можно утверждать, что поставленная в начале § 4 задача имеет решение.

Прежде чем резюмировать вышеизложенное в виде утверждения, введем следующие обозначения при помощи реккурентных формул:

$$B_{11}^{(i+1)} = B_{11}^{(i)} - B_{12}^{(i)} M^{(i)} B_{21}^{(i)}, \quad B_{12}^{(i+1)} = B_{12}^{(i)} U^{(i)}, \quad Q^{(i+1)} = V_1^{(i)} Q^{(i)} U^{(i)},$$

$$B_{21}^{(i+1)} = V_1^{(i)}\left\{B_{21}^{(i)} - B_{22}^{(i)} M^{(i)} B_{21}^{(i)} + \varepsilon Q^{(i)} \frac{d}{dt}\left[M^{(i)} B_{21}^{(i)}\right]\right\}, \quad B_{22}^{(i+1)} = V_1^{(i)}\left[B_{22}^{(i)} U^{(i)} - \varepsilon Q^{(i)} \dot{U}^{(i)}\right],$$

$$q_1^{(i+1)} = q_1^{(i)} - B_{12}^{(i)} M^{(i)} q_2^{(i)}, \quad q_2^{(i+1)} = V_1^{(i)}\left[q_2^{(i)} - B_{22}^{(i)} M^{(i)} q_2^{(i)} + \varepsilon Q \frac{d}{dt}\left(M^{(i)} q_2^{(i)}\right)\right], \qquad (4.36)$$

$$M^{(i)} = (V_2^{(i)} B_{22}^{(i)})^* \left[V_2^{(i)} B_{22}^{(i)} (V_2^{(i)} B_{22}^{(i)})^*\right]^{-1} V_2^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s,$$

$$\begin{pmatrix} B_{11}^{(0)} & B_{12}^{(0)} \\ B_{21}^{(0)} & B_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = H(A\Phi - P\dot{\Phi}), \quad \begin{pmatrix} q_1^{(0)} \\ q_2^{(0)} \end{pmatrix} = Hf, \quad Q^{(0)} = P_2 \Phi_1,$$

где столбцы матриц $(V_1^{(i)})^*, (V_2^{(i)})^*$ и $U^{(i)}$ составляют на $R^1 \times J^0$ базис соответственно $\ker(Q^{(i)})^*, \ker V_1^{(i)}$ и $\ker(V_2^{(i)} B_{22}^{(i)})$, H, Φ, Φ_1 определены формулами (4.5) и (4.6), матрицы $B_{11}^{(i)}, B_{12}^{(i)}, B_{21}^{(i)}, B_{22}^{(i)}$, $Q^{(i)}, V_1^{(i)}, V_2^{(i)}, U^{(i)}$ имеют размерности соответственно $k \times k$, $k \times n_i$, $n_i \times k$, $n_i \times n_i$, $n_i \times n_i$, $k_i \times n_i$, $(n_i - k_i) \times n_i$, $n_i \times k_i$ и принадлежат вместе с векторами $q_1^{(i)}, q_2^{(i)}$ размерности k и n_i $C^{r-i-1}(J^0, 2^{3i+2}\pi)$,

$$n_{i+1} = k_i, \quad k_{i+1} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q^{(i)}(t,0) \\ V_2(t,0)B_{22}(t,0) \end{pmatrix} + n_i - k_i.$$

Лемма 18. Пусть относительно системы уравнений (4.1) выполняются следующие условия.

1. $P(t,\varepsilon), A(t,\varepsilon), f(t,\varepsilon) \in C^r(J_0, 2\pi)$.

2. Справедливы соотношения (4.2), (4.3, где $p>k$.

3. При некоторых $0<\bar{\varepsilon}\le\varepsilon_0$ и целом $s\ge 0$ для всех $i=\overline{0,s}$, $(t,\varepsilon)\in R^1\times\bar{J}$

$$\operatorname{rank}\left[Q^{(i)}(t,0), B_{22}^{(i)}(t,0)\right]\equiv n_i, \operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q^{(i)}(t,\varepsilon) \\ V_2^{(i)}(t,\varepsilon) B_{22}^{(i)}(t,\varepsilon)\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q^{(i)}(t,0) \\ V_2^{(i)}(t,0) B_{22}^{(i)}(t,0)\end{pmatrix}\equiv \text{const}.$$

4. Единственное периодическое решение уравнения

$$\dot{\xi} = \left\{B_{11}^{(s)}(t,0) - B_{12}^{(s)}(t,0)\left[B_{22}^{(s)}(t,0)\right]^{-1} B_{21}^{(s)}(t,0)\right\}\xi$$

является нулевым.

5. (а) $\operatorname{rank} B_{22}^{(s)}(t,0)\equiv n_s$ или (в) спектр матрицы $\left[Q^{(s)}(t,0)\right]^{-1} B_{22}^{(s)}(t,0)$ не лежит на мнимой оси.

Тогда можно указать $\varepsilon^0\in(0,\varepsilon_0]$ такое, что для всех $\varepsilon\in J^0$ система (4.1) обладает единственным периодическим решением $x_0(t,\varepsilon)$, принадлежащим $C^{r-s-1}(J^0, 2\pi)$ и удовлетворяющим оценке (4.4).

Замечание. Используя формулы замены переменных при каждой итерации вида (4.27), можно показать, что

$$x_0(t,\varepsilon) = \Phi(t,\varepsilon)\begin{pmatrix} y_{1,0}(t,\varepsilon) \\ y_{2,0}(t,\varepsilon)\end{pmatrix}, \qquad (4.37)$$

где $y_{2,0} = \prod_{i=0}^{s} U_{y_{2,0}}^{(i)(s)} - \sum_{j=0}^{s}\prod_{i=0}^{j-1} U^{(i)} M^{(j)}\left[B_{21}^{(j)} y_{1,0} + q_2^{(i)}\right]$,

в случае (а) $y_{2,0}^{(s)} = -\left(B_{22}^{(s)}\right)^{-1}\left[B_{21}^{(s)} y_{1,0} + q_2^{(s)}\right]$,

$y_{1,0}$ – периодическое решение уравнения

$$\dot{y}_1 = \left\{B_{11}^{(s)}(t,\varepsilon) - B_{12}^{(s)}(t,\varepsilon)\left[B_{22}^{(s)}(t,\varepsilon)\right]^{-1} B_{21}^{(s)}(t,\varepsilon)\right\} y_1 + q_1^{(s)}(t,\varepsilon) - \left[B_{22}^{(s)}(t,\varepsilon)\right] q_2^{(s)}(t,\varepsilon);$$

в случае (в) $y_{1,0}(t,\varepsilon)$ и $y_{2,0}^{(s)}(t,\varepsilon)$ – периодические решения системы уравнений порядка $k+k_s$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = B_{11}^{(s)}(t,\varepsilon) y_1 + B_{12}^{(s)}(t,\varepsilon) y_2^{(s)} + q_1^{(s)}(t,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y}_2 = \left[Q^{(s)}(t,0)\right]^{-1}\left\{B_{21}^{(s)}(t,\varepsilon) y_1 + B_{22}^{(s)}(t,\varepsilon) y_2^{(s)} + q_2^{(s)}(t,\varepsilon)\right\}. \end{cases}$$

Сформулируем основное утверждение § 4, следующее из лемм I7 и I8.

Теорема 9. Пусть относительно системы уравнений (4.I) при $\varepsilon \in J_0$ выполняются все условия леммы I7 или леммы I8.

Тогда существует $\varepsilon^0 \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что для любой неоднородности $f \in C^r(J_0, 2\pi)$ и всех $\varepsilon \in J^0$ система (4.I) обладает единственным периодическим решением $x_0(t, \varepsilon)$, которое удовлетворяет оценке (4.4), принадлежит $C^{r-s-1}(J^0, 2\pi)$ при выполнении условия (а) леммы I7 или леммы I8 и $C^{r-s-1}(J^0, 2\pi)$ при выполнении условия (в) леммы I7, а также определяется по формуле (4.22) или (4.37).

ГЛАВА II. ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ МАТРИЧНО-СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ТОРЕ.

§ 5. Инвариантные торы матрично-сингулярно возмущенных линейных расширений динамических систем на торе в случае $\operatorname{rank} A(\varphi) \neq \text{const}$, $A^*(\varphi) \neq A(\varphi)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon),\ \left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\dot{x} = B(\varphi,\varepsilon)x + f(\varphi,\varepsilon), \qquad (5.1)$$

где φ и a - m-векторы, x и f - n-векторы, $a, A, P, B, f \in C^r(R^m, 2\pi)$ как функции φ и непрерывны по ε на $[0,\varepsilon_0]$, $0<\varepsilon_0\ll 1$, $\det\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\neq 0$ $\forall \varphi \in R^m$, $\varepsilon \in J_0 = (0,\varepsilon_0]$, $A(\varphi)$ вырождается в некоторых или во всех точках R^m.

Если матрицы A и P постоянны, а $m=1$, то можно показать, что из работ [30,5,6] следует, что система (5.1) при определенных ограничениях обладает периодическим решением, непрерывным по ε в точке $\varepsilon=0$. Естественно ожидать, что аналогичная ситуация будет иметь место и в случае, когда $m>1$, а P и A зависят от $\varphi \in R^m$ (см. § 6).

Изменение ранга матриц при производных в случае их симметричности также не нарушает непрерывности тора в точке $\varepsilon=0$. Действительно, если $r\geq 1$, то инвариантный тор $x = u(\varphi,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\sum_{i=1}^{m}\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]a_i(\varphi)\frac{\partial u}{\partial \varphi_i} = B(\varphi,\varepsilon)u + f(\varphi,\varepsilon),$$

которое имеет [52,68] решение $u(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m, 2\pi)$, удовлетворяющее для всех $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, $\varepsilon_1>0$, оценке $\|u(\varphi,\varepsilon)\| \leq K\|f(\varphi,\varepsilon)\|$ (постоянная $K>0$ не зависит от ε), всякий раз, когда $r \geq \frac{m}{2}+1$ и матрица $B(\varphi,0)$ знакоопределена.

В связи с этим для случая $(A+\varepsilon P)^* \neq A+\varepsilon P$, $\operatorname{rank} A \neq \text{const}$

возникают рассматриваемые в этом параграфе вопросы: при каких условиях система (5.I) имеет инвариантный тор $x=u(\varphi,\varepsilon)$, и сохраняется ли непрерывность $u(\varphi,\varepsilon)$ в точке $\varepsilon=0$.

I°. Обозначим: $Q(\varphi,\varepsilon)$ $n\times n$ -матрицу, (i,j) -элемент которой является алгебраическим дополнением $(j\times i)$ -элемента матрицы $A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)$; $B(\varphi,\varepsilon)>>0\,(B(\varphi,\varepsilon)<<0)$ - если для всех $\eta\neq 0$ и некоторого $c(\varepsilon)>0$ на $R^m\times J_0$ $n\times n$ -матрица $B(\varphi,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\langle B(\varphi,\varepsilon)\eta,\eta\rangle>c(\varepsilon)\langle\eta,\eta\rangle$ $(\langle B(\varphi,\varepsilon)\eta,\eta\rangle<-c(\varepsilon)\langle\eta,\eta\rangle)$, а также

$$\det[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]\equiv\Delta(\varphi,\varepsilon),\ H(\varphi,\varepsilon)\equiv[\operatorname{sign}\Delta(\varphi,\varepsilon)]Q(\varphi,\varepsilon)B(\varphi,\varepsilon), \quad (5.2)$$

$$\beta(\varphi,\varepsilon)=\min_{\|\eta\|=1}|\langle H(\varphi,\varepsilon)\eta,\eta\rangle|,\ \alpha(\varphi,\varepsilon)=\max_{\|\xi\|=1}\left|\left\langle\frac{\partial a(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\xi,\xi\right\rangle\right|, \quad (5.3)$$

$$|v(\varphi,\varepsilon)|_0=\max_{\varphi\in R^m,\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}\|v(\varphi,\varepsilon)\|,\ |v(\varphi,\varepsilon)|_r=\max_{0\le\rho\le r}|D^\rho v(\varphi,\varepsilon)|_0,$$

где $\eta\in E^n$, $\xi\in E^m$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — обычное скалярное произведение в E^n, $\|\eta\|^2=\langle\eta,\eta\rangle$, $D^\rho v(\varphi,\varepsilon)$ — любая производная по φ_i $(i=\overline{1,m})$ функции $v(\varphi,\varepsilon)$ порядка ρ.

Т Е О Р Е М А I0. Предположим, что

I) матричные функции $a,A,P,B,f\in C^r(R^m,2\pi)$, $a\in C^{1/2}(R^m,2\pi)$, $r\ge 0$, и непрерывны по ε на $[0,\varepsilon_0]$;

2) для всех $\varphi\in R^m$ и $\varepsilon\in J_0$ $\Delta(\varphi,\varepsilon)\neq 0$, причем

$$[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]^*\neq A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon),\ 0\le\operatorname{rank}A(\varphi)\neq\text{const};$$

3) в зависимости от значения r для всех $\varphi\in R^m$ и $\varepsilon\in J_0$ справедливо одно из неравенств

$$\beta(\varphi,\varepsilon)>0\ (r=0),\quad \beta(\varphi,\varepsilon)-r\alpha(\varphi,\varepsilon)|\Delta(\varphi,\varepsilon)|>0\ (r\ge 1).$$

Тогда можно указать такое $\varepsilon^0\in(0,\varepsilon_0]$, что для каждого $\varepsilon\in J^0$ система уравнений (5.I) имеет единственный инвари-

антный тор: $x=u(\varphi,\varepsilon)$, $u(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m_{2\pi})$, удовлетворяющий оценке

$$|u(\varphi,\varepsilon)|_r \le K_r \left| \frac{Q(\varphi,\varepsilon) f(\varphi,\varepsilon)}{\beta(\varphi,\varepsilon) - r\alpha(\varphi,\varepsilon)|\Delta(\varphi,\varepsilon)|} \right|_r \quad (K_r=const>0) \qquad (5.4)$$

и являющийся экспоненциально устойчивым, если на $R^m\times J_0$ матрица $H(\varphi,\varepsilon)<<0$ и неустойчивым, если на $R^m\times J_0$ $H(\varphi,\varepsilon)>>0$.

Доказательство. Умножив слева второе уравнение системы (5.I) на матрицу $Q(\varphi,\varepsilon)$ получим

$$\dot\varphi=a(\varphi,\varepsilon),\ |\Delta(\varphi,\varepsilon)|\dot x = H(\varphi,\varepsilon)x + f_1(\varphi,\varepsilon), \qquad (5.5)$$

где

$$f_1 = Q f \operatorname{sign}\Delta. \qquad (5.6)$$

Рассмотрим функцию

$$G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)=\begin{cases} \Omega^t_\tau(\varphi,\varepsilon)L\ , & \tau<t,\\ \Omega^t_\tau(\varphi,\varepsilon)(L-I_n), & \tau>t, \end{cases} \qquad (5.7)$$

где $\Omega^t_\tau(\varphi,\varepsilon)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\dot x = |\Delta^{-1}(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)| H(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)x, \qquad (5.8)$$

$\Omega^\tau_\tau(\varphi,\varepsilon)=I_n$ — n -мерная единичная матрица,

$$L=\begin{cases} I_n\ , & H(t,\varepsilon)<<0 \quad \forall(\varphi,\varepsilon)\in R^m\times J_0,\\ 0\ , & H(t,\varepsilon)>>0 \quad \forall(\varphi,\varepsilon)\in R^m\times J_0. \end{cases} \qquad (5.9)$$

Пусть $H(t,\varepsilon)>>0$ на $R^m\times J_0$. Тогда для решения $x_t(\varphi,\varepsilon)$ системы (5.8) верно неравенство

$$\frac{d}{dt}\langle x_t(\varphi,\varepsilon), x_t(\varphi,\varepsilon)\rangle = 2\Big\langle \frac{dx_t(\varphi,\varepsilon)}{dt}, x_t(\varphi,\varepsilon)\Big\rangle = 2\big\langle |\Delta(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)|^{-1} H(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)x_t(\varphi,\varepsilon), x_t(\varphi,\varepsilon)\big\rangle,$$

$$\ge 2|\Delta(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)|^{-1}\beta(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)\langle x_t(\varphi,\varepsilon), x_t(\varphi,\varepsilon)\rangle,$$

интегрируя которое в пределах от t до τ, получим

$$\|x_t(\varphi,\varepsilon)\| \le \exp\left\{-\int_t^\tau \frac{\beta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)}{|\Delta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|}\,ds\right\}\|x_\tau(\varphi,\varepsilon)\|,\ t\le\tau,\ \varphi\in R^m,\ \varepsilon\in J_0.$$

Отсюда с учетом (5.7) и (5.9) следует оценка

$$\|G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\| \le K\exp\left\{-\left|\int_t^\tau \frac{\beta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)\,ds}{|\Delta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|}\right|\right\}, \qquad (5.10)$$

справедливая для всех $t,\tau\in R^1$, $\varphi\in R^m$, $\varepsilon\in J_0$ и некоторой постоянной $K>0$.

Эту же оценку легко получить, используя неравенство Важевского, и в случае $H(t,\varepsilon)\ll 0$ на $R^m\times J_0$.

Нетрудно видеть, что функция $G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)$, определенная (5.7), для каждого фиксированного $\varepsilon\in J_0$ является функцией Грина задачи об ограниченных решениях системы

$$\dot{x} = |\Delta^{-1}(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)|\left[H(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)x + f_1(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)\right]. \qquad (5.11)$$

Поэтому для каждого фиксированного $\varepsilon\in J_0$ $G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)$ — функция Грина задачи об инвариантном торе системы

$$\dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon),\quad |\Delta(\varphi,\varepsilon)|\dot{x} = H(\varphi,\varepsilon)x,$$

удовлетворяющая в силу (5.10) для всех $\tau\in R^1$, $\varphi\in R^m$, $\varepsilon\in J_0$ неравенству

$$\|G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\| \le K\exp\left\{-\left|\int_0^\tau \frac{\beta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)}{|\Delta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|}\,ds\right|\right\}. \qquad (5.12)$$

Тогда инвариантный тор системы уравнений (5.5) представим соотношением

$$u(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\,|\Delta^{-1}(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)|\,Q(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)f(\varphi_\tau(\varphi))\,\mathrm{sign}\,\Delta\,d\tau. \qquad (5.13)$$

Покажем справедливость оценки (5.4) при $r=0$. Пусть

на $R^m \times J_0$ $H(\varphi,\varepsilon) \ll 0$. Тогда равенство (5.13) согласно (5.7) и (5.9) можно записать в виде

$$u(\varphi,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\frac{f_1(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)}{\beta(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)}\,d\Big\{-\int_{\tau}^{0}\frac{\beta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)ds}{|\Delta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|}\Big\}. \qquad (5.14)$$

функция $w(\tau)=-\int_{\tau}^{0}\beta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|\Delta^{-1}(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|\,ds$ — возрастающая для всех $\tau\le 0$, так как в силу условия 3) $\dot w(\tau)=\beta(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)|\Delta^{-1}(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)|>0$ для всех $\tau\le 0, \varphi\in R^m, \varepsilon\in J_0$. Поэтому существует обратная непрерывно дифференцируемая функция $\tau=\xi(w)$. С учетом того, что $w(0)=0$ и $w(-\infty)=-\infty$, (5.14) перепишем в виде

$$u(\varphi,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{0} G_0(\xi(w),\varphi,\varepsilon)\,\frac{f_1(\varphi_{\xi(w)}(\varphi),\varepsilon)}{\beta(\varphi_{\xi(w)}(\varphi),\varepsilon)}\,dw,$$

откуда в силу (5.6),(5.12) и $|f_1(\varphi_{\xi(w)}(\varphi),\varepsilon)\beta^{-1}(\varphi_{\xi(w)}(\varphi),\varepsilon)|_0=|f_1(\varphi,\varepsilon)\beta^{-1}(\varphi,\varepsilon)|_0$ следует оценка (5.4) при $r=0$:

$$|u(\varphi,\varepsilon)|_0\le\int_{-\infty}^{0}\|G_0(\xi(w),\varphi,\varepsilon)\|\,\Big|\frac{f_1(\varphi_{\xi(w)}(\varphi),\varepsilon)}{\beta(\varphi_{\xi(w)}(\varphi),\varepsilon)}\Big|_0\,dw\le K_0\Big|\frac{Q(\varphi,\varepsilon)f(\varphi,\varepsilon)}{\beta(\varphi,\varepsilon)}\Big|_0,$$

где $K_0\ge K$.

В случае $r\ge 1$ по аналогии с доказательством теоремы 12 из работы [44] можно показать, что функция Грина $G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по φ до порядка r включительно, и для всех $\varphi\in R^m$, $\tau\le 0$, $\varepsilon\in J^\circ$, $0<\varepsilon^\circ\le\varepsilon_0$,

$$\|D_\varphi^r G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\|\le N\exp\Big\{-\Big|\int_{0}^{\tau}\frac{\beta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)-r\alpha(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|\Delta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|}{\Delta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)}ds\Big|\Big\} \qquad (5.15)$$

всякий раз, когда выполняется условие 3). Если $H(\varphi,\varepsilon)\ll 0$, то в силу этого же условия функция $v(\tau)=-\int_{\tau}^{0}\big[\beta(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|\Delta^{-1}(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)|-r\alpha(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)\big]ds$ монотонно возрастает для всех $\tau\le 0$, причем $v(0)=0, v(-\infty)=-\infty$.

Поэтому существует обратная функция $\tau=\gamma(v)$, и мы вправе произвести замену переменных в интеграле (5.14):

$$u(\varphi,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{0} G_0(\gamma(v),\varphi,\varepsilon)\frac{f_1(\varphi_{\gamma(v)}(\varphi),\varepsilon)}{\beta(\varphi_{\gamma(v)}(\varphi),\varepsilon)-\Gamma\alpha(\varphi_{\gamma(v)}(\varphi),\varepsilon)|\Delta(\varphi_{\gamma(v)}(\varphi),\varepsilon)|}. \quad (5.16)$$

Последовательно дифференцируя Γ раз равенство (5.16) по φ и используя неравенство (5.15), получаем оценку (5.4) для $\Gamma\geq 1$.

Аналогично доказывается оценка (5.4) и в случае $H(\varphi,\varepsilon)\gg 0$ на $R^m\times J^0$.

Докажем единственность тора $u(\varphi,\varepsilon)$ при фиксированном $\varepsilon\in J^0$. Предположим, что система (5.5) имеет еще одно инвариантное тороидальное многообразие $x=\bar{u}(\varphi,\varepsilon)\not\equiv u(\varphi,\varepsilon)$. Тогда функция $z_t(\varphi,\varepsilon)=u(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)-\bar{u}(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)$ удовлетворяет системе уравнений (5.8) и для каждого фиксированного $\varepsilon\in J^0$ функция $z_t(\varphi,\varepsilon)$ должна быть ограниченной. Но так как в силу условия 3) все решения уравнения (5.8) при фиксированном $\varepsilon\in J^0$ неограниченно возрастают при $t\to\infty$ и $H(\varphi,\varepsilon)\gg 0$ на $R^m\times J^0$ или при $t\to-\infty$ и $H(\varphi,\varepsilon)\ll 0$ на $R^m\times J^0$, то единственным ограниченным на всей оси R^1 при каждом $\varepsilon\in J^0$ является нулевое решение, т. е. $u(\varphi,\varepsilon)\equiv\bar{u}(\varphi,\varepsilon)$.

Покажем, что $u(\varphi,\varepsilon)$ - экспоненциально устойчивое многообразие, если $H(\varphi,\varepsilon)\ll 0$ на $R^m\times J^0$. Для каждого $\varepsilon\in J^0$ и x_0 $(\|x_0\|\leq b<\infty)$ система уравнений (5.5) имеет единственное решение $\varphi_t(\varphi,\varepsilon)$, $x_t(\varphi,x_0,\varepsilon)$ $(\varphi_0(\varphi)=\varphi,\ x_0(\varphi,x_0,\varepsilon)=x_0)$, представимое в виде

$$x_t(\varphi,x_0,\varepsilon)=G_t(0,\varphi,\varepsilon)x_0+\int_0^t G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)f_1(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)d\tau,\ t\geq 0, \quad (5.17)$$

где $G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях системы (5.11). Из (5.17) получаем неравенство

$$\|x_t(\varphi,x_0,\varepsilon)-x_t(\varphi,\bar{x}_0,\varepsilon)\|\leq\|G_t(0,\varphi,\varepsilon)\|\|x_0-\bar{x}_0\|, \quad (5.18)$$

где $\|\bar{x}_0\| \le b < \infty$. Все траектории, лежащие на торе $x=u(\varphi,\varepsilon)$, определяются выражениями

$$x_t(\varphi,\varepsilon)=u(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau,\varphi,\varepsilon) f_1(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\,|\Delta^{-1}(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)|\,d\tau.$$

Поэтому при $t=0$

$$\bar{x}_0=\bar{x}_0(\varphi,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon) f_1(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\,|\Delta^{-1}(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)|\,d\tau=u(\varphi,\varepsilon).$$

Обозначим $\gamma(\varepsilon)=\min\limits_{\varphi\in R^m}\left[\beta(\varphi,\varepsilon)\,|\Delta^{-1}(\varphi,\varepsilon)|\right]$. Тогда из (5.10) и (5.18) получаем неравенство $\|x_t(\varphi,x_0,\varepsilon)-u(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)\| \le K\|x_0-u(\varphi,\varepsilon)\|\exp\{-\gamma(\varepsilon)t\}$, доказывающее экспоненциальную устойчивость тора $x=u(\varphi,\varepsilon)$.

Если же на $R^m\times J^0$ $H(\varphi,\varepsilon)\gg 0$, то для каждого $\varepsilon\in J^0$ и $x^0\neq u(\varphi,\varepsilon)$ функция $x_t(\varphi_t(\varphi),x_0,\varepsilon)-u(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)$ удовлетворяя системе уравнений (5.8), неограниченно возрастает при $t\to\infty$, что и показывает неустойчивость тора $x=u(\varphi,\varepsilon)$ в этом случае.

Теорема 10. доказана.

2^0. Покажем, что ответ на второй вопрос, поставленный в начале этого параграфа, в общем случае отрицательный.

С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon+\sin t & 1 \\ -(1+\sin t)(1+\varepsilon+\sin t) & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 5(1+\sin t) & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ (1+\frac{\cos t}{3})(1+\varepsilon+\sin t)^{1/3}\end{pmatrix} \quad (5.19)$$

расширенная система которой имеет вид (5.1).

Умножив (5.19) слева на матрицу $Q(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon & -1\\ (1+\sin t)(1+\varepsilon+\sin t) & 1+\varepsilon+\sin t\end{pmatrix}$,

получим

$$\begin{cases} (1+\varepsilon+\sin t)^2\dot{x}_1=-5(1+\varepsilon+\sin t)x_1+x_2-(1+\frac{\cos t}{3})(1+\varepsilon+\sin t)^{1/3}, & (5.20)\\ (1+\varepsilon+\sin t)\dot{x}_2=-x_2+(1+\frac{\cos t}{3})(1+\varepsilon+\sin t)^{1/3}. & (5.21)\end{cases}$$

Единственным периодическим решением уравнения (5.21) является функция $x_2^\circ(t,\varepsilon)=(1+\varepsilon+\sin t)^{1/3}$. Подставив $x_2^\circ(t,\varepsilon)$ в уравнение (5.20), получим

$$(1+\varepsilon+\sin t)\dot{x}_1 = -5x_1 - \frac{\cos t}{3}(1+\varepsilon+\sin t)^{-2/3}. \qquad (5.22)$$

Произведем замену переменных в уравнении (5.22) по формуле $x_1=(1+\varepsilon+\sin t)^{-2/3} z$. Тогда относительно z придем к уравнению

$$(1+\varepsilon+\sin t)\dot{z} = -\left(5-\frac{2}{3}\cos t\right)z - \frac{1}{3}\cos t, \qquad (5.23)$$

которое имеет единственное периодическое решение

$$z^\circ(t,\varepsilon) = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\int_\tau^t \frac{5-\frac{2}{3}\cos\xi}{1+\varepsilon+\sin\xi}\,d\xi\right\}\frac{\cos\tau}{1+\varepsilon+\sin\tau}\,d\tau.$$

Покажем, что

$$|\dot{z}^\circ(t,\varepsilon)| \le N = \text{const} > 0 \quad \forall t\in R^1,\ \varepsilon\in J_0. \qquad (5.24)$$

Вырожденное уравнение

$$(1+\sin t)\dot{v} = -\left(5-\frac{2}{3}\cos t\right)v - \frac{1}{3}\cos t, \qquad (5.25)$$

соответствующее уравнению (5.23), удовлетворяет всем условиям теоремы 4 и обладает единственным периодическим решением $v^\circ(t)\in C^1(R^1,2\pi)$. После замены

$$z(t,\varepsilon) = v^\circ(t) + w(t,\varepsilon) \qquad (5.26)$$

в уравнении (5.23) относительно переменной w получаем уравнение

$$(1+\varepsilon+\sin t)\dot{w} = -\left(5-\frac{2}{3}\cos t\right)w - \varepsilon\dot{v}^\circ(t), \qquad (5.27)$$

единственное периодическое решение которого имеет вид

$$w^\circ(t,\varepsilon) = -\varepsilon\int_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\int_\tau^t \frac{5-\frac{2}{3}\cos\xi}{1+\varepsilon+\sin\xi}\,d\xi\right\}\frac{\dot{v}^\circ(\tau)}{1+\varepsilon+\sin\tau}\,d\tau.$$

Из (5.27) получаем

$$\dot{w}^\circ(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+\sin t}\left[\left(5-\frac{2}{3}\cos t\right)\int_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\int_\tau^t \frac{5-\frac{2}{3}\cos\xi}{1+\varepsilon+\sin\xi}\,d\xi\right\}\frac{\dot{v}^\circ(\tau)}{1+\varepsilon+\sin\tau}\,d\tau - \dot{v}^\circ(t)\right],$$

откуда следует неравенство $|\dot{w}^{\circ}(t,\varepsilon)| \le N_1 \equiv const > 0 \ \forall (t,\varepsilon) \in R^1 \times J_0$, которое с учетом замены (5.26) влечет выполнение неравенства (5.24).

Из уравнения (5.23) находим

$$z^{\circ}(t,\varepsilon) = -\left(5 - \frac{2}{3}\cos t\right)^{-1}\left[(1+\varepsilon+\sin t)\dot{z}^{\circ}(t,\varepsilon) + \frac{1}{3}\cos t\right]. \qquad (5.28)$$

Покажем, что в точке $t = \frac{3}{2}\pi$

$$x_1^{\circ}(t,\varepsilon) = \frac{z^{\circ}(t,\varepsilon)}{(1+\varepsilon+\sin t)^{2/3}} \longrightarrow \infty, \ \varepsilon \to 0. \qquad (5.29)$$

С этой целью обозначим $t^*(\varepsilon)$ точку из R^1 такую, что $\sin t^* = -1+\varepsilon$ для каждого фиксированного $\varepsilon \in J_0$. Тогда $\cos t^* = \sqrt{(2-\varepsilon)\varepsilon}$ и с учетом (5.28)

$$x_1^{\circ}(t^*,\varepsilon) = -\left[5 - \frac{2}{3}(2-\varepsilon)^{1/2}\varepsilon^{1/2}\right]^{-1}(2\varepsilon)^{-2/3}\left[2\varepsilon\dot{z}^{\circ}(t^*,\varepsilon) + \frac{\sqrt{(2-\varepsilon)\varepsilon}}{3}\right] =$$

$$= -\left[5 - \frac{2}{3}(2-\varepsilon)^{1/2}\varepsilon^{1/2}\right]^{-1}\left[(2\varepsilon)^{1/3}\dot{z}^{\circ}(t^*,\varepsilon) + \frac{(2-\varepsilon)^{1/2}}{3(2\varepsilon)^{1/6}}\right],$$

откуда в силу неравенства (5.24) следует справедливость (5.29).

Таким образом, инвариантный тор $x_i = x_i^{\circ}(t,\varepsilon)$, $i = 1,2$, системы уравнений (5.19), существование которого следует из теоремы 10, терпит разрыв в точке $\varepsilon = 0$.

3^0. В связи с приведенным выше примером возникает вопрос: для всех ли систем вида (5.1), обладающих инвариантными торами, имеет место нарушение непрерывности функции $u(\varphi,\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$?

Отрицательный ответ (в случае $m = 1, n = 2$) дает следующая

Теорема 11. Пусть относительно системы уравнений

$$\dot{\varphi} = 1, \quad [A(\varphi) + \varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]\dot{x} = B(\varphi,\varepsilon)x + f(\varphi,\varepsilon), \qquad (5.30)$$

где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $f = \{f_i\}_{i=1,2}$,

справедливы условия теоремы 10 с $m=r=1$ и следующие соотношения:

$$a_{ij}(\varphi)+\varepsilon\rho_{ij}(\varphi,\varepsilon)\equiv k(\varphi,\varepsilon)b_{ij}(\varphi,\varepsilon)\ (i=1,2;\ j=1 \text{ или } j=2)(\varphi,\varepsilon)\in R^1\times J_0, \quad (5.31)$$

$$b_0=\max_{\varphi\in R^1}|\Delta_1(\varphi,0)|>0, \quad (5.32)$$

где

$$\min_{\varphi\in R^1,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}|\det B(\varphi,\varepsilon)|\geq b_0=const>0,\ \Delta_1(\varphi,\varepsilon)=\Delta(\varphi,\varepsilon)k^{-1}(\varphi,\varepsilon). \quad (5.33)$$

Тогда система (5.30) обладает периодическим решением $x=x^0(\varphi,\varepsilon)\in C^1(R^1,2\pi)$ удовлетворяющим для всех $\varepsilon\in J_0$ оценке

$$\|x^0(\varphi,\varepsilon)\|\leq K\|f(\varphi,\varepsilon)\| \quad (5.34)$$

с постоянной $K>0$, не зависящей от ε.

Доказательство. Пусть в соотношениях (5.31) $j=1$. Умножив систему (5.30) слева на матрицу

$$Q(\varphi,\varepsilon)=\{q_{ij}(\varphi,\varepsilon)\}_{i,j=1,2}\equiv\begin{pmatrix} a_{22}(\varphi)+\varepsilon\rho_{22}(\varphi,\varepsilon) & -a_{12}(\varphi)-\varepsilon\rho_{12}(\varphi,\varepsilon)\\ -a_{21}(\varphi)-\varepsilon\rho_{21}(\varphi,\varepsilon) & a_{11}(\varphi)+\varepsilon\rho_{11}(\varphi,\varepsilon)\end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

с учетом равенств (5.31) получим

$$\begin{cases}\Delta(\varphi,\varepsilon)\dot{x}_1=b'_{11}(\varphi,\varepsilon)x_1+b'_{12}(\varphi,\varepsilon)x_2+g_1(\varphi,\varepsilon), & (5.36)\\ \Delta(\varphi,\varepsilon)\dot{x}_2=b'_{22}(\varphi,\varepsilon)x_2+g_2(\varphi,\varepsilon), & (5.37)\end{cases}$$

где

$$b'_{11}=q_{11}b_{11}+q_{12}b_{21},\ b'_{12}=q_{11}b_{12}+q_{12}b_{22},\ b'_{22}=q_{21}b_{12}+q_{22}b_{22}, \quad (5.38)$$

$$g_1=q_{11}f_1+q_{12}f_2,\ g_2=q_{21}f_1+q_{22}f_2.$$

Покажем, что уравнение (5.37) имеет единственное периодическое решение $x_2^0(\varphi,\varepsilon)$, удовлетворяющее оценке

$$|x_2^0(\varphi,\varepsilon)|\leq c_2\|f(\varphi,\varepsilon)\|\quad\forall(\varphi,\varepsilon)\in R^1\times J_0, \quad (5.39)$$

где постоянная $c_2>0$ не зависит от ε. Используя равенства (5.31), (5.33) и (5.38), получим

$$b'_{22}=kb,\ \Delta=\Delta_1 k,\ g_2=k(-b_{21}f_1+b_{11}f_2)\equiv k\ell, \tag{5.40}$$

где $b(\varphi,\varepsilon)\equiv \det B(\varphi,\varepsilon)$. Подставив (5.40) в (5.37), придем к уравнению

$$\Delta_1(\varphi,\varepsilon)\dot{x}_2=b(\varphi,\varepsilon)x_2+\ell(\varphi,\varepsilon), \tag{5.41}$$

единственное периодическое решение которого имеет вид

$$x_2^0(\varphi,\varepsilon)=\int_{\pm\infty}^{\varphi}\exp\left\{\int_{\tau}^{\varphi}\frac{b(\xi,\varepsilon)}{\Delta_1(\xi,\varepsilon)}d\xi\right\}\frac{\ell(\tau,\varepsilon)}{\Delta_1(\tau,\varepsilon)}d\tau, \tag{5.42}$$

где нижний предел $-\infty$ соответствует случаю $\Delta_1 b<0$, а $+\infty$ - $\Delta_1 b>0$. Рассмотрим случай $\Delta_1 b<0$. Поскольку функция $w(\tau)=\int_{\tau}^{\varphi}\frac{b(s,\varepsilon)}{\Delta_1(s,\varepsilon)}ds$ — возрастающая, причем $w(\varphi)=0$, $w(-\infty)=-\infty$, то в интеграле (5.42) можно произвести замену переменных $\tau=\eta(w)$:

$$x_2^0(\varphi,\varepsilon)=-\int_{-\infty}^{\varphi}\exp\left\{\int_{\tau}^{\varphi}\frac{b(s,\varepsilon)}{\Delta_1(s,\varepsilon)}ds\right\}\frac{\ell(s,\varepsilon)}{b(s,\varepsilon)}d\left\{\int_{\tau}^{\varphi}\frac{b(s,\varepsilon)}{\Delta_1(s,\varepsilon)}ds\right\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{w}\frac{\ell(\eta(w),\varepsilon)}{b(\eta(w),\varepsilon)}dw,$$

откуда с учетом (5.40) следует оценка (5.39). Аналогичные рассуждения проводятся и в случае $\Delta_1 b>0$.

Установим справедливость неравенства

$$|\dot{x}_2^0(\varphi,\varepsilon)|\le c_3\equiv const>0 \quad \forall(\varphi,\varepsilon)\in R^1\times J_0. \tag{5.43}$$

Неравенства (5.32), (5.33) и теорема 4 гарантируют существование единственного периодического решения $y_0(\varphi)\in C^1(R^1_{2\pi})$ уравнения

$$\Delta_1(\varphi,0)\dot{y}=b(\varphi,0)y+\ell(\varphi,0).$$

В уравнении (5.41) произведем замену переменных по формуле

$$x_2(\varphi,\varepsilon)=y_0(\varphi)+z(\varphi,\varepsilon). \tag{5.44}$$

Тогда относительно z получим уравнение

$$\Delta_1(\varphi,\varepsilon)\dot{z}=b(\varphi,\varepsilon)z+\left[\Delta_1(\varphi,\varepsilon)-\Delta_1(\varphi,0)\right]\dot{y}_0(\varphi), \tag{5.45}$$

единственное периодическое решение которого имеет вид

$$z_0(\varphi,\varepsilon)=\int_{\pm\infty}^{\varphi}\exp\left\{\int_{\tau}^{\varphi}\frac{b(s,\varepsilon)}{\Delta_1(s,\varepsilon)}ds\right\}\frac{\Delta_1(\tau,\varepsilon)-\Delta_1(\tau,0)}{\Delta_1(\tau,\varepsilon)}\dot{y}_0(\tau)d\tau$$

и удовлетворяет оценке

$$|z_0(\varphi,\varepsilon)|\le\left|\frac{\Delta_1(\varphi,\varepsilon)-\Delta_1(\varphi,0)}{b(\varphi,\varepsilon)}\right||\dot{y}_0(\varphi)|, \qquad (5.46)$$

установленной по аналогии с (5.39). Из (5.45),(5.46) получаем

$$|\dot{z}_0(\varphi,\varepsilon)|\le\left|\frac{b(\varphi,\varepsilon)}{\Delta_1(\varphi,\varepsilon)}\right||z_0(\varphi,\varepsilon)|+\left|\frac{\Delta_1(\varphi,\varepsilon)-\Delta_1(\varphi,0)}{\Delta_1(\varphi,\varepsilon)}\right||\dot{y}_0(\varphi)|\le$$

$$\le 2\frac{|\Delta_1(\varphi,\varepsilon)-\Delta_1(\varphi,0)|}{|\Delta_1(\varphi,\varepsilon)|}|\dot{y}_0(\varphi)|\le N|\dot{y}_0(\varphi)|,$$

где постоянная $N>0$ не зависит от $\varphi\in R^1$ и $\varepsilon\in J_0$. Поэтому с учетом (5.44) и включения $y_0(\varphi)\in C^1(R^1,2\pi)$ приходим к неравенству (5.43), где $c_3\ge(1+N)|\dot{y}_0(\varphi)|$.

Найдем неоднородность уравнения (5.36) после подстановки найденного решения $x_2^0(\varphi,\varepsilon)$. Используя (5.37),(5.38),(5.35) и (5.31), последовательно получаем

$$b'_{12}x_2^0+g_1=\frac{b'_{12}}{b'_{22}}(\Delta\dot{x}_2^0-g_2)+g_1=\frac{b'_{12}}{b'_{22}}\Delta\dot{x}_2^0+\frac{b'_{22}(q_{11}f_1+q_{12}f_2)}{b'_{22}}-$$

$$-\frac{b'_{12}(q_{21}f_1+q_{22}f_2)}{b'_{22}}=\frac{b'_{12}}{b'_{22}}\Big[\Delta\dot{x}_2^0+(b'_{22}q_{11}-b'_{12}q_{21})f_1+ \qquad (5.47)$$

$$+(b'_{22}q_{12}-b'_{12}q_{22})f_2\Big]=\frac{\Delta}{b'_{22}}(b'_{12}\dot{x}_2^0+b_{22}f_1-b_{12}f_2),$$

$$b'_{11}=q_{11}b_{11}+q_{12}b_{21}=\Delta k^{-1},\ b'_{22}=q_{21}b_{12}+q_{22}b_{22}=kb. \qquad (5.48)$$

С учетом (5.47),(5.48) уравнение (5.36) примет вид

$$\dot{x}_1=k^{-1}(\varphi,\varepsilon)x_1+\left[k(\varphi,\varepsilon)b(\varphi,\varepsilon)\right]^{-1}\left[b'_{12}(\varphi,\varepsilon)\dot{x}_2^0(\varphi,\varepsilon)+b_{22}(\varphi,\varepsilon)f_1(\varphi,\varepsilon)-b_{12}(\varphi,\varepsilon)f_2(\varphi,\varepsilon)\right],$$

откуда следует, что функция

$$x_1^0(\varphi,\varepsilon)=\int_{\pm\infty}^{\varphi}\exp\Big\{\int_{\tau}^{\varphi}k^{-1}(s,\varepsilon)ds\Big\}\frac{b_{12}'(\tau,\varepsilon)\dot{x}_2^0(\tau,\varepsilon)+b_{22}(\tau,\varepsilon)f_1(\tau,\varepsilon)-b_{12}(\tau,\varepsilon)f_2(\tau,\varepsilon)}{k(\tau,\varepsilon)b(\tau,\varepsilon)}d\tau$$

является единственным периодическим решением этого уравнения. Здесь нижний предел $-\infty$ соответствует $k(\varphi,\varepsilon)<0$, а $+\infty$ – $k(\varphi,\varepsilon)>0$. По аналогии с тем как была установлена оценка (5.39) для решения (5.42), можно показать, что

$$|x_1^0(\varphi,\varepsilon)|\le c_1\|f(\varphi,\varepsilon)\| \quad \forall(\varphi,\varepsilon)\in R^1\times J_0, c_1=const>0.$$

В заключение отметим, что в случае справедливости тождеств (5.31) с $j=2$ доказательство теоремы повторяется почти дословно.

Примером системы (5.30) является такая

$$\begin{pmatrix}\sin t & \varepsilon\cos t\\ -\varepsilon\cos t & \varepsilon\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что она удовлетворяет всем условиям теоремы II и обладает единственным периодическим решением $x_1^0=0, x_2^0=1$.

§ 6. Инвариантные торы, непрерывные в точке $\varepsilon=0$, матрично-сингулярно возмущенных линейных расширений динамических систем на торе.

Продолжая изучать системы вида (5.I), установим условия существования инвариантных торов $x=u(\varphi,\varepsilon)$ из $C^r(R^m,2\pi)$, удовлетворяющих неравенству $\|u(\varphi,\varepsilon)\|\le K\|f(\varphi,\varepsilon)\|$ для всех $\varepsilon\in J=(0,\varepsilon^0]$ и некоторых постоянных $\varepsilon^0>0$ и $K>0$ в предположении постоянности ранга вырожденной матрицы $A(\varphi)$.

I°. Приведем систему уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi,\varepsilon),\ [A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)]\dot{x}=B(\varphi,\varepsilon)x+f(\varphi,\varepsilon) \qquad (6.1)$$

к равносильной, исследование которой значительно упрощается.

Л е м м а I9. Пусть относительно системы (6.I) выполняются следующие условия.

I. Функции a, P, B и f непрерывны вместе с первыми производными по ε на $[0,\varepsilon_0]$ и при каждом $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$

$$A,P\in C^{r+1}(R^m_{,}2\pi),\ a,B,f\in C^r(R^m_{,}2\pi),\ r\geq 0.$$

2. $$0<\operatorname{rank}A(\vartheta)\equiv k<n,\ \det[A(\vartheta)+\varepsilon P(\vartheta,\varepsilon)]\neq 0\ \forall(\vartheta,\varepsilon)\in R^m\times J_0, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{rank}[A(\vartheta),B_2(\vartheta,0)]\equiv n, \quad (6.3)$$

где $n\times(n-k)$ -матрица $B_2(\vartheta,0)$ составлена из последних $n-k$ столбцов матрицы $B(\vartheta,0)$.

3. Существует $(n-k)\times n$ -матрица $N_1(\vartheta)$ из $C^{r+1}(R^m_{,}4\pi)$ такая, что

$$N_1(\vartheta)A(\vartheta)\equiv 0,\ \operatorname{rank}N_1(\vartheta)\equiv n-k \quad (\vartheta\in R^m). \quad (6.4)$$

Тогда если

$$n\geq m+k+1, \quad (6.5)$$

то можно построить невырожденные для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$, $0<\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, матрицы $S(\vartheta,\varepsilon)$, $\Phi(\vartheta)$ и $(n-k)$ -вектор $F(\vartheta)$ из $C^{r+1}(R^m_{,}4\pi)$ такие, что система (6.I) после умножения слева на $S(\vartheta,\varepsilon)$ и замены переменных по формуле

$$x=\Phi(\vartheta)\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\F(\vartheta)\end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где y и z соответственно k и $(n-k)$ -векторы, примет вид

$$\begin{cases}\dot\vartheta=a(\vartheta,\varepsilon),\ \dot y=B(\vartheta,\varepsilon)y+C(\vartheta,\varepsilon)z+g_1(\vartheta,\varepsilon),\\ \varepsilon\dot z=\varepsilon d(\vartheta,\varepsilon)y+p(\vartheta,\varepsilon)z+\varepsilon g_2(\vartheta,\varepsilon).\end{cases} \quad (6.7)$$

Здесь

$$S(\varphi,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\{A_1(\varphi)+\varepsilon[P_1(\varphi,\varepsilon)-P_2(\varphi,\varepsilon)P_4^{-1}(\varphi,\varepsilon)P_3(\varphi,\varepsilon)]\}^{-1} & 0\\ 0 & P_4^{-1}(\varphi,\varepsilon)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} I_k & 0\\ \varepsilon P_3(\varphi,\varepsilon)\{A_1(\varphi)+\varepsilon[P_1(\varphi,\varepsilon)-P_2(\varphi,\varepsilon)P_4^{-1}(\varphi,\varepsilon)P_3(\varphi,\varepsilon)]\}^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & -P_2(\varphi,\varepsilon)P_4^{-1}(\varphi,\varepsilon)\\ 0 & I_{n-k}\end{pmatrix}N(\varphi), \tag{6.8}$$

$$\Phi(\varphi)=V(\varphi)\begin{pmatrix} I_k & 0\\ -D_4^{-1}(\varphi,0)D_3(\varphi,0) & I_{n-k}\end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

$$\begin{pmatrix} D_1(\varphi,0) & D_2(\varphi,0)\\ D_3(\varphi,0) & D_4(\varphi,0)\end{pmatrix}\equiv S(\varphi,0)\left[B(\varphi,0)V(\varphi)-A(\varphi)\frac{\partial V}{\partial\varphi}a(\varphi,0)\right],\ F(\varphi)=\hat{D}_4^{-1}(\varphi)f_2(\varphi,0),$$

$$\begin{pmatrix} b(\varphi,\varepsilon) & c(\varphi,\varepsilon)\\ \varepsilon d(\varphi,\varepsilon) & p(\varphi,\varepsilon)\end{pmatrix}\equiv S(\varphi,\varepsilon)\left\{B(\varphi,\varepsilon)\Phi(\varphi,\varepsilon)-\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\Phi(\varphi)\right]a(\varphi,\varepsilon)\right\},$$

$$\begin{pmatrix} g_1(\varphi,\varepsilon)\\ \varepsilon g_2(\varphi,\varepsilon)\end{pmatrix}=S(\varphi,\varepsilon)\left\{-B(\varphi,\varepsilon)\begin{pmatrix}0\\ F(\varphi)\end{pmatrix}+\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}0\\ F(\varphi)\end{pmatrix}a(\varphi,\varepsilon)+f(\varphi,\varepsilon)\right\},$$

$$N=\begin{pmatrix}N_2\\ N_1\end{pmatrix},\ V=\left[(N_2A)^*,V_1\right],\ A_1=N_2A(N_2A)^*,$$

$$P_1=N_2P(N_2A)^*,\ P_2=N_2PV_1,\ P_3=N_1P(N_2A)^*,\ P_4=N_1PV_1,$$

матрицы $N_2(\varphi)$ и $V_1(\varphi)$ размерностей $k\times n$ и $n\times(n-k)$ соответственно принадлежат $C^{r+1}(R^m_{4\pi})$, причем

$$N_1(\varphi)N_2^*(\varphi)=0,\ \operatorname{rank}N_2(\varphi)\equiv k,\ N_2(\varphi)A(\varphi)V_1(\varphi)=0,\ \operatorname{rank}V_1(\varphi)\equiv n-k, \tag{6.10}$$

матрицы a, b, c и p имеют размерности $k\times k$, $k\times(n-k)$, $(n-k)\times k$ и $(n-k)\times(n-k)$ соответственно, принадлежат вместе

с k и $(n-k)$ - векторами g_1 и $g_2 \in C^r(R^m, 4\pi)$ непрерывны по ε на $[0, \varepsilon_0]$, $\hat{D}_4(\varphi)$ — $(n-k)\times(n-k)$ -матрица, составленная из последних $n-k$ строк и столбцов матрицы $S(\varphi,0)B(\varphi,0)$, f_2 — вектор, составленный из последних $n-k$ элементов вектора f.

Доказательство. Пусть выполняются предположения леммы 19. Тогда согласно лемме 5 существуют матрицы $N_2(\varphi)$ и $V_1(\varphi)$ размерности $k\times n$ и $n\times(n-k)$ соответственно, удовлетворяющие соотношениям (6.10). Поэтому ясно, что матрица $N(\varphi)$ и $V(\varphi)$ невырождены, и

$$N(\varphi)\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]V(\varphi)=\begin{pmatrix} A_1(\varphi)+\varepsilon P_1(\varphi,\varepsilon) & \varepsilon P_2(\varphi,\varepsilon) \\ \varepsilon P_3(\varphi,\varepsilon) & \varepsilon P_4(\varphi,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Из условия 2 и невырожденности $N(\varphi)$ и $V(\varphi)$ следует невырожденность матриц $A_1(\varphi)$ и $P_4(\varphi,0)$. Следовательно, для достаточно малого $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_0$ и всех $0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$ существует матрица $P_4^{-1}(\varphi,\varepsilon)$. Тождество (6.3) совместно с леммой 9 влечет невырожденность матрицы $D(\varphi,0)$. Последовательно производя преобразования второго уравнения системы (6.I), которые соответствуют множителям матриц $S(\varphi,\varepsilon)$ и $\Phi(\varphi)$, определенных формулами (6.8),(6.9), приходим к системе (6.7). При этом дифференцируемость по ε коэффициентов системы (6.I) используется для того, чтобы неоднородность $g_2(\varphi,\varepsilon)$ была непрерывной по ε на $[0,\varepsilon_1]$.

Отметим, что условие 3 справедливо, в частности, если:

а) $m>1$ и выполняются условия леммы 8; б) $m=1$.

Это следует из лемм 8 и 3 соответственно. В общем же случае этот вопрос, насколько нам известно, открыт.

Лемма 20. Пусть $a\in C^{1/2}(R^m,2\pi)$, $a,b,c,d,p,g_1,g_2\in C^r(R^m,4\pi)$, $r\ge 0$,

и существует невырожденная $(n-k)\times(n-k)$-матрица $\hat{S}(\varphi)\in C^{\circ}(R^m, 2\pi)$, $\hat{S}^{*}(\varphi)\equiv\hat{S}(\varphi), \hat{S}(\varphi_t(\varphi))\in C^{1}(R^1)$, в которой n_1 собственных чисел положительных и $n-k-n_1$ отрицательных и такая, что матрица

$$\tilde{S}(t,\varphi)=\frac{d}{dt}\hat{S}(\varphi_t(\varphi))+\hat{S}(\varphi_t(\varphi))p(\varphi_t(\varphi),0)+p^{*}(\varphi_t(\varphi),0)\hat{S}(\varphi_t(\varphi))$$

отрицательно определена: $\max_{\langle z,z\rangle=1}\langle\tilde{S}(t,\varphi)z,z\rangle\le-2\gamma<0$,

где γ — положительная постоянная, не зависящая от $t\in R^1$ и $\varphi\in R^m$.

Тогда можно указать такое $\varepsilon^{\circ}>0$, что для всех $\varepsilon\in J^{\circ}$ система (6.7) имеет $(m+k)$-параметрическое интегральное многообразие

$$z=L(\varphi,\varepsilon)y+q(\varphi,\varepsilon), \qquad (6.11)$$

где $(n-k)\times k$-матрица $L(\varphi,\varepsilon)$ и $(n-k)$-вектор $q(\varphi,\varepsilon)$ принадлежат $C^{1}(R^m, 4\pi)$ и

$$|L(\varphi,\varepsilon)|_r\le\Delta(\varepsilon), |q(\varphi,\varepsilon)|_r\le\rho(\varepsilon), \max(\Delta,\rho)\to0 \text{ при } \varepsilon\to0. \qquad (6.12)$$

Доказательство. Применим методику, использованную в работе [7].

Рассмотрим уравнение

$$\dot{y}=\left[b(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)+c(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)L(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)\right]y+c(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)q(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)+g_1(\varphi_t(\varphi),\varepsilon), \qquad (6.13)$$

где $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi)=\varphi$, — решение первого уравнения системы (6.7) t_0 и φ — произвольные постоянные число и вектор соответственно. Обозначим $Y(t,t_0,L)\equiv Y(\varphi_t(\varphi),\varepsilon,L(\varphi_t(\varphi),\varepsilon))$ фундаментальную матрицу решений однородного уравнения, соответствующего (6.13), $Y(t_0,t_0,L)=I_{n-k}$. Тогда решение уравнения (6.13), принимающее при $t=t_0$ значение $y_0(\varphi)$ имеет вид

$$y_t\equiv y(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)=Y(t,t_0,L)y_0+\xi(t,t_0,q),$$
$$\xi(t,t_0,q)\equiv\xi(\varphi_t(\varphi),\varepsilon,q(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)\equiv\int_{t_0}^{t}Y(t,\tau,L)\left[c(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)q(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)+g_1(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau. \qquad (6.14)$$

В теореме 4 доказано, что при выполнении условий леммы 20 для каждого $\varepsilon \in \mathcal{J}_1$ уравнение

$$\dot{v} = \varepsilon^{-1} \rho(\varphi_t(\varphi), 0)\, v + \Psi(t), \tag{6.15}$$

имеет функцию Грина задачи об ограниченных решениях, удовлетворяющую оценке

$$\|\bar{G}_t(\tau, \varphi, \varepsilon)\| \le K_1 \exp\{-\tfrac{\gamma_1}{\varepsilon}|t-\tau|\} \quad (t, \tau \in R^1, \varphi \in R^m), \tag{6.16}$$

где $\Psi(t)$ — произвольная непрерывная ограниченная на R^1 функция, положительные постоянные K_1 и γ_1 не зависят от φ и ε. В силу непрерывности по ε матрицы $\rho(\varphi, \varepsilon)$ справедливо представление $\rho(\varphi, \varepsilon) = \rho(\varphi, 0) + \rho_1(\varphi, \varepsilon)$, где $\|\rho_1(\varphi, \varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому из теоремы 5 работы [44] следует, что уравнение

$$\dot{w} = \varepsilon^{-1} \rho(\varphi_t(\varphi), \varepsilon)\, w + \Psi(t) \tag{6.17}$$

для каждого фиксированного $\varepsilon \in \mathcal{J}_2$ и некоторого $\varepsilon_2 \in \mathcal{J}_1$ имеет функцию Грина $G_t(\tau, \varphi, \varepsilon)$ задачи об ограниченных решениях, удовлетворяющую неравенству

$$\|G_t(\tau, \varphi, \varepsilon)\| \le K \exp\{-\tfrac{\gamma}{\varepsilon}|t-\tau|\} \quad (t, \tau \in R^1, \varphi \in R^m), \tag{6.18}$$

где постоянные γ и K находятся из соотношений
$0 < \gamma < \gamma_1 - K_1 \|\rho_1(\varphi, \varepsilon)\|$, $0 < (\gamma - \gamma_1) K_1 (\gamma - \gamma_1 - K_1 \|\rho_1(\varphi, \varepsilon)\|)^{-1} \le K$.

Покажем, что функции

$$y_t, z_t = L(\varphi_t(\varphi), \varepsilon) y_t + q(\varphi_t(\varphi), \varepsilon) \tag{6.19}$$

образуют решения второго и третьего уравнения системы (6.7), если функции L и q удовлетворяют системе уравнений

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \varphi, \varepsilon)\, d(\varphi_\tau(\varphi), \varepsilon)\, Y(\tau, t, L)\, d\tau, \tag{6.20}$$

$$q=\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[a(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\xi(t,\tau,q)+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau. \qquad (6.21)$$

Из соотношений (6.14) следует, что функции (6.19) удовлетворяют уравнению

$$\dot{y}=b(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y+c(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)z+g_1(\varphi_t(\varphi),\varepsilon).$$

с другой стороны, с учетом (6.19)-(6.21) имеем

$$z_t=\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)a(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)Y(\tau,t,L)y_t\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[a(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\xi(t,\tau,q)+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau.$$

Используя (6.14) и равенство $Y(\tau,t,L)Y(t,t_0,L)=Y(\tau,t_0,L)$, приходим к тождеству

$$z_t=\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[a(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau,$$

продифференцировав которое по t убеждаемся с учетом свойства функции Грина, что функции (6.19) удовлетворяют также уравнению

$$\varepsilon\dot{z}=\varepsilon a(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y+p(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)+\varepsilon g_2(\varphi_t(\varphi),\varepsilon).$$

Покажем, что система (6.20)-(6.21) имеет для всех достаточно малых ε единственное решение в пространстве $C^0(R^m_{4\pi},\Delta)$ Обозначим соответственно $C^r(R^m,T,\Delta)$ и $C^r(R^m,T,\rho)$ множества с нормой пространства $C^r(R^m,T)$ $(n-k)\times k$ -матриц $L(\varphi,\varepsilon)$ и $n-k$ векторов $q(\varphi,\varepsilon)$ таких, что $L,q\in C^r(R^m,T)$ и выполняются соотношения (6.12).

Рассмотрим оператор S, определяемый правой частью уравнения (6.20)

$$Sv\equiv\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)a(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)Y(\tau,t,v)\,d\tau. \qquad (6.22)$$

Пусть

$$|b(\varphi,\varepsilon)|_r\le\beta,\quad |c(\varphi,\varepsilon)|_r\le\lambda. \qquad (6.23)$$

Тогда с учетом определения $Y(t,\tau,L)$ получаем оценку

$$|Y(t,\tau,L)|_0 \le \exp\{(\beta+\Delta\lambda)|t-\tau|\} \quad (t,\tau\in R^1, \varphi\in R^m). \tag{6.24}$$

Выберем ε_3 из $\mathcal{J}_2$ настолько малым, чтобы для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}_3$ выполнялось неравенство

$$\beta+\lambda\Delta \le \sigma(\varepsilon)=\gamma(2\varepsilon)^{-1}. \tag{6.25}$$

Используя (6.18),(6.24) и (6.25), из (6.22) получаем $|Sv|_0\le 2K\sigma^{-1}|d|_0$. Положим $\Delta=2K\sigma^{-1}|d|_0$. Тогда

$$|Sv|_0 \le \Delta. \tag{6.26}$$

Для произвольных $v,\bar v\in C^0(R^m,4\pi,\Delta)$ оценим разность

$$Sv-S\bar v=\int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\,d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\Big[Y(t,\tau,v)-Y(t,\tau,\bar v)\Big]d\tau. \tag{6.27}$$

Поскольку $Y(\tau,\tau,L)=Y(\tau,\tau,\bar L)$ и

$$Y(t,\tau,v)-Y(t,\tau,\bar v)=\int_\tau^t\{(b+cv)\Big[Y(s,\tau,v)-Y(s,\tau,\bar v)\Big]+c(v-\bar v)\,Y(s,\tau,\bar v)\}ds,$$

то с учетом (6.25)

$$|Y(t,\tau,v)-Y(t,\tau,\bar v)|_0\le\lambda|v-\bar v|_0\int_\tau^t|Y(s,\tau,\bar v)|_0 ds+\sigma\int_\tau^t|Y(s,\tau,v)-Y(s,\tau,\bar v)|_0 ds.$$

Применяя к этому неравенству лемму I [36, с. 180] получаем оценку

$$|Y(t,\tau,v)-Y(t,\tau,\bar v)|_0\le\lambda|v-\bar v|_0\int_\tau^t|Y(s,\tau,\bar v)|_0\exp\{\sigma|t-s|\}ds\le\lambda|v-\bar v|_0|t-\tau|\exp\{\sigma|t-\tau|\}, \tag{6.28}$$

с учетом которой из (6.27) следует

$$|Sv-S\bar v|_0\le 2K\sigma^{-2}|d|_0\lambda|v-\bar v|_0. \tag{6.29}$$

Пусть $\varepsilon_4\in\mathcal{J}_3$ и такое, что

$$2K\sigma^{-2}(\varepsilon_4)\lambda|d|_0=\theta<1. \tag{6.30}$$

Тогда согласно (6.26) и (6.29) оператор S для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}_4$ отображает $C^0(R^m,4\pi,\Delta)$ в $C^0(R^m,4\pi,\Delta)$ и является сжимающим.

Таким образом, уравнение (6.20) для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}_4$ имеет единственное решение $v=L(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)$, $L(\varphi,\varepsilon)\in C^0(R^m,4\pi,\Delta)$.

Рассмотрим на $C^0(R^m_{4\pi},\rho)$ оператор U определяемый правой частью уравнения (6.2I)

$$U\omega=\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[\alpha(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\xi(t,\tau,\omega)+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau. \qquad (6.3I)$$

Используя (6.24) и (6.25), находим из (6.I4)

$$|\xi(t,\tau,\omega)|_0\le\sigma^{-1}(\lambda\rho+|g_1|_0)\left[\exp\{\sigma|t-\tau|\}-1\right].$$

Учитывая эту оценку, получаем из (6.3I)

$$|U\omega|_0\le 2K\sigma^{-1}\left[|\alpha|_0(\lambda\rho+|g_1|_0)+|g_2|_0\right].$$

Тогда

$$|U\omega|_0\le\rho \qquad (6.32)$$

для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}_5$, если ε_5 из $\mathcal{J}_4$ выбрано таким, что $\rho(\varepsilon_5)>0$, где

$$\rho=2K\sigma^{-1}\left[|\alpha|_0|g_1|_0+|g_2|_0\right]\left[1-2K\sigma^{-1}|\alpha|_0\lambda\right]^{-1}. \qquad (6.33)$$

Оценим разность

$$U\omega-U\bar\omega=\int_{-\infty}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\alpha(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\left[\xi(t,\tau,\omega)-\xi(t,\tau,\bar\omega)\right]d\tau.$$

Поскольку

$$|\xi(t,\tau,\omega)-\xi(t,\tau,\bar\omega)|_0\le\lambda\sigma^{-1}\left[\exp\{\sigma|t-\tau|\}-1\right]|\omega-\bar\omega|_0,$$

то

$$|U\omega-U\bar\omega|_0\le 2K\sigma^{-2}|\alpha|_0\lambda|\omega-\bar\omega|_0=\theta_1|\omega-\bar\omega|_0. \qquad (6.34)$$

Следовательно, если выбрать ρ по формуле (6.33), а ε_6 из $\mathcal{J}_5$ таким, чтобы $\theta_1(\varepsilon_6)<1$, то в силу (6.32), (6.34) оператор U отображает $C^0(R^m_{4\pi},\rho)$ в себя и является сжимающим, что гарантирует существование для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}_6$ единственного решения уравнения (6.2I).

Покажем, что

$$L(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m_{4\pi},\Delta_1),\ q(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m_{4\pi},\rho_1),\ \max(\Delta_1,\rho_1)\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} L(\varphi,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\,\alpha(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\,Y(\tau,0,L)\,d\tau, & (6.35)\\ q(\varphi,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[\alpha(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\xi(0,\tau,q)+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau, & (6.36)\end{cases}$$

соответствующую при $t=0$ системе (6.20)-(6.21).

Оценим $|Y(t,0,L)|_r$. Обозначим

$$b(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)+c(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)L(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)=A(\varphi_t(\varphi)). \qquad (6.37)$$

Тогда

$$Y_\varphi(t,0,L)-Y_{\bar\varphi}(t,0,L)=\int\limits_0^t Y_\varphi(t,s,L)\left[A(\varphi_s(\varphi))-A(\varphi_s(\bar\varphi))\right]Y_{\bar\varphi}(s,0,L)\,ds.$$

Разделим это равенство на $\varphi_i-\bar\varphi_i$ $(i\in[1,m])$, считая $\bar\varphi_i$ отличным от φ_i лишь в i-х координатах, и устремим $\bar\varphi_i$ к φ_i.

Так как

$$\lim_{\bar\varphi_i\to\varphi_i} Y_\varphi(t,s,L)\frac{A(\varphi_s(\varphi))-A(\varphi_s(\bar\varphi))}{\varphi_i-\bar\varphi_i}Y_{\bar\varphi}(s,\tau,L)=Y_\varphi(t,s,L)\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial A(\varphi_s(\varphi))}{\partial\varphi_{s\nu}}\cdot\frac{\partial\varphi_{s\nu}(\varphi)}{\partial\varphi_i}Y_\varphi(s,0,L)=F(t,s,\varphi)$$

равномерно относительно $\varphi\in R^m$, $s\in[0,t]$, то при $t\neq0$

$$\frac{\partial Y(t,0,L)}{\partial\varphi_i}=\lim_{\bar\varphi_i\to\varphi_i}\frac{Y_\varphi(t,0,L)-Y_{\bar\varphi}(t,0,L)}{\varphi_i-\bar\varphi_i}=\int\limits_0^t F(t,s,\varphi)\,ds. \qquad (6.38)$$

Следовательно, матрица $Y(t,0,L)$ дифференцируема по φ.

Оценим $|F(t,s,\varphi)|_0$. Из неравенства $|\varphi_t(\varphi)-\varphi_t(\bar\varphi)|_0\le\exp\{\alpha|t|\}|\varphi-\bar\varphi|_0$, где $\alpha\ge\max\left|\left\langle\frac{\partial a}{\partial\varphi}\eta,\eta\right\rangle\right|$, следует оценка $\left|\frac{\partial\varphi_{s\nu}(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right|_0\le\exp\{\alpha|s|\}$,

с учетом которой получаем

$$|F(t,s,\varphi)|_0\le K_2\exp\{|A|_0(|t-s|+|s|)+\alpha|s|\}.$$

Из этой оценки и (6.37), (6.23), (6.25) следует

$$\left|\frac{\partial Y(t,0,L)}{\partial\varphi_i}\right|_0\le K_2\exp\{(\sigma+\alpha)|t|\}.$$

Дифференцируя последовательно равенство (6.38), можно показать, что $D^r_\varphi Y(t,0,L)$ существует, причем

$$|Y(t,0,L)|_r \le K_3 \exp\{(\sigma+r\alpha)|t|\}. \qquad (6.39)$$

Согласно теореме 12 из [44] существует $D_\varphi^r G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)$ и

$$|G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)|_r \le K_4 \exp\{-(2\sigma-r\alpha)|\tau|\} \qquad (6.40)$$

всякий раз, когда $2\sigma-r\alpha>0$. Однако это условие выполняется для всех $\varepsilon\in J_7$, где $\varepsilon_7\in J_6$ и такое, что $2\sigma(\varepsilon_7)>r\alpha$.

Для оператора Q, определенного правой частью уравнения (6.35), и произвольных $v,\bar v\in C^r(R^m_{4\pi},\Delta_1)$ оценим разность

$$Qv-Q\bar v=\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\,d\big(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon\big)\Big[Y(\tau,0,v)-Y(\tau,0,\bar v)\Big]\,d\tau.$$

Из первого неравенства (6.28) и (6.39) следует

$$|Y(t,0,v)-Y(t,0,\bar v)|_r \le \lambda|v-\bar v|_r \int_0^t |Y(\tau,0,\bar v)|_r \exp\{\sigma|t-\tau|\}\,d\tau \le$$

$$\le \lambda K_3 (r\alpha)^{-1}|v-\bar v|_r\,|t|\exp\{(\sigma+r\alpha)|t|\}.$$

Тогда, выбрав $\varepsilon_8\in J_7$ из условия $\sigma(\varepsilon_8)>2r\alpha$, для всех $\varepsilon\in J_8$ получим

$$|Qv-Q\bar v|_r \le 2\lambda K_3K_4(\sigma-2r\alpha)^{-1}\big[(r\alpha)^{-1}-(\sigma-2r\alpha)^{-1}\big]|v-\bar v|_r \equiv \theta_1|v-\bar v|_r. \qquad (6.41)$$

Оценим $|Qv|_r$, используя (6.38) и (6.39):

$$|Qv|_r \le 2K_3K_4|a|_r(\sigma-2r\alpha)^{-1}. \qquad (6.42)$$

Выберем $\varepsilon_9\in J_8$ из условия

$$\theta_1(\varepsilon_9)<1 \qquad (6.43)$$

и положим

$$\Delta_1 \equiv 2K_3K_4|a|_r(\sigma-2r\alpha)^{-1}. \qquad (6.44)$$

Тогда из (6.42), (6.44) следует, что для всех $\varepsilon\in J_9$, $|Qv|_r\le\Delta_1$, т. е. что оператор Q отображает $C^r(R^m_{4\pi},\Delta_1)$ в себя, а из (6.41), (6.43) – что он является сжимающим. Это гарантирует существование единственного решения $v=L(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m_{4\pi},\Delta_1)$ уравнения (6.35) для всех $\varepsilon\in J_9$.

Рассмотрим на $C^r(R^m_{4\pi},\rho_1)$ оператор

$$T\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[d(\varphi_2(\varphi),\varepsilon)\omega + g_2(\varphi_2(\varphi),\varepsilon)\right] d\tau, \qquad (6.45)$$

определенный правой частью уравнения (6.36).

Оценим $|T\omega|_r$. Используя (6.39), из (6.14) получим

$$|\xi(0,t,\omega)|_r \le (\lambda\rho_1 + |g_1|_r) K_3 (\sigma + r\alpha)^{-1} \exp\{(\sigma + r\alpha)|t|\}.$$

с учетом этого неравенства и (6.40) из (6.45) найдем

$$|T\omega|_r \le 2K_3K_4|d|_r(\lambda\rho_1 + |g_1|_r)(\sigma + r\alpha)^{-1}(\sigma - 2r\alpha)^{-1}.$$

Выберем ρ_1 таким образом, чтобы правая часть этого неравенства равнялась для всех $\varepsilon \in J_{10}$ числу $\rho_1 > 0$, получим

$$|T\omega|_r \le \rho_1. \qquad (6.46)$$

Для произвольных $\omega, \bar{\omega} \in C^r(R^m, 4\pi, \rho_1)$ оценим разность

$$T\omega - T\bar{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi,\varepsilon) d(\varphi_2(\varphi),\varepsilon)\left[\xi(0,\tau,\omega) - \xi(0,\tau,\bar{\omega})\right] d\tau.$$

Так как согласно (6.14) и (6.39)

$$|\xi(0,\tau,\omega) - \xi(0,\tau,\bar{\omega})|_r \le \lambda K_3 (\sigma + r\alpha)^{-1} |\omega - \bar{\omega}|_r \exp\{(\sigma + r\alpha)|\tau|\},$$

то

$$|T\omega - T\bar{\omega}|_r \le 2K_3K_4\lambda|d|_r(\sigma + r\alpha)^{-1}|\omega - \bar{\omega}|_r \equiv \theta_2|\omega - \bar{\omega}|_r.$$

Выбрав $\varepsilon^\circ \in J_{10}$ так, чтобы $\theta_2(\varepsilon) < 1$ для всех $\varepsilon \le \varepsilon^\circ$, добиваемся тем самым с учетом (6.46) того, что уравнение (6.36) имеет единственное решение $q(\varphi,\varepsilon) \in C^r(R^m, 4\pi, \rho_1)$. В силу выбора Δ_1 и ρ_1 $\max\{\Delta_1, \rho_1\} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 20 доказана.

3°. Изучим устойчивость многообразия (6.11).

Лемма 21. Пусть относительно системы уравнений (6.7) выполняются условия леммы 21.

Тогда интегральное многообразие (6.11) является условно асимптотически устойчивым относительно точечного многообразия размерности n_1. В частности, если $n_1 = n - k$, то (6.11) устой-

чиво, если же $n_1=0$, то (6.11) неустойчиво.

Доказательство. Рассмотрим интегро-дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{y}_t = b(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y_t + c(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)z_t + g_1(\varphi_t(\varphi),\varepsilon), & (6.47) \\ \dot{z}_t = G_t(t_0,\varphi,\varepsilon)\ell + \int_{t_0}^{\infty} G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau + g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau, & (6.48) \end{cases}$$

где $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_{t_0}(\varphi)=\varphi$, — решение первого уравнения системы (6.7), $\ell-(n-k)$ -мерный постоянный вектор, $G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (6.17). Нетрудно показать, что для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}^\circ$ и ℓ, $\|\ell\|=const$, система (6.47)-(6.48) имеет единственное решение (y_t, z_t). Подставляя его в третье уравнение (6.7) и дифференцируя полученное тождество по t как по параметру, находим

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{dG_t(t_0,\varphi,\varepsilon)}{dt}\ell + \int_{t_0}^{\infty}\frac{dG_t(s,\varphi,\varepsilon)}{dt}\left[d(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)y_s + g_2(\varphi_s(\varphi),\varepsilon)\right]ds +$$

$$+\left[G_t(t+0,\varphi,\varepsilon) - G_t(t-0,\varphi,\varepsilon)\right]\left[d(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y_t + g_2(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)\right],$$

откуда с учетом свойств функции Грина следует

$$\varepsilon\dot{z}_t = p(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)z_t + \varepsilon d(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y_t + \varepsilon g_2(\varphi_t(\varphi),\varepsilon).$$

Следовательно, каждое решение системы (6.47)-(6.48) удовлетворяет системе (6.7).

Покажем, что каждое решение (y_t, z_t) системы (6.47)-(6.48) притягивается к интегральному многообразию (6.11). С этой целью оценим разность

$$z_t - L(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y_t - q(\varphi_t(\varphi),\varepsilon) \equiv \delta(t,\varepsilon),\quad t>t_0.$$

Из (6.20), (6.21) и (6.14) получаем

$$L(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y_t + q(\varphi_t(\varphi),\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau + g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau = G_t(t_0,\varphi,\varepsilon)\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{t_0} G_{t_0}(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau + g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau + g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau,$$

откуда с учетом (6.48) получаем

$$\delta(t,\varepsilon)=G_t(t_0,\varphi,\varepsilon)\Big\{I-\int_{-\infty}^{t_0}G_{t_0}(\tau,\varphi,\varepsilon)\Big[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\Big]d\tau\Big\}=$$

$$=G_t(t_0,\varphi,\varepsilon)\Big\{G_{t_0+0}(t_0,\varphi,\varepsilon)\Big[I-\int_{-\infty}^{t_0}G_{t_0}(\tau,\varphi,\varepsilon)\Big[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\Big]d\tau\Big]\Big\}.$$

Поскольку

$$\delta(t_0,\varepsilon)=G_{t_0+0}(t_0,\varphi,\varepsilon)\Big\{I-\int_{-\infty}^{t_0}G_{t_0}(\tau,\varphi,\varepsilon)\Big[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\Big]d\tau\Big\},$$

то $\delta(t,\varepsilon)=G_t(t_0,\varphi,\varepsilon)\,\delta(t_0,\varepsilon)$. Поэтому в силу однородного уравнения (6.18)

$$|z_t-L(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y_t-q(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)|_0\le K\exp\Big\{-\frac{\gamma}{2}|t-t_0|\Big\}|z_{t_0}-L(\varphi,\varepsilon)y_{t_0}-q(\varphi,\varepsilon)|_0,\ t>t_0. \quad (6.49)$$

Пусть $(y(t),z(t))$ — некоторое решение системы (6.7). Тогда из третьего уравнения системы (6.7) имеем

$$\varepsilon\dot z(t)=\varepsilon d(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)y(t)+\rho(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)z(t)+\varepsilon g_2(\varphi_t(\varphi),\varepsilon), \quad (6.50)$$

откуда следует

$$\varepsilon\int_{t_0}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\dot z(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\Big[\rho(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)z(\tau)+\varepsilon d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y(\tau)+\varepsilon g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\Big]d\tau. \quad (6.51)$$

Так как в силу [65] тривиальный инвариантный тор : $w=0$ однородного уравнения (6.17) дихотомичный, то решение уравнения (6.50) $\dot z(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ всякий раз, когда $z(t_0)$ принадлежит пространству E_+ размерности n_1. Поэтому с учетом однородного уравнения (6.17)

$$\int_{t_0}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\dot z(\tau)d\tau=G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)z(\tau)\Big|_{t_0}^{t}+G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)z(\tau)\Big|_{t}^{\infty}+\int_{t_0}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\rho(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)z(\tau)d\tau=$$

$$=z(t)-G_t(t_0,\varphi,\varepsilon)z(t_0)+\int_{t_0}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\rho(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)z(\tau)d\tau.$$

Из (6.51) тогда находим

$$z(t)=G_t(t_0,\varphi,\varepsilon)z(t_0)+\int_{t_0}^{\infty}G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)\Big[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y(\tau)+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\Big]d\tau.$$

Следовательно, решение $(y(t), z(t))$ системы (6.7) удовлетворяет системе (6.47)-(6.48) при $y_{t_0}=y(t_0)$, $\ell=z(t_0)$, если только $z(t_0)\in E_+$. Но поскольку все решения системы (6.47)-(6.48) притягиваются к интегральному многообразию (6.II) по закону (6.49), то решение $(y(t), z(t))$ системы (6.7) тоже обладает этим свойством, если $z(t_0)\in E_+$.

Рассмотрим случай $n_1=n-k$. Тогда функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (6.I7) имеет вид

$$G_t(\tau,\varphi,\varepsilon)=\begin{cases} \Omega_{t_0}^{t}(\varphi,\varepsilon)\,\Omega_{\tau}^{0}(\varphi,\varepsilon), & t>\tau,\\ 0, & t<\tau, \end{cases}$$

и уравнение (6.48) принимает следующий вид

$$z_t=\Omega_{t_0}^{t}(\varphi,\varepsilon)\,\Omega_{\tau}^{0}(\varphi,\varepsilon)\ell+\int_{t_0}^{t}\Omega_{t_0}^{t}(\varphi,\varepsilon)\,\Omega_{\tau}^{0}(\varphi,\varepsilon)\left[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau,\ t>t_0.$$

Поэтому ясно, что система (6.7) при любом $z(t_0)=\ell$ равносильна системе (6.47)-(6.48). Следовательно, при $n_1=n-k$ точечное многообразие E_+ размерности $n-k$ представляет собой всю окрестность интегрального многообразия (6.II) и любое решение системы (6.7) притягивается к интегральному многообразию (6.II) по закону (6.49).

Пусть $n_1=0$. Тогда функция Грина уравнения (6.I7) имеет вид

$$G(\tau,\varphi,\varepsilon)=\begin{cases} 0, & t>\tau,\\ \Omega_{t_0}^{t}(\varphi,\varepsilon)\,\Omega_{\tau}^{0}(\varphi,\varepsilon), & t<\tau, \end{cases}$$

поэтому уравнение (6.48) примет вид

$$z_t=\int_{t_0}^{\infty}\Omega_{t_0}^{t}(\varphi,\varepsilon)\,\Omega_{\tau}^{0}(\varphi,\varepsilon)\left[d(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)y_\tau+g_2(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau,\ t>t_0.$$

Поскольку здесь отсутствует произвольный вектор ℓ, то многообразие начальных данных вектора z_t вырождается в точку

$$z_{t_0} = L(\varphi,\varepsilon)x_{t_0} + q(\varphi,\varepsilon).$$

Лемма 21 доказана.

4^0. На интегральном многообразии, представимом соотношением (6.11), система уравнений (6.7) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon), \\ \dot{y} = \left[B(\varphi,\varepsilon)+C(\varphi,\varepsilon)L(\varphi,\varepsilon)\right]y + g_1(\varphi,\varepsilon)+C(\varphi,\varepsilon)q(\varphi,\varepsilon). \end{cases} \tag{6.52}$$

Предположим, что существует невырожденная $k\times k$ -матрица $V(\varphi)\in C^0(R^m_{2\pi})$, $V^*(\varphi)\equiv V(\varphi)$, $V(\varphi_t(\varphi))\in C^1(R^1)$, в которой n_2 $(n_2\le k)$ собственных чисел положительные, а $k-n_2$ отрицательные, и такая, что матрица

$$\hat{V}(t,\varphi) = \frac{d}{dt}V(\varphi_t(\varphi)) + V(\varphi_t(\varphi))B(\varphi_t(\varphi),0) + B^*(\varphi_t(\varphi),0)V(\varphi_t(\varphi))$$

отрицательно определена: $\max\limits_{\langle\xi,\xi\rangle=1}\langle\hat{V}(t,\varepsilon)\xi,\xi\rangle \le -\beta$, где β положительная постоянная, не зависящая от $t\in R^1$ и $\varphi\in R^m$.

Тогда, как это следует из доказательства теоремы 4, система уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon),\ \dot{z} = B(\varphi,0)z + g_1(\varphi,\varepsilon)+C(\varphi,\varepsilon)q(\varphi,\varepsilon)$$

имеет функцию Грина $\tilde{G}_0(\tau,\varphi,\varepsilon)$ задачи об инвариантных торах. С учетом малости по норме матрицы L на основании теоремы 5 работы [44] можно утверждать, что существует функция Грина $\check{G}_0(\tau,\varphi,\varepsilon)$ задачи об инвариантных торах системы (6.52) для всех $\varepsilon\in\overline{J}^0$ и достаточно малого $\bar{\varepsilon}^0\in J^0$. Инвариантное многообразие системы (6.52) представимо равенством

$$v(\varphi,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty}\check{G}_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\left[g_1(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)+C(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)q(\varphi_\tau(\varphi),\varepsilon)\right]d\tau. \tag{6.53}$$

По аналогии с тем как это показано в § 5 можно доказать единственность $v(\varphi,\varepsilon)$ для каждого фиксированного $\varepsilon\in J^{(1)}$.

Если справедливо неравенство $\beta - r\alpha > 0$, где $\alpha \geq \max_{\|\xi\|=1,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \left|\left\langle \frac{\partial a(\varphi,\varepsilon)}{\partial \varphi}\xi,\xi\right\rangle\right|$, то согласно теореме I2 из работы [44] функция $\check{G}_0(\tau,\varphi,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по φ до порядка r включительно, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|D_\varphi^r \check{G}_0(\tau,\varphi,\varepsilon)\|\, d\tau \leq M \equiv const. \tag{6.54}$$

Из равенства (6.53) с учетом неравенства (6.54) получаем оценку $|U(\varphi,\varepsilon)|_r \leq M|g_1(\varphi,\varepsilon)+C(\varphi,\varepsilon)q(\varphi,\varepsilon)|_r \leq N\|f(\varphi,\varepsilon)\|$. Экспоненциальная устойчивость при $n_2=k$ и экспоненциальная дихотомичность при $n_2<k$ инвариантного многообразия (6.53) следует из работы [65].

Отметим, что при $\varepsilon=0$ система (6.7) обладает тором $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(\varphi,0) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, исходная система (6.I) имеет для всех $\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon}^0]$ единственное инвариантное многообразие $x=u(\varphi,\varepsilon)$, $u(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m_{4\pi})$,

$$u(\varphi,\varepsilon) = \Phi(\varphi)\begin{pmatrix} v(\varphi,\varepsilon) \\ L(\varphi,\varepsilon)v(\varphi,\varepsilon)+q(\varphi,\varepsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Из единственности $u(\varphi,\varepsilon)$ следует включение $u(\varphi,\varepsilon)\in C^r(R^m_{2\pi})$, т. е. что $u(\varphi,\varepsilon)$ – инвариантный тор системы (6.I).

Резюмируя выше изложенное, приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а I2. Предположим, что

I. Система (6.I) удовлетворяет условиям леммы I9, а система (6.7) – условиям леммы 20.

2. Существует невырожденная $k\times k$ -матрица $V(\varphi)\in C^0(R^m_{2\pi})$, $V^*(\varphi)=V(\varphi)$, $V(\varphi_t(\varphi))\in C^1(R^1)$, в которой n_2 $(n_2\leq k)$ собственных

чисел положительные и $k-n_2$ отрицательные, и такая что матрица $\hat{V}(t,\varphi)=\frac{d}{dt}V(\varphi_t(\varphi))+V(\varphi_t(\varphi),\varepsilon)B(\varphi_t(\varphi),0)+B^*(\varphi_t(\varphi),0)V(\varphi_t(\varphi))$ отрицательно определена: $\max_{\|\xi\|=1}\langle\hat{V}(t,\varphi)\xi,\xi\rangle\le-\beta$, где β – положительная постоянная, не зависящая от $t\in R^1$ и $\varphi\in R^m$.

3. Справедливо неравенство $\beta-r\alpha>0$, где

$$\alpha\ge\max_{\|\eta\|=1,\,\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}\left|\left\langle\frac{\partial a(\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\eta,\eta\right\rangle\right|.$$

Тогда существует $\bar{\varepsilon}^\circ>0$ такое, что для всех $\varepsilon\in[0,\bar{\varepsilon}^\circ]$ система уравнений (6.I) обладает инвариантным тором $x=u(\varphi,\varepsilon)$, удовлетворяющем оценке $|u(\varphi,\varepsilon)|_r\le N|f(\varphi,\varepsilon)|_r$, где постоянная $N>0$ не зависит от φ и ε, и являющимся экспоненциально устойчивым при $n_1+n_2=n$ и экспоненциально дихотомичным при $n_1+n_2<n$ (число n_1 определено леммой 20).

ГЛАВА III. КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ.

§ 7. Асимптотические разложения периодических решений сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.

Рассмотрим систему

$$P(t,\varepsilon)\dot{z} = F(z,t,\varepsilon), \tag{7.1}$$

где $P(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} P_1(t,\varepsilon) \\ \varepsilon P_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, P_1 и P_2 матрицы размерности $k\times n$ и $(n-k)\times n$ соответственно,

$$\operatorname{rank} P_1(t,0)=k,\ \operatorname{rank} P_2(t,0)=n-k,\ 1\le k=\mathrm{const}\le n-1, \tag{7.2}$$

$$\operatorname{rank} P(t,\varepsilon)=\operatorname{rank} P(t,0)\equiv p,\ \min(k,n-k)\le p=\mathrm{const}\le n-1,\ (t\in R^1,0<\varepsilon\le\varepsilon_0), \tag{7.3}$$

z и F n-векторы, матричные функции P и F периодические по t с периодом 2π и аналитические по своим переменным при $\|z\|\le a$, $\varepsilon\in J_0=(0,\varepsilon_0]$, $t\in R^1$.

Системе (7.1) соответствует вырожденная (укороченная) система

$$\begin{cases} P_1(t,0)\dot{x}^{(0)} = f_1(x^{(0)},t), \\ 0 = f_2(x^{(0)},t), \end{cases} \tag{7.4}$$

где $\operatorname{col}(f_1(y,t), f_2(y,t)) = f(y,t) = F(y,t,0)$.

Установим достаточные условия существования гладкого периодического решения системы (7.1) и построим асимптотическое разложение этого решения в предположении, что известно гладкое периодическое решение вырожденной системы (7.4).

При решении поставленной задачи воспользуемся схемой доказательства теоремы 45.1 монографии [13].

Обозначим $C(T)$ множество аналитических матриц произвольной размерности $B(t)$ периодических с периодом T, а $C(J_0,T)$

множество матриц $B(t,\varepsilon)$, аналитических по $\varepsilon\in J_0$ и принадлежащих $C(T)$ при любом фиксированном $\varepsilon\in J_0$.

Пусть $x^{(0)}(t)\in C(2\pi)$ - известное решение системы (7.4). Положив в (7.I) $z=x^{(0)}(t)+x$, получим

$$P(t,\varepsilon)\dot{x}=A(t,\varepsilon)x+g(x,t,\varepsilon)+F(x^{(0)}(t),t,\varepsilon)-P(t,\varepsilon)\dot{x}^{(0)}(t), \quad (7.5)$$

где

$$A(t,\varepsilon)=\left(\frac{\partial F(x^{(0)}(t),t,\varepsilon)}{\partial z}\right), g(0,t,\varepsilon)=\frac{\partial g(0,t,\varepsilon)}{\partial x_i}=0, i=\overline{1,n}. \quad (7.6)$$

с учетом равенства

$$F(x^{(0)}(t),t,\varepsilon)-P(t,\varepsilon)\dot{x}^{(0)}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}F^{(i)}(t)\varepsilon^i-\left[P(t,\varepsilon)-P(t,0)\right]\dot{x}^{(0)}(t)\equiv\varepsilon h(t,\varepsilon) \quad (7.7)$$

уравнение (7.5) примет вид

$$P(t,\varepsilon)\dot{x}=A(t,\varepsilon)x+g(x,t,\varepsilon)+\varepsilon h(t,\varepsilon). \quad (7.8)$$

Задача свелась к тому, чтобы найти решение $x(t,\varepsilon)\in C(J^{\circ},2\pi)$ уравнения (7.8) такое, что $\|x(t,\varepsilon)\|\to 0\ \forall t\in R^1$ при $\varepsilon\to 0$, а также построить его асимптотическое разложение.

Построим формальное решение уравнения (7.8) в виде степенного ряда с периодическими коэффициентами

$$x=\sum_{m=1}^{\infty}x^{(m)}(t)\,\varepsilon^m. \quad (7.9)$$

Подставив (7.9) в (7.8) и выполнив обычные формальные преобразования, получим рекуррентную последовательность уравнений

$$\begin{cases} P_1(t,0)\dot{x}^{(m)}=A_1(t,0)x^{(m)}+q_1^{(m)}(t), & (7.10)\\ 0=A_2(t,0)x^{(m)}+q_2^{(m)}(t), & (m=1,2,\ldots)\quad (7.11)\end{cases}$$

где $A(t,0)=\begin{pmatrix}A_1(t,0)\\A_2(t,0)\end{pmatrix}$, A_1 и A_2 – матрицы размерности $k\times n$ и $(n-k)\times n$ соответственно, $q_1^{(i)}$ и $q_2^{(i)}$ – k и $(n-k)$ -векторы, составленные из многочленов относительно элементов векторов $x^{(j)}$

и $\dot{x}^{(j)}$ $(j \le m-1)$ с коэффициентами из $C(2\pi)$. В частности, $col(q_1^{(1)}(t), q_2^{(1)}(t)) = h(t,0)$.

Установим условия, при выполнении которых системы (7.10)-(7.11) могут быть последовательно удовлетворены определяемыми функциями $x^{(m)}(t) \in C(2\pi)$. С этой целью приведем системы (7.10)-(7.11) к виду (4.10)-(4.11) и воспользуемся леммой для случая $\varepsilon = 0$. Совершив в (7.10)-(7.11) замену переменных по формуле

$$x^{(m)} = \left[P_1^*(t,0)\left[P_1(t,0)P_1^*(t,0)\right]^{-1}, \Phi_1(t)\right] v^{(m)} \equiv \Phi(t)\, v^{(m)}, \qquad (7.12)$$

где $n\times(n-k)$-матрица $\Phi_1(t) \in C(2\pi)$ удовлетворяет на R^1 равенствам $\operatorname{rank}\Phi_1(t) = n-k$, $P(t,0)\Phi_1(t) = 0$ и существует в силу леммы 2, получим

$$\begin{cases} (I_k, 0_{k,n-k})\dot{v}^{(m)} = B_1(t)\, v^{(m)} + q_1^{(m)}, & (7.13) \\ 0 = B_2(t)\, v^{(m)} + q_2^{(m)}, & (7.14) \end{cases}$$

где

$$B_1(t) = A_1(t,0)\Phi(t) - P_1(t,0)\dot{\Phi}(t),\ B_2(t) = A_2(t,0)\Phi(t). \qquad (7.15)$$

Введем обозначения, используя рекуррентные формулы:

$$B_1^{(i+1)} = V_1^{(i)}\left[M^{(i)}T^{(i)} - S^{(i)}\dot{T}^{(i)}\right],\ B_2^{(i+1)} = V_2^{(i)}M^{(i)}T^{(i)},\ B_{22}^{(i+1)} = V_2^{(i)}M^{(i)}W^{(i)},$$

$$S^{(i)} = (I_{k_i}, 0_{k_i, n_i-k_i})U^{(i)},\ M^{(i)} = B_1^{(i)}U^{(i)} - (I_{k_i}, 0_{k_i,n_i-k_i})\dot{U}^{(i)},$$

$$T^{(i)} = \left\{(V_1^{(i)}S^{(i)})^*\left[V_1^{(i)}S^{(i)}(V_1^{(i)}S^{(i)})^*\right]^{-1}, W^{(i)}\right\},\ q_\ell^{(m,i+1)} = V_\ell^{(i)} g^{(m,i)},\ \ell = 1,2; \qquad (7.16)$$

$$g^{(m,i)} = q_1^{(m,i)} - B_1^{(i)}(B_2^{(i)})^*\left[B_2^{(i)}(B_2^{(i)})^*\right]^{-1} q_2^{(i)} + (I_{k_i}, 0_{k_i,n_i-k_i})\times$$

$$\times \frac{d}{dt}\left\{(B_2^{(i)})^*\left[B_2^{(i)}(B_2^{(i)})^*\right]^{-1} q_2^{(m,i)}\right\},\ i = 0,1,\dots,s;$$

$B_\ell^{(0)}=B_\ell$, $q_\ell^{(m,0)}=q_\ell^{(m)}$, $\ell=1,2$;
столбцы матриц $U^{(i)}$, $(V_1^{(i)})^*$, $V_2^{(i)}$ и $W^{(i)}$ составляют базис пространств $\ker B_2^{(i)}$, $\ker(S^{(i)})^*$, $\ker V_1^{(i)}$ и $\ker(V_1^{(i)}S^{(i)})$ соответственно, матрицы $B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, U^{(i)}, S^{(i)}, M^{(i)}, V_1^{(i)}, V_2^{(i)}, W^{(i)}$ имеют размерности соответственно $k_i\times n_i$, $(n_i-k_i)\times n_i$, $n_i\times k_i$, $k_i\times k_i$, $k_i\times k_i$, $k_{i+1}\times n_{i+1}$, $(n_{i+1}-k_{i+1})\times n_{i+1}$, $(n_{i+1}-k_{i+1})\times n_{i+1}$ и принадлежат вместе с векторами $q^{(m,i)}$, $q_1^{(m,i)}$, $q_2^{(m,i)}$ размерности n_i, k_i, (n_i-k_i) $C(2\rho_i\pi)$, где $n_0=n$, $k_0=k$, $n_{i+1}=k_i$, $k_i\equiv\operatorname{rank}B_{22}^{(i)}(t)$, $\rho_{i+1}=\rho_i+4$, $\rho_0=2$.

Тогда из леммы I7 следует

Л е м м а 22. Предположим, что

I) $P_1(t,0)$, $A_\ell(t,0)\in C(2\pi)$, $\ell=1,2$;

2) для некоторого целого $s\geq 0$

$$\operatorname{rank}B_2^{(i)}(t)\equiv n_i-k_i,\ \operatorname{rank}B_{22}^{(i)}(t)\equiv const\quad \forall\, i=\overline{0,s},$$

где $B_2^{(i)}$, $B_{22}^{(i)}$, n_i, k_i определены формулами (7.I6);

3) выполняется одно из условий:

(а) $\operatorname{rank}B_{22}^{(s)}(t)\equiv n_s-k_s$ и единственное периодическое решение уравнения $\dot\xi=\left[S^{(s)}(t)\right]^{-1}M^{(s)}(t)\xi$ является нулевым;

(б) $\operatorname{rank}B^{(s)}(t)\equiv\begin{cases}n_s-2k_s, & n_s\leq 2k_s,\\ 0, & n_s>2k_s,\end{cases}$ и $\det M^{(s)}(t)\neq 0$.

Тогда каждая из систем (7.I0)-(7.II) обладает единственным решением $x^{(m)}(t)\in C(2\pi)$, представимым формулой

$$x^{(m)}(t)=\Phi(t)\Big\{\prod_{i=0}^{s}U^{(i)}(t)\,x_0^{(m,s)}(t)-\sum_{j=0}^{s}\prod_{i=0}^{j-1}U^{(i)}(t)\big(B_2^{(j)}(t)\big)^*\big[B_2^{(j)}(t)\big(B_2^{(j)}(t)\big)^*\big]^{-1}q_2^{(j,m)}(t)\Big\},$$

где при выполнении (а) $x_0^{(m,s)}(t)$ - единственное периодическое решение уравнения

$$\dot{x}^{(m,s)}=\left[S^{(s)}(t)\right]^{-1}\left[M^{(s)}(t)x^{(m,s)}+g^{(m,s)}(t)\right],$$

а при выполнении (б) $x_0^{(m,s)}(t)=-\left[M^{(s)}(t)\right]^{-1}g^{(m,s)}(t)$.

Таким образом, если матрицы $P_1(t,0), A_1(t,0), A_2(t,0)$ удовлетворяют с учетом (7.I5) условиям леммы I7, то уравнение (7.8) имеет формальное решение (7.9) с коэффициентами из $C(2\pi)$. Обозначим через $\hat{x}(t,\varepsilon)$ аналитическую вектор-функцию из $C(\mathcal{J}_1,2\pi)$, $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, которая при $\varepsilon\to+0$ представима в виде асимптотического ряда (7.9). Построение такой функции приведено, например, в § 9.2 [I3]. Тогда с учетом того, что ряд (7.9) формально удовлетворяет уравнению (7.8), получим

$$-P(t,\varepsilon)\frac{d\hat{x}}{dt}+A(t,\varepsilon)\hat{x}+g(\hat{x},t,\varepsilon)+\varepsilon h(t,\varepsilon)\equiv\alpha(t,\varepsilon)\sim 0\ (\varepsilon\to+0),\quad (7.17)$$

где символ $\sim$ указывает на асимптотическую связь. Положив в (7.8)

$$x=\hat{x}(t,\varepsilon)+u,\quad (7.18)$$

получим для u дифференциальную систему

$$P(t,\varepsilon)\dot{u}=A(t,\varepsilon)u+g(\hat{x}(t,\varepsilon)+u,t,\varepsilon)-g(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+\alpha(t,\varepsilon).\quad (7.19)$$

Покажем, что система (7.I9) имеет решение $u(t,\varepsilon)\in C(\mathcal{J}^\circ,2\pi)$, $0<\varepsilon^\circ\le\varepsilon_1$, которое при $\varepsilon\to 0$ асимптотически равно нулю. С этой целью используем метод последовательных приближений Пикара. Положим $u^{(0)}\equiv 0$ и определим $u^{(i)}(t,\varepsilon)$ $(i=1,2,\dots)$ рекуррентно как периодическое решение линейной системы относительно :

$$P(t,\varepsilon)\dot{u}^{(i)}=A(t,\varepsilon)u^{(i)}+g(\hat{x}(t,\varepsilon)+u^{(i-1)},t,\varepsilon)-g(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+\alpha(t,\varepsilon),\ i=1,2,\dots\quad (7.20)$$

Если матрицы $P(t,\varepsilon)$ и $A(t,0)$ удовлетворяют условиям теоремы 9, то существует такое $\varepsilon_2\in\mathcal{J}_1$, что для всех $\varepsilon\in\mathcal{J}_2$ система (7.20) обладает единственным периодическим решением $u^{(i)}(t,\varepsilon)\in$

$C(\mathcal{J}_2, 2\pi)$, удовлетворяющим неравенству

$$\|u^{(i)}(t,\varepsilon)\| \le K \max_t \|g(\hat{x}(t,\varepsilon)+u^{(i-1)}, t, \varepsilon) - g(\hat{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + \alpha(t,\varepsilon)\|, \quad (7.21)$$

где постоянная $K>0$ не зависит от ε. Из второго равенства (7.6), (7.17), (7.21) и определения асимптотического представления 0 степенным рядом $\alpha(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ следует, что на $R^1 \times \mathcal{J}_2$

$$\|u^{(1)} - u^{(0)}\| = \|u^{(1)}\| \le K_1 \varepsilon^s, \quad (7.22)$$

где положительное целое число s произвольно, а постоянная K_1 зависит только от s. Поскольку при выполнении условий теоремы 9 $u^{(i+1)}(t,\varepsilon) - u^{(i)}(t,\varepsilon)$ является периодическим решением, принадлежащим $C(\mathcal{J}^\circ, 2\pi)$ системы

$$P(t,\varepsilon)\left[\dot{u}^{(i+1)} - \dot{u}^{(i)}\right] = A(t,\varepsilon)\left[u^{(i+1)} - u^{(i)}\right] + g(\hat{x}(t,\varepsilon)+u^{(i)}, t, \varepsilon) - g(\hat{x}(t,\varepsilon)+u^{(i-1)}, t, \varepsilon),$$

то с учетом (7.21) получаем

$$\|u^{(i+1)} - u^{(i)}\| \le K \max_t \|g(\hat{x}+u^{(i)}, t, \varepsilon) - g(\hat{x}+u^{(i-1)}, t, \varepsilon)\|. \quad (7.23)$$

Оценим правую часть неравенства (7.23), опираясь на следующее утверждение

Л е м м а 23 (лемма I4.3 [I3]). Пусть $v(z)$ – некоторая вектор-функция компонент вектора z, голоморфная при $z=0$. Если $\det\left\{\frac{\partial v_j(0)}{\partial z_k}\right\} = 0$, то для любого $\beta > 0$ найдется действительное число $z_0(\beta)$ такое что $\|v(z^{(2)}) - v(z^{(1)})\| \le \beta \|z^{(2)} - z^{(1)}\|$, как только $\|z^{(j)}\| \le z_0(\beta)$, $j = 1, 2$.

Пусть вектор v из леммы 23 совпадает с $g(x,t,\varepsilon)$, а вектор z с вектором x. Положим также $\beta = \frac{1}{2}K$ и будем предполагать, что число $z_0(\beta)$ удовлетворяет условиям леммы 23. Выберем число $\varepsilon^\circ \le \varepsilon_2$ настолько малым, чтобы на $R^1 \times \mathcal{J}^\circ$ выполнялись неравенства

$$\|u^{(1)}\| \le \frac{z_0(\beta)}{4}, \quad \|\hat{x}\| \le \frac{z_0(\beta)}{2}. \tag{7.24}$$

Такой выбор возможен в силу неравенства (7.22) а также того что минимальный индекс суммирования в (7.9) равен I. Покажем, что для всех $i \ge 0$ и $(t,\varepsilon) \in R^1 \times J^\circ$

$$\|u^{(i+1)}\| \le 2 \max_t \|u^{(1)}\|, \tag{7.25}$$

$$\|u^{(i+1)} - u^{(i)}\| \le 2^{-r} \max_t \|u^{(1)}\|. \tag{7.26}$$

Пусть (7.25),(7.26) верны при всех $j < i$. Тогда с учетом (7.24) к правой части (7.23) применима лемма 23, что дает неравенство

$$\|u^{(i+1)} - u^{(i)}\| \le \frac{1}{2} \max_t \|u^{(i)} - u^{(i-1)}\|,$$

из которого по индукции следует (7.26). Докажем (7.25):

$$\|u^{(i+1)}\| \le \sum_{s=1}^{i+1} \|u^{(s)} - u^{(s-1)}\| \le \max_t \|u^{(i)}\| \sum_{s=1}^{i+1} 2^{1-s} \le 2 \max_t \|u^{(1)}\|.$$

Неравенство (7.25) влечет равномерную по t и $\varepsilon \in J^\circ$ сходимость к предельной функции $u(t,\varepsilon) \in C(J^\circ, 2\pi)$, удовлетворяющей в силу (7.25),(7.22) неравенству

$$\|u(t,\varphi)\| \le 2 \max_t \|u^{(1)}\| \le K_1 \varepsilon^s \quad ((t,\varepsilon) \in R^1 \times J^\circ),$$

а это означает, что $u(t,\varepsilon) \sim 0$ при $\varepsilon \to +0$. Поскольку равномерно сходится при $i \to \infty$ к $u(t,\varepsilon)$ вследствие равномерной сходимости $u^{(i)}$, то можно сделать вывод, что $u(t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (7.20).

Итогом § 7 является

Т е о р е м а I3. Пусть относительно системы (7.I) выполняются следующие условия.

I. Функции $P(t,\varepsilon)$ и $F(z,t,\varepsilon)$ аналитичны по всем переменным при $\|z\| \le a = const > 0$, $t \in R^1$, $\varepsilon \in J_0 = (0, \varepsilon_*]$ и периодичны по t с периодом 2π, причем P удовлетворяет (7.2),(7.3).

2. Вырожденная система (7.4), соответствующая (7.I), обла-

дает решением $x^{(0)}(t) \in C(2\pi)$.

3. Функции $P(t,0), A(t,0)$ и $P(t,\varepsilon), A(t,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям леммы I7 и теоремы 9 соответственно, где

$$A(t,\varepsilon)=\left(\frac{\partial F(x^{(0)}(t),t,\varepsilon)}{\partial z}\right).$$

Тогда существует число $\varepsilon^{\circ} \in \mathcal{J}_0$ такое, что для всех $\varepsilon \in \mathcal{J}^{\circ}$ система (7.I) имеет решение $z(t,\varepsilon) \in C(\mathcal{J}^{\circ}, 2\pi)$, которое при $\varepsilon \to +0$ допускает равномерное асимптотическое разложение

$$z(t,\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} x^{(i)}(t)\varepsilon^{i}.$$

§ 8. Сохранение инвариантного тора при сингулярном возмущении нелинейной системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}=a(\varphi,\varepsilon), \quad \left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\dot{x}=X(\varphi,x)+\varepsilon F(\varphi,x,\varepsilon), \qquad (8.I)$$

где φ, a — m -векторы, x, X и F — n -векторы, матричные функции a, A, P непрерывны на $R^m \times [0,\varepsilon_0]$ и при каждом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ принадлежат $C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geq 2$,

$$0<\operatorname{rank} A(\varphi) \equiv k < n, \quad \det\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right] \neq 0 \ \ \forall (\varphi,\varepsilon) \in R^m \times (0,\varepsilon_0], \qquad (8.2)$$

вектор-функции X и F определены для всех $\varphi \in R^m$, $x \in \Omega \subset E^n$, $0<\varepsilon \leq \varepsilon_0$, периодические по φ_i, $i=\overline{1,m}$, с периодом 2π, непрерывно дифференцируемы по φ и x до порядка r включительно.

Предположим, что вырожденная система

$$\dot{\varphi}=a(\varphi,0), \quad A(\varphi)\dot{x}^{(0)}=X(\varphi,x^{(0)}), \qquad (8.3)$$

соответствующая (8.I) при $\varepsilon=0$, имеет инвариантный тор $x^{(0)}=u^{(0)}(\varphi)$, $u^{(0)}(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$.

Нас интересуют условия существования инвариантных торов системы (8.I) а также их поведение при $\varepsilon=0$.

Совершив в системе (8.I) замену переменных по формуле

$$x=u^{(0)}(\varphi)+y, \tag{8.4}$$

получим

$$\dot{\varphi}=a(\varphi,\varepsilon),\ \left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\dot{y}=B(\varphi,y,\varepsilon)y+\varepsilon f(\varphi,\varepsilon), \tag{8.5}$$

где

$$B(\varphi,y,\varepsilon)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left[X(\varphi,u^{(0)}(\varphi)+\theta y)+\varepsilon F(\varphi,u^{(0)}(\varphi)+\theta y,\varepsilon)\right]d\theta,\ f(\varphi,\varepsilon)=P(\varphi,\varepsilon)\dot{u}^{(0)}(\varphi)+F(\varphi,u^{(0)}(\varphi),\varepsilon). \tag{8.6}$$

Т е о р е м а I4. Предположим, что относительно системы уравнений (8.I) выполняются следующие предположения.

I. Вырожденная система (8.3) имеет гладкий инвариантный тор $x^{(0)}=u^{(0)}(\varphi)$, $u^{(0)}(\varphi)\in C^r(R^m,2\pi)$, $r\geq 2$.

2. Функции a, A, P, X и F определены и непрерывны для всех $\varphi\in R^m$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]$, $\|x-u^{(0)}(\varphi)\|\leq d$, периодические по φ_i, $i=\overline{1,m}$, с периодом 2π, непрерывно дифференцируемы по φ и x до порядка $r\geq 2$ включительно и имеют непрерывную производную по ε.

3. Матричные функции $a(\varphi,\varepsilon)$, $A(\varphi)$, $P(\varphi,\varepsilon)$ и $B(\varphi,0)\equiv B(\varphi,0,0)$ удовлетворяют всем условиям теоремы I2.

Тогда можно указать число $\varepsilon^\circ\in(0,\varepsilon_*]$ такое, что система (8.I) для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon^\circ]$ имеет инвариантный тор $x=u^{(0)}(\varphi)+u(\varphi,\varepsilon)$, являющийся экспоненциально устойчивым при $n_1+n_2=n$ и экспоненциально дихотомичным при $n_1+n_2<n$, где функция $u(\varphi,\varepsilon)$ непрерывна на $R^m\times[0,\varepsilon^\circ]$ и такая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|u(\varphi,\varepsilon)|_{r-2}=0$, а целые числа n_1 и n_2 определены теоремой I2.

Доказательство теоремы I4 опирается на идеи работы [60].

Для отыскания тора $T(\varepsilon):\ y=u(\varphi,\varepsilon)$ системы (8.5) применим

итерационный метод: $T(\varepsilon)$ построим как предел последовательности многообразий $T_0(\varepsilon)=T(0), T_1(\varepsilon),\dots,T_i(\varepsilon),\dots$, каждое из которых является инвариантным тором

$$T_{i+1}(\varepsilon):\ x=u_{i+1}(\varphi,\varepsilon)\quad (i=0,1,2,\dots) \tag{8.6}$$

системы уравнений

$$\dot\varphi=a(\varphi,\varepsilon),\ \left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\dot y=b(\varphi,u_i(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)y+\varepsilon f(\varphi,\varepsilon). \tag{8.7}$$

Возможность такого построения гарантирует

Лемма 24. Пусть функции $a(\varphi,\varepsilon)$, $A(\varphi)$, $P(\varphi,\varepsilon)$, $b(\varphi,y,\varepsilon)$ и $u_i(\varphi,\varepsilon)$ являются непрерывными по совокупности переменных при $\|y\|\le d$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\varphi\in R^m$, $i=0,1,2,\dots$.

Тогда если последовательность (8.6) равномерно сходится для любого $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\lim\limits_{i\to\infty} u^{(i)}(\varphi,\varepsilon)=u(\varphi,\varepsilon)$, то функция $u(\varphi,\varepsilon)$ определяет инвариантный тор $T(\varepsilon)$: $y=u(\varphi,\varepsilon)$ системы уравнений (8.5).

Доказательство леммы 24 с учетом второго неравенства (8.2) дословно повторяет доказательство леммы I из работы [60].

Воспользуемся теоремой I2 для построения последовательности торов (8.6).

Определим класс $C^r(\varphi,y)$ матричных функций $v(\varphi,y)$ определенных на некотором компакте Π, принадлежащих при каждом фиксированном y $C^r(R^m,2\pi)$ и имеющих на Π непрерывные частные производные до порядка r включительно. Введем в $C^r(\varphi,y)$ норму, например, таким образом. Пусть $D^\rho v(\varphi,y)$ – любая производная функции $v(\varphi,y)$ порядка ρ,

$$|v(\varphi,y)|_0=\max_{\Pi}\|v(\varphi,y)\|.$$

Тогда положим $|v(\varphi,y)|_r=\max\limits_{0\le\rho\le r}|D^\rho v(\varphi,y)|_0$, где $\max$ берется по всем производным указанного порядка.

Положим $B(\varphi,0)=b(\varphi,0,0)$, $B_1(\varphi,y,\varepsilon)=b(\varphi,y,\varepsilon)-b(\varphi,0,0)$. Тогда в соответствии с условиями теоремы I4 функции $b(\varphi,y,\varepsilon)$, $f(\varphi)$ принадлежат $C^r(\varphi,y)$ при $\varphi\in R^m$, $\|y\|\le d$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$. Поэтому для всех $\|y\|\le d$ и $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$

$$|B_1(\varphi,y,\varepsilon)|_r \le N_1\|y\| + N_2\varepsilon, \tag{8.8}$$

где $N_1=\max\limits_{\varphi\in R^m}\left|\int\limits_0^1 \frac{\partial b(\varphi,\theta y,\varepsilon)}{\partial y}d\theta\right|_{r-1}$,

$$N_2=\max_{\varphi\in R^m}\left|\int_0^1 \frac{\partial b(\varphi,0,\theta\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\theta - b(\varphi,0,0)\right|_r .$$

Покажем по индукции, что последовательность систем (8.7) определяет последовательность инвариантных торов (8.6), каждый из которых принадлежит $C^{r-1}(R^m_{2\pi})$ удовлетворяет неравенству

$$|u_i(\varphi,\varepsilon)|_{r-1}\le N_3\varepsilon,\ N_3\equiv const>0, \tag{8.9}$$

и является экспоненциально устойчивым при $n_1+n_2=n$ или экспоненциально дихотомичным при $n_1+n_2<n$. Так как $u_0=0$, то это утверждение имеет место при $i=0$. Покажем, что тор $T_{i+1}(\varepsilon)$: $y=u_{s+1}(\varphi,\varepsilon)$ существует, обладает указанной выше (условной) устойчивостью и удовлетворяет неравенству (8.9). Рассмотрим для этого систему (8.7) при $i=s$, записав ее в виде

$$\dot\varphi=a(\varphi,\varepsilon),\ \left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\dot y=\left[B(\varphi,0)+B_1(\varphi,u_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]y+\varepsilon f(\varphi,\varepsilon). \tag{8.10}$$

Поскольку функция B_1 удовлетворяет неравенству (8.8), а $u_s(\varphi,\varepsilon)$ неравенству (8.9), то

$$|B_1(\varphi,u_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)|_r \le (N_1N_3+N_2\varepsilon)\varepsilon . \tag{8.11}$$

Выберем $\varepsilon_1>0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$N\varepsilon_1\le d,\ \varepsilon_1\le\bar\varepsilon^*, \tag{8.12}$$

где число $\bar\varepsilon^*$ фигурирует в теореме I2.

Тогда относительно системы (8.10) для всех $\varepsilon \le \varepsilon_1$ выполняются все условия теоремы 12 с $r=r-1$, согласно которой она обладает инвариантным тором $T_{s+1}(\varepsilon): y = u_{s+1}(\varphi,\varepsilon)$, $u_{s+1} \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, являющимся экспоненциально устойчивым при $n_1+n_2=n$ или экспоненциально дихотомичным при $n_1+n_2<n$ и удовлетворяющим неравенству

$$|u_{s+1}(\varphi,\varepsilon)|_{r-1} \le \varepsilon N |f(\varphi,\varepsilon)|_{r-1} \le \varepsilon N_3 , \qquad (8.13)$$

где $N_3 \ge N \max\limits_{\varphi \in R^m, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]} |f(\varphi,\varepsilon)|_{r-1}$.

Докажем сходимость последовательности торов (8.6) по норме пространства $C^{r-2}(\varphi)$ при $r \ge 2$. Поскольку $u_{s+1}(\varphi,\varepsilon) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi) \subset C^1(R^m, 2\pi)$, то функция $u_{s+1}(\varphi,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\frac{\partial u_{s+1}}{\partial \varphi}\,a(\varphi,\varepsilon) = \left[B(\varphi,0)+B_1(\varphi,u_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]u_{s+1} + \varepsilon f(\varphi,\varepsilon).$$

Нетрудно проверить, что функция $v_{s+1}(\varphi,\varepsilon) = u_{s+1}(\varphi,\varepsilon) - u_s(\varphi,\varepsilon)$ является периодическим по φ с периодом 2π решением уравнения

$$\left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\frac{\partial v_{s+1}}{\partial \varphi}\,a(\varphi,\varepsilon) = \left[B(\varphi,0)+B_1(\varphi,u_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]v_{s+1} + g_s(\varphi,\varepsilon),$$

где

$$g_s = \left[B_1(\varphi,u_{s-1}(\varphi,\varepsilon),\varepsilon) - B_1(\varphi,u_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]u_s(\varphi,\varepsilon), \qquad (8.14)$$

и поэтому определяет инвариантный тор $x = v_{s+1}(\varphi,\varepsilon)$ системы

$$\dot{\varphi} = a(\varphi,\varepsilon),\quad \left[A(\varphi)+\varepsilon P(\varphi,\varepsilon)\right]\dot{y} = \left[B(\varphi,0)+B_1(\varphi,u_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)\right]y + g_s(\varphi,\varepsilon). \qquad (8.15)$$

С учетом неравенств (8.8) и (8.12) система (8.15) имеет, согласно теореме 12, инвариантный тор $y = v_{s+1}(\varphi,\varepsilon)$, $v_{s+1}(\varphi,\varepsilon) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, удовлетворяющий для всех $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1]$ оценке $|v_{s+1}(\varphi,\varepsilon)|_0 \le N|g_s(\varphi,\varepsilon)|_0$. Продолжая эту оценку с использованием (8.9), (8.11) и (8.14), получаем

$|v_{s+1}(\varphi,\varepsilon)|_0 \le N|B_1(\varphi,u_s(\varphi,\varepsilon),\varepsilon)|_1$, $|u_s(\varphi,\varepsilon)|_0 |v_s(\varphi,\varepsilon)|_0 \le \lambda |v_s(\varphi,\varepsilon)|_0$ (8.16)

для всех $\varepsilon \le \varepsilon^\circ$, где $0 < \varepsilon^\circ \le \varepsilon_1$ выбрано настолько малым, чтобы $\lambda = N(N_1N_3 + N_2\varepsilon^\circ)\varepsilon^\circ < 1$. С учетом (8.16) и (8.9) приходим к неравенству $|v_{s+1}(\varphi,\varepsilon)|_0 \le \lambda^{s-1}|u_1(\varphi,\varepsilon)|_0 \le \lambda^{s-1}N_3\varepsilon$ $(\varepsilon \le \varepsilon^\circ)$, доказывающему сходимость последовательности инвариантных торов (8.6) в пространстве $C^\circ(R^m, 2\pi)$ и непрерывность предельной функции по ε в точке $\varepsilon = 0$.

Положим

$$\lim_{i \to \infty} u_i(\varphi,\varepsilon) = u(\varphi,\varepsilon) \qquad (8.17)$$

и покажем, что $u(\varphi,\varepsilon) \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$. Из оценки (8.13) следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности функций $\{D^\rho u_i(\varphi,\varepsilon)\}$, составленных из частных производных по φ порядка $\rho \le r-1$ от функций $u_i(\varphi,\varepsilon)$. В силу леммы Арцела любая бесконечная подпоследовательность последовательности $\{D^\rho u_i(\varphi,\varepsilon)\}$ равномерно сходится к некоторой функции $\partial^\rho u(\varphi,\varepsilon)$. Поэтому с учетом предельного соотношения (8.17) заключаем, что $u(\varphi,\varepsilon)$ имеет по φ непрерывные производные порядка $\rho \le r-1$, причем $\partial^\rho u(\varphi,\varepsilon) \equiv D^\rho u(\varphi,\varepsilon)$.

Теорема 14 доказана.

§ 9. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.

Ниже для системы

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon^{1+\alpha} Q(x,t), \tag{9.1}$$

где $X, Q \in R^{n+m}$, X и Q определены для всех $t \in R^1$, x из области $\mathcal{D} \subset R^{n+m}$, $Q(x,t+T) \equiv Q(x,t)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha = const > 0$, исследуются условия существования периодических решений в окрестности тороидального многообразия решений вырожденной системы

$$X(x) = 0, \tag{9.2}$$

соответствующей системе (9.I).

Предположим, что система (9.2) имеет решение $x = f(\varphi)$, где $f(\varphi) \in C^{2,5}(R^m, 2\pi)$ (вторые частные производные удовлетворяют условию Липшица), принадлежит вместе со своей малой окрестностью области $\mathcal{D}$ и

$$\operatorname{rank} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \equiv m \qquad \forall \varphi \in R^m; \; n > m. \tag{9.3}$$

Задача состоит в изучении условий, гарантирующих существование решения $x(t,\varepsilon)$ системы (9.I), периодического по t с периодом T и равномерно по t сходящегося к $f(\varphi)$ при $\varepsilon \to 0$.

При решении этой задачи исходная система (9.I) приводится к системе специального вида, для которой при определенных условиях доказывается существование инвариантного тороидального многообразия, а затем обосновывается возможность делать вывод о существовании замкнутых траекторий на этом многообразии, исходя из первого приближения к этому многообразию.

I°. Запишем уравнение (9.I) в окрестности поверхности $\Sigma: x = f(\varphi)$, предположив, что Q и вторые частные производ-

ные функции X удовлетворяют по x условию Липшица. С этой целью в (9.1) произведем замену переменных по формуле

$$x = f(\varphi) + V(\varphi)h, \tag{9.4}$$

где $(n+m)\times n$ -матрица $V(\varphi)$ дополняет до невырожденной на R^m матрицу $\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$, принадлежит $C^{2,5}(R^m, 2\pi)$ и существует в силу леммы 5, $h \in R^n$. В малой окрестности Σ $(\|h\| \le \rho\varepsilon^{\alpha})$ в результате замены (9.4) получим систему

$$\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} = \Phi_1(\varphi,h)W(\varphi,h,t,\varepsilon),\ \varepsilon\frac{dh}{dt} = \Phi_2(\varphi,h)W(\varphi,h,t,\varepsilon), \tag{9.5}$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi}h, V\right]^{-1},\ W = X[f(\varphi)+V(\varphi)h] + \varepsilon^{1+\alpha}Q[f(\varphi)+V(\varphi)h,t], \tag{9.6}$$

Φ_1, Φ_2 - соответственно $m\times(n+m)$ и $n\times(n+m)$ -матрицы. В системе (9.5) уравнение поверхности Σ имеет вид $h=0$, при этом нормальные переменные h характеризуют удаление решения от Σ. Преобразуем эту систему к виду

$$\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} = A_1(\varphi,h)h + \varepsilon^{1+\alpha}q_1(\varphi,h,t),\ \varepsilon\frac{dh}{dt} = A_2(\varphi,h)h + \varepsilon^{1+\alpha}q_2(\varphi,h,t), \tag{9.7}$$

где

$$A_i(\varphi,h) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta h}\{\Phi_i(\varphi,\theta h)X[f(\varphi)+V(\varphi)\theta h]\}d\theta,\ q_i(\varphi,h,t) = \Phi_i(\varphi,h)Q[f(\varphi)+V(\varphi)h,t],\ i=1,2; \tag{9.8}$$

вместо h введем переменные y по формуле

$$h = \varepsilon y \tag{9.9}$$

и перейдем к быстрому времени $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. В итоге придем к системе

$$\dot\varphi = \varepsilon A(\varphi,y,\varepsilon\tau,\varepsilon),\ \dot y = P(\varphi,\varepsilon y)y + H(\varphi,y,\varepsilon\tau,\varepsilon). \tag{9.10}$$

Здесь

$$A = A_1(\varphi,\varepsilon y)y + \varepsilon^{\alpha}q_1(\varphi,\varepsilon y,\varepsilon\tau),\ P = A_2 = P(\varphi,0) + P_1(\varphi,\varepsilon y),\ H = \varepsilon^{\alpha}q_2(\varphi,\varepsilon y,\varepsilon\tau), \tag{9.11}$$

матричные функции A, P, H определены и непрерывны для всех $\varphi \in R^m$, $\|y\| \le \rho$, $\tau \in R^1$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, периодические по φ_i, $i = \overline{1,m}$, с периодом 2π и по $\varepsilon\tau$ с периодом T а также удовлетворяют в силу формул (9.II), (9.8), (9.6) и предположений относительно функций X и Q условиям Липшица по y и φ; точкой обозначено дифференцирование по τ. Поэтому с учетом (9.II) справедливы неравенства

$$\max\{\|\varepsilon A(\varphi,0,\varepsilon\tau,\varepsilon)\|, \|H(\varphi,0,\varepsilon\tau,\varepsilon)\|\} \le a(\varepsilon), \|P(\varphi,0)-P(\bar\varphi,0)\| \le N\|\varphi-\bar\varphi\|, \quad (9.12)$$

$$\max\{\varepsilon\|A(\varphi,y,\varepsilon\tau,\varepsilon)-A(\bar\varphi,\bar y,\varepsilon\tau,\varepsilon)\|, \|P_1(\varphi,\varepsilon y)-P_1(\bar\varphi,\varepsilon\bar y)\|,$$
$$\|H(\varphi,y,\varepsilon\tau,\varepsilon)-H(\bar\varphi,\bar y,\varepsilon\tau,\varepsilon)\|\} \le b(\varepsilon)\left(\|\varphi-\bar\varphi\|+\|y-\bar y\|\right), \quad (9.13)$$

где постоянная $N > 0$ не зависит от $\varphi \in R^m$, а $\max\{a(\varepsilon), b(\varepsilon)\} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Будем говорить, что матричная функция $F(\varphi, \omega, \varepsilon)$, определенная и непрерывная в области $R^m \times R^1 \times (0, \varepsilon_0]$, периодическая по φ и ω с периодами 2π и T соответственно, принадлежит классу $\hat C^{0,5}(D, \Delta, T)$, если в этой области выполняются неравенства

$$\|F(\varphi,\omega,\varepsilon)\| \le D(\varepsilon), \|F(\varphi,\omega,\varepsilon)-F(\bar\varphi,\omega,\varepsilon)\| \le \Delta(\varepsilon)\|\varphi-\bar\varphi\|. \quad (9.14)$$

Если $F \in \hat C^{0,5}(D, \Delta, T)$ и $D \le \rho$, $\max\{D(\varepsilon), \Delta(\varepsilon)\} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то обозначим это включением $F \in C^{0,5}(D, \Delta, T)$.

2^0. Относительно системы уравнений (9.I0) имеет место

Лемма 25. Пусть

I) Правая часть системы (9.I0) определена и непрерывна для всех $\|y\| \le \rho$, $\varphi \in R^m$, $\tau \in R^1$, периодична по φ_i, $i = \overline{1,m}$ и $\varepsilon\tau$ с периодами 2π и T соответственно, а также удовлетворяет неравенствам (9.I2), (9.I3).

2) Существует невырожденная $n \times n$ -матрица $S(\varphi) \in C^0(R^m, 2\pi)$, $S^*(\varphi) \equiv S(\varphi)$, $S(\varphi_i(\varphi)) \in C^1(R^1)$, в которой n_1 собственных чисел

положительные, а $n-n_1$ отрицательные, и такая, что матрица

$$\tilde{S}(\tau,\varphi)=\frac{d}{d\tau}S(\tau,\varphi)+S(\varphi_\tau(\varphi))P(\varphi_\tau(\varphi),0)+P^*(\varphi_\tau(\varphi),0)S(\varphi_\tau(\varphi))$$

отрицательно определена: $\max\limits_{\|\xi\|=1}\langle\tilde{S}(\tau,\varphi)\xi,\xi\rangle\le-\gamma$, где γ - положительная постоянная, не зависящая от $\tau\in R^1$ и $\varphi\in R^m$, $\varphi_\tau(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi)=\varphi$, — решение первого уравнения системы (9.10) при $y=F(\varphi,v,\varepsilon)$, F - произвольная функция из $C^{0,5}(D,\Delta,T)$.

Тогда можно указать такое $\varepsilon^\circ>0$, что для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon^\circ]$ система (9.10) имеет инвариантное многообразие $y=F^*(\varphi,\varepsilon\tau,\varepsilon)\in C^{0,5}(D,\Delta,T)$ являющееся экспоненциально устойчивым при $n_1=n$ и экспоненциально дихотомичным при $n_1<n$.

Доказательство. Перейдем от системы (9.10) к расширенной системе

$$\dot\varphi=\varepsilon A(\varphi,y,\varepsilon v,\varepsilon),\ \dot v=\frac{T}{2\pi\varepsilon},\ \dot y=P(\varphi,\varepsilon y)y+H(\varphi,y,\varepsilon v,\varepsilon)\qquad(9.15)$$

и покажем, что эта система уравнений при $y=F(\varphi,v,\varepsilon)$, где F - произвольная функция из $C^{0,5}(D,\Delta,T)$ имеет функцию Грина $G_0^F(s,\varphi,v)$ задачи об инвариантных торах, удовлетворяющую неравенству

$$\|G_0^F(s,\varphi,v)\|\le K\exp\{-\gamma|s|\}\quad(s,v\in R^1,\varphi\in R^m,0<\varepsilon\le\varepsilon_0)\qquad(9.16)$$

с положительными постоянными K и γ, не зависящими от φ,v,F и ε.

Действительно, система уравнений

$$\dot\varphi=\varepsilon A(\varphi,F(\varphi,v,\varepsilon),\varepsilon v,\varepsilon),\ \dot v=\frac{T}{2\pi\varepsilon},\ \dot z=P(\varphi,0)z$$

для каждого фиксированного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, как это следует из условия 2) и доказательства теоремы 4, обладает функцией Грина удовлетворяющей оценке

$$\|G_0^F(s,\varphi,v)\|\le K_1\exp\{-\gamma_1|s|\}\quad(s,v\in R^1,\varphi\in R^m,0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$$

с положительными постоянными K_1 и γ_1, не зависящими от φ, υ, F и ε. Из второй формулы (9.11) и неравенства (9.13) следует, что $P(\varphi, \varepsilon F(\varphi,\upsilon,\varepsilon)) = P(\varphi,0) + P_1(\varphi, F(\varphi,\upsilon,\varepsilon))$, где $\|P_1(\varphi,F)\| \le D(\varepsilon)b(\varepsilon)$. Поэтому на основании теоремы 5 [44] можно утверждать, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ система уравнений (9.15) при $y = F(\varphi,\upsilon,\varepsilon)$ имеет функцию Грина $G_0^F(s,\varphi,\varepsilon)$, удовлетворяющую оценке (9.16), при этом постоянные K и γ находятся из соотношений

$$0 < \gamma < \gamma_1 - K_1\|P_1(\varphi,F)\|, \quad 0 < (\gamma-\gamma_1)K(\gamma-\gamma_1-K_1\|P_1(\varphi,F)\|)^{-1} \le K.$$

Таким образом, задача свелась к выяснению условий, гарантирующих существование единственного решения уравнения

$$F(\varphi,\upsilon,\varepsilon) = S_\varphi F \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G_0^F(s,\varphi,\upsilon) H(\varphi_s(\varphi), F(\varphi_s(\varphi),\upsilon_s(\upsilon),\varepsilon), \varepsilon\upsilon_s(\upsilon),\varepsilon)\,ds, \quad (9.17)$$

где $\varphi_s(\varphi), \upsilon_s(\upsilon)$ – решения первых двух уравнений (9.15) при $y = F(\varphi,\upsilon,\varepsilon)$, принимающие при $s=0$ значения $\varphi(\upsilon)$ и υ соответственно.

Установим вспомогательные оценки.

Нетрудно показать с учетом (9.11), (9.12) и (9.15) справедливость для всех $\varphi \in R^m$, $F, \bar F \in C^{0,5}(D,\Delta,T)$, $\upsilon \in R^1$ неравенств

$$\max\{\|\varepsilon A(\varphi,F(\varphi))\|, \|P_1(\varphi,F(\varphi))\|, \|H(\varphi,F(\varphi))\| \le b(\varepsilon)D + a(\varepsilon),$$
$$\max\{\|\varepsilon A(\varphi,F(\varphi)) - \varepsilon A(\bar\varphi,\bar F(\bar\varphi))\|, \|P_1(\varphi,F(\varphi)) - P_1(\bar\varphi,\bar F(\bar\varphi))\|, \quad (9.18)$$
$$\|H(\varphi,F(\varphi)) - H(\bar\varphi,\bar F(\bar\varphi))\|\} \le b(\varepsilon)\left[(1+\Delta)\|\varphi-\bar\varphi\| + \|F-\bar F\|\right],$$

где зависимость правых частей системы (9.15) не указана для упрощения записи. Рассмотрим равенство

$$\frac{d}{ds}(\varphi_s - \bar\varphi_s) = \varepsilon\left[A(\varphi,F(\varphi,\upsilon,\varepsilon),\upsilon,\varepsilon) - A(\bar\varphi,\bar F(\bar\varphi,\upsilon,\varepsilon),\upsilon,\varepsilon)\right],$$

где $\bar\varphi_s, \bar\varphi_0 = \bar\varphi(\upsilon)$, – решение первого уравнения системы (9.14) при

$y=\bar{F}(\bar{\varphi},\upsilon,\varepsilon)$, $\bar{F}\in C^{0,5}(D,\Delta,T)$. Проинтегрировав его и оценив, используя (9.18), получим неравенство

$$\|\varphi_s-\bar{\varphi}_s\|\le\|\varphi-\bar{\varphi}\|+6\|F-\bar{F}\|s+\int_0^s 6(1+\Delta)\|\varphi_\tau-\bar{\varphi}_\tau\|d\tau,$$

которое можно продолжить в силу леммы I [36, с. 180]:

$$\|\varphi_s-\bar{\varphi}_s\|\le\left(\|\varphi-\bar{\varphi}\|+\frac{\|F-\bar{F}\|}{1+\Delta}\right)\exp\{6(1+\Delta)s\}. \qquad (9.19)$$

Оценим $\|G_0^F(s,\varphi,\upsilon)-G_0^{\bar{F}}(s,\bar{\varphi},\upsilon)\|$. Пусть $G_\tau^F(s,\varphi,\upsilon)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях, порождающая при $\tau=0$ функцию $G_0^F(s,\varphi,\upsilon)$. Для разности $W_\tau=G_\tau^F(s,\varphi,\upsilon)-G_\tau^{\bar{F}}(s,\bar{\varphi},\upsilon)$ легко получить уравнение

$$\dot{W}_\tau=P(\varphi_\tau,\varepsilon F(\varphi_\tau,\upsilon_\tau,\varepsilon))W_\tau+\left[P(\varphi_\tau,\varepsilon F(\varphi_\tau,\upsilon_\tau,\varepsilon))-P(\bar{\varphi}_\tau,\varepsilon\bar{F}(\bar{\varphi}_\tau,\upsilon_\tau,\varepsilon))\right]G_\tau^{\bar{F}}(s,\bar{\varphi},\upsilon),$$

из которого с учетом ограниченности W_τ на R^1 следует, что

$$W_\tau=\int_{-\infty}^{\infty}G_\tau^F(t,\varphi,\upsilon)\left[P(\varphi_t,\varepsilon F(\varphi_t,\upsilon_t,t))-P(\bar{\varphi}_t,\varepsilon\bar{F}(\bar{\varphi}_t,\upsilon_t,\varepsilon))\right]G_t^{\bar{F}}(s,\bar{\varphi},\upsilon)dt.$$

Так как в силу (9.10),(9.17)

$$\|P(\varphi_t,\varepsilon F(\varphi_t,\upsilon_t,\varepsilon))-P(\bar{\varphi}_t,\varepsilon\bar{F}(\bar{\varphi}_t,\upsilon_t,\varepsilon))\|\le(N+6+6\Delta)\|\varphi_t-\bar{\varphi}_t\|+6\|F-\bar{F}\|,$$

то с учетом (9.12),(9.14),(9.16),(9.19) из последнего равенства получим

$$\|G_0^F(s,\varphi,\upsilon)-G_0^{\bar{F}}(s,\bar{\varphi},\upsilon)\|\le\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0^F(t,\varphi,\upsilon)\|\,\|P(\varphi_t,\varepsilon F(\varphi_t,\upsilon_t,\varepsilon))-P(\bar{\varphi}_t,\varepsilon\bar{F}(\bar{\varphi}_t,\upsilon_t,\varepsilon))\|\cdot$$

$$\cdot\|G_t^{\bar{F}}(s,\bar{\varphi},\upsilon)\|dt\le\int_{-\infty}^{\infty}K^2\exp\{-\gamma(|t|+|t-s|)\}\left[(N+6+6\Delta)\|\varphi_t-\bar{\varphi}_t\|+6\|F-\bar{F}\|\right]dt\le$$

$$\le K^2\left[(N+6+6\Delta)\left(\|\varphi-\bar{\varphi}\|+\frac{\|F-\bar{F}\|}{1+\Delta}\right)+6\|F-\bar{F}\|\right]\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\gamma(|t|+|t-s|+6(1+\Delta)t\}dt.$$

Обозначим

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t,s)\,dt=\int_{-\infty}^{0}\psi(t,s)\,dt+\int_{0}^{s}\psi(t,s)\,dt+\int_{s}^{\infty}\psi(t,s)\,dt=J_1+J_2+J_3,$$

где $\psi(t,s)=\exp\{-\gamma(|t|+|t-s|+\beta(1+\Delta)t\}$. Рассмотрим случай, когда $s>0$ и предположим, что выполняется неравенство

$$\beta(1+\Delta)\le\frac{\gamma}{2}. \tag{9.20}$$

Тогда

$$J_1=\exp\{-\gamma s\}\int_{-\infty}^{0}\exp\{\left[2\gamma+\beta(1+\Delta)\right]t\}\,dt=\left[2\gamma+\beta(1+\Delta)\right]^{-1}\exp\{-\gamma s\};$$

$$J_2=\exp\{-\gamma s\}\int_{0}^{s}\exp\{\beta(1+\Delta)t\}\,dt\le\frac{2}{\gamma}\exp\{-\frac{\gamma}{2}s\};$$

$$J_3=\exp\{+\gamma s\}\int_{s}^{\infty}\exp\{-(2\gamma-\beta-\beta\Delta)t\}\,dt=\left[2\gamma-\beta(1+\Delta)\right]^{-1}\exp\{-(\gamma-\beta-\beta\Delta)s\}\le$$

$$\le\frac{2}{3\gamma}\exp\{-\frac{\gamma}{2}s\}.$$

Поэтому $J\le 4\gamma^{-1}\exp\{-\frac{\gamma}{2}s\}$. Эту же оценку можно получить и в случае $s<0$. Таким образом, окончательно получаем

$$\|G_0^F(s,\varphi,v)-G_0^{\bar F}(s,\bar\varphi,v)\|\le\frac{4K^2}{\gamma}\left\{\left[N+\beta(1+\Delta)\right]\|\varphi-\bar\varphi\|+\frac{N+2\beta(1+\Delta)}{1+\Delta}\|F-\bar F\|\exp\{-\frac{\gamma}{2}|s|\}\right\}. \tag{9.21}$$

Используя неравенства (9.18)-(9.21), оценим:

$$|S_\varphi F|\le\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0^F(s,\varphi,v)\|\,\|H(\varphi_s,F(\varphi_s,v_s,\varepsilon),v_s,\varepsilon)\|\,ds\le 2K\gamma^{-1}(\beta D+a);$$

$$\|S_\varphi F-S_{\bar\varphi}\bar F\|\le\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0^F(s,\varphi,v)H(\varphi_s,F(\varphi_s,v_s,\varepsilon),v_s,\varepsilon)-G_0^{\bar F}(s,\bar\varphi,v)H(\bar\varphi_s,\bar F(\bar\varphi_s,v_s,\varepsilon),v_s,\varepsilon)\|\,ds\le$$

$$\le\|H(\varphi_s,F(\varphi_s,v_s,\varepsilon),v_s,\varepsilon)\|\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0^F(s,\varphi,v)-G_0^{\bar F}(s,\bar\varphi,v)\|\,ds+\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0^{\bar F}(s,\bar\varphi,v)\|\,\|H(\varphi_s,F(\varphi_s,v_s,\varepsilon),v_s,\varepsilon)-$$

$$-H(\bar\varphi_s,\bar F(\bar\varphi_s,v_s,\varepsilon),v_s,\varepsilon)\|\,ds\le a(4K\gamma^{-1})^2\left\{\left[N+\beta(1+\Delta)\right]\|\varphi-\bar\varphi\|+\right.$$

$$\left.+\frac{N+2\beta(1+\Delta)}{1+\Delta}\|F-\bar F\|\right\}+\beta\int_{-\infty}^{\infty}K\exp\{-\gamma|s|\}\left[(1+\Delta)\|\varphi_s-\bar\varphi_s\|+\|F-\bar F\|\right]ds\le$$

$$\leq 4K^2\gamma^{-2}\{4Ka[N+B(1+\Delta)]+B\gamma(1+\Delta)\}\|\varphi-\bar{\varphi}\|+2K\gamma^{-2}\left[8Ka\left(\frac{N}{1+\Delta}+2B\right)+3\gamma B\right]\|F-\bar{F}\|.$$

Требуя выполнения неравенств

$$2K\gamma^{-1}(BD+a)<D,\ 4K\gamma^{-2}\{4Ka[N+B(1+\Delta)]+B\gamma(1+\Delta)\}<\Delta,$$

$$2K\gamma^{-2}\left[8Ka\left(\frac{N}{1+\Delta}+2B\right)+3\gamma B\right]=\theta<1 \qquad (9.22)$$

и (9.20), тем самым добиваемся того, чтобы оператор S_φ отображал класс функций $C^{0,5}(D,\Delta,T)$ на себя и был оператором сжатия, что обеспечивает существование единственной неподвижной точки $F^*(\varphi,v,\varepsilon)$ этого оператора, которую можно найти методом последовательных приближений по формулам

$$F^*=\lim_{k\to\infty}F_k\ ,\ F_{k+1}=S_\varphi F_\varphi\quad (k=0,1,2,\dots). \qquad (9.23)$$

Выберем $\varepsilon^0>0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства (9.20),(9.22).

Доказательство того, что $y=F^*(\varphi,v,\varepsilon)$ — интегральное многообразие системы (9.10) проводится обычным путем. Свойства устойчивости этого многообразия следуют из теоремы I работы [65].

Отметим, что в силу последнего равенства (9.1$^\tau$) и (9.17) имеет место представление

$$F^*(\varphi,v,\varepsilon)=\varepsilon^\alpha\hat{F}^*(\varphi,v,\varepsilon), \qquad (9.24)$$

где $\hat{F}^*\in\hat{C}^{0,5}(D,\Delta,T)$ всякий раз, когда $F^*\in C^{0,5}(D,\Delta,T)$.

3°. На многообразии $y=F^*(\varphi,\varepsilon\tau,\varepsilon)$ система (9.10) приводится к системе уравнений

$$\dot{\varphi}=\varepsilon A(\varphi,F^*(\varphi,\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau,\varepsilon),$$

которая с учетом первого равенства (9.11) и перехода к t запишется в виде

$$\frac{d\varphi}{dt}=A(\varphi,F^*(\varphi,t,\varepsilon),t,\varepsilon)\equiv A_1(\varphi,\varepsilon F^*)F^*+\varepsilon^\alpha q_1(\varphi,\varepsilon F^*,t). \qquad (9.25)$$

Однако установление существования периодических решений этой системы с использованием известных критериев сопряжено с трудностями, возникающими вследствие приближенного, в большинстве случаев, нахождения вектор-функции . Поэтому ниже выясняются условия, при выполнении которых, исходя только из первых приближений к F^*, можно утверждать, что уравнение (9.25) имеет периодическое решение. При этом в качестве вышеупомянутого критерия берется следующая

Лемма 26. (теорема 7.3 [61]). Для того чтобы система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mu g(x,t), \tag{9.26}$$

где вектор-функция $g(x,t)$ непрерывна и периодическая по t с периодом T и удовлетворяет по x условию Липшица в замкнутой, ограниченной области $\mathcal{D} \subset R^n$, для всех достаточно малых μ обладала периодическим с периодом T решением, непрерывно зависящим от μ в окрестности точки $\mu = 0$, необходимо, чтобы усредненная система уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu g_0(\xi) \equiv \mu \frac{1}{T} \int_0^T g(s,\xi)\, ds \tag{9.27}$$

имела положение равновесия $\xi = \xi_0 \in \mathcal{D}$, и достаточно, чтобы это положение было изолированным с ненулевым индексом.

Отметим, что система уравнений (9.25) с учетом соотношения (9.24) имеет вид системы (9.26) с $\mu = \varepsilon^{\alpha}$, при этом в качестве $\mathcal{D}$ можно взять куб $\mathcal{T}_m = [0,2\pi] \times \ldots \times [0,2\pi]$. Требуя малости $\varepsilon^1 \le \varepsilon^0$, можно добиться выполнения третьего неравенства (9.22) с $\theta = \varepsilon^{\alpha/2}$ для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon^1$, где

$$\|S_T F - S_T \bar{F}\| \le \theta |F - \bar{F}|_0 \quad \forall F, \bar{F} \in C^{0,5}(D, \Delta, T).$$

Но тогда в силу свойств функций A_1, q_1 и неравенства

$$\|F^* - F_1\| \le \frac{\theta}{1-\theta}\|F_0 - F_1\|$$

легко показать, что

$$A_1(\varphi,\varepsilon F^*)\hat{F}^* + q_1(\varphi,\varepsilon F^*,t) = A_1(\varphi,\varepsilon F_1)\hat{F}_1 + q_1(\varphi,\varepsilon F_1,t) + \delta(\varepsilon,\varphi,t), \quad (9.28)$$

где

$$F_1 = S_\varphi F_0,\ F_1 = \varepsilon^\alpha \hat{F},\ \|\delta(\varepsilon,\varphi,t)\| \le M\varepsilon^{\alpha/2}\ \forall\varphi\in R^m, t\in R^1, M = const > 0. \quad (9.29)$$

Таким образом, если система уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = \bar{A}(\psi,F_1,\varepsilon) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T A(\psi,F_1(\psi,t,\varepsilon),t,\varepsilon)\,dt \quad (9.30)$$

имеет изолированное с ненулевым индексом положение равновесия $\psi_0 \in \mathcal{T}_m$, и это свойство является грубым, то в силу соотношений (9.28), (9.29) и леммы 26 система (9.25) имеет периодическое с периодом T решение $\varphi^*(t,\varepsilon)$.

Резюмируя вышеизложенное, приходим к основному результату.

Т е о р е м а 15. Пусть правая часть системы уравнений (9.1) удовлетворяет следующим условиям.

1. Функции $X(x), Q(x,t)$ определены и непрерывны для всех $t\in R^1, x$ из замкнутой ограниченной области $\mathcal{D}\subset R^{n+m}$, Q периодическая по t с периодом T, а также вместе со вторыми частными производными X удовлетворяет по x условиям Липшица.

2. Вырожденная система (9.2) имеет решение $x = f(\varphi)\in C^{2,5}(R^m, 25)$, удовлетворяющее соотношениям (9.3) и принадлежащее области $\mathcal{D}$ вместе с некоторой своей $\rho\varepsilon$ -окрестностью.

3. Относительно матрицы $P(\varphi,0)$ определенной соотношениями (9.11), выполняется условие 2) леммы 25.

4. Система уравнений (9.30), где $F_1 = S_\varphi 0$, S_φ определено правой частью (9.17), имеет изолированное с ненулевым индексом

положение равновесия, и это свойство является грубым.

Тогда можно указать достаточно малое число $\bar{\varepsilon}^\circ > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}^\circ$ система (9.I) имеет периодическое с периодом T решение $x(t,\varepsilon)$ удовлетворяющее равномерно по $t \in R^1$ неравенству $\| f(\varphi) - x(t,\varepsilon) \| \le \beta(\varepsilon)$, где $\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для иллюстрации теоремы I5 рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \varepsilon^{1+\alpha} x_2^2 \sin t, \\ \varepsilon \dfrac{dx_2}{dt} = -(x_1^2 + x_2^2 - 1) x_2 + \varepsilon^{1+\alpha}(2x_1 x_2 + \cos t). \end{cases} \tag{9.3I}$$

Вырожденная система имеет решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{9.32}$$

при этом матрица $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$ дополняема до невырожденной на R^1 матрицы. В результате замены переменных в (9.3I) по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

придем к системе

$$\begin{pmatrix} (1+h)\cos\varphi & \sin\varphi \\ -(1+h)\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi \\ h \end{pmatrix} = -h(2+3h+h^2) \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} + \varepsilon^{1+\alpha} \begin{pmatrix} (1+h)^2 \cos^2\varphi \sin t \\ (1+h)^2 \sin\varphi + \cos t \end{pmatrix},$$

которая при $|h| \le 0{,}5$ приводится к виду

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d\varphi}{dt} = \varepsilon^{1+\alpha}(1+h)^2 \left[\cos^3\varphi \sin t - \sin\varphi(\sin 2\varphi + \cos t) \right], \\ \varepsilon \dfrac{dh}{dt} = -(2+3h+h^2)h + \varepsilon^{1+\alpha}(1+h)^3 \left[\cos^2\varphi \sin\varphi \sin t + \cos\varphi(\sin 2\varphi + \cos t) \right]. \end{cases}$$

При $t = \varepsilon\tau$ получим систему вида (9.I0):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \varepsilon^{1+\alpha}(1+h)^2 \cos^3\varphi \sin\varepsilon\tau - \sin\varphi(\sin 2\varphi + \cos\varepsilon\tau), \\ \dot{h} = -(2+3h+h^2)h + \varepsilon^{1+\alpha}(1+h)^3 \left[\cos^2\varphi \sin\varphi \sin\varepsilon\tau + \cos\varphi(\sin 2\varphi + \cos\varepsilon\tau) \right]. \end{cases} \tag{9.33}$$

Так как система (9.33) при малых $\varepsilon, |h|$ удовлетворяет условиям леммы 25, то существует асимптотически устойчивое многообразие $h = F^*(\varphi, t, \varepsilon) \in C^\infty(D, \Delta, 2\pi)$. Отметим при этом, что необходимость замены

(9.9), а также построения F_1 отпадает в связи с тем, что в данном случае в системе (9.7) $A_1(\varphi, h) \equiv 0$.

Для усредненного по t уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\varepsilon^{\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + F_0(\psi, s, \varepsilon)\right]^2 \left[\cos^3\psi \sin s - \sin\psi(\sin 2\psi + \cos s)\right] ds, \quad (9.34)$$

соответствующего первому уравнению системы (9.33) при $F_0 \equiv 0 \in C^{\infty}(D, \Delta, 2\pi)$, в точке $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ выполняются соотношения $\bar{A}(\psi_0, F_0, \varepsilon) = 0, \frac{d\bar{A}(\psi_0, F_0, \varepsilon)}{d\psi} \neq 0$. Поэтому согласно [61] уравнение (9.34) имеет изолированное с ненулевым индексом положение равновесия $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, и это свойство является грубым, и в силу теоремы 15 уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon^{\alpha}\left[1 + F^*(\varphi, t, \varepsilon)\right]^2 \left[\cos^3\varphi \sin t - \sin\varphi(\sin 2\varphi + \cos t)\right]$$

имеет периодическое с периодом 2π решение $\varphi^*(t, \varepsilon)$.

Следовательно, исходная система (9.31) имеет периодическое с периодом 2π решение

$$x_1 = \left[1 + F^*(\varphi^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\right] \sin\varphi^*(t, \varepsilon),$$

$$x_2 = \left[1 + F^*(\varphi^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\right] \cos\varphi^*(t, \varepsilon),$$

равномерно сходящееся при $\varepsilon \to 0$ к решению вырожденной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

I. Основная цель, преследуемая при написании данной диссертационной работы, заключалась в установлении достаточных условий существования гладких (неразрывных) периодических и квазипериодических решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных и нелинейных матрично-сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Показано, что даже в периодическом случае рассматриваемые в работе линейные системы являются намного более общими по сравнению с изучавшимися ранее системами.

3. Установлены достаточные условия совместности и существования периодических решений линейной системы с прямоугольными периодическими матрицами в случаях постоянности и непостоянности ранга матрицы при производных.

4. Для линейных расширений динамических систем на торе с вырождающимися матрицами при производных установлены достаточные условия существования единственного гладкого инвариантного тора при любой неоднородности в случае непостоянности ранга матрицы при производных. В частном случае эти условия гарантируют существование единственного гладкого квазипериодического решения линейной системы с квазипериодическими коэффициентами.

5. Получены условия существования единственного неразрывного периодического решения матрично-сингулярно возмущенной линейной системы с периодическими коэффициентами и с вырожденной матрицей при производных.

6. Для матрично-сингулярно возмущенных линейных расширений динамических систем на торе в случае несимметричности и невырожденности при $0<\varepsilon\ll 1$ матрицы при производных, которая при

$\varepsilon=0$ меняет свой ранг, установлены достаточные условия существования единственного неразрывного инвариантного тора, обладающего условной устойчивостью. Показано, что торы таких систем могут быть непрерывными в точке $\varepsilon=0$ (регулярно содержать ε) либо разрывными в точке $\varepsilon=0$. В случае постоянности для $\varepsilon=0$ ранга матрицы при производных доказано, что торы регулярно содержат ε.

7. Для нелинейной матрично-сингулярно возмущенной системы с периодическими коэффициентами и с вырожденной матрицей при производных получены условия существования гладкого периодического решения, сходящегося при $\varepsilon\to 0$ к периодическому решению вырожденной системы, а также построено его асимптотическое разложение.

8. Приведены условия, гарантирующие сохранение неразрывного инвариантного тора при матрично-сингулярном возмущении нелинейных систем на торе.

9. Приведены условия существования периодических решений нелинейной системы с малым параметром при производных в окрестности тороидального многообразия решений вырожденной системы.

10. Теоретические результаты диссертации иллюстрированы многими примерами и могут быть применены при решении задач, возникающих, например, в теории автоматического регулирования, математической экономике, кинетике, теории нелинейных колебаний, теории гироскопических систем и т. д.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алешин В.В. Некоторые задачи теории метода усреднения в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих медленные и быстрые движения. - Автореф. на соиск. ст. докт. физ.-мат. наук. М.:МГУ, 1973, 16 с.

2. Алымкулов К. Асимптотические оценки периодических решений сингулярно возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в критическом случае. - Автореф. на соиск. ст. канд. физ.-мат. наук. Фрунзе: АН Кирг. ССР, 1972, 15 с.

3. Аносов Д.В. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. - Матем. сб., 1960, т. 50 (92), № 3, с. 299-334.

4. Багриновский К.А. О гладких решениях некоторых задач планирования. - В кн.: Проблемы народнохозяйственного оптимума. М.: Экономика, 1969, с. 300-325.

5. Барис Я.С., Фодчук В.И. Исследование ограниченных решений линейных нерегулярно возмущенных систем методом интегральных многообразий. - Укр. мат. журн., 1969, т. 21, № 3, с. 291-304.

6. Барис Я.С., Фодчук В.И. Исследование ограниченных решений нелинейных нерегулярно возмущенных систем методом интегральных многообразий. - Укр. мат. журн., 1970, т. 22, № 1, с. 3-11.

7. Барис Я.С. Об интегральном многообразии линейной нерегулярно возмущенной системы. - В кн.: Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях, Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1973, с. 60-69.

8. Былов В.Ф., Виноград Р.Э., Лин В.Я., Локуциевский О.В. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти-периодических систем. - В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, Киев: Наукова думка, 1977, с.54-61.

9. Божко В.А. Об асимптотических разложениях -периодических решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных и с периодическими коэффициентами. - Автореф. дисс. на соиск. ст. канд. физ.-мат. наук, Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1978, 16 с.

10. Божко В.А. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. - В кн.: Приближенные методы математического анализа, Киев: КГПИ, 1979,с.11-18.

11. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1980, 222 с.

12. Бутузов В.Ф.,Васильева А.Б., Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - В кн. Итоги науки. Матем. анализ, 1967, М.: ВИНИТИ АН СССР, 1969, с. 5-74.

13. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968, 464 с.

14. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. - М.: Наука, 1969, 527 с.

15. Васильев В.М., Вольперт А.И., Худяев С.И. О методе квазистационарных концентраций для уравнений химической кинетики. - Журнал выч. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 3, с. 683-697.

16. Васильева А.Б. Асимптотические формулы для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости. - Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 6, с. 1110-1113.

17. Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. - УМН, 1963, т. 18, № 3, с. 15-86.

I8. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, I973, 272 с.

I9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. - М.: МГУ, I978, I06 с.

20. Волк И.М. О периодических решениях неавтономных систем, зависящих от малого параметра. - Прикл. матем. и мех., I946, т.I0, № 5-6, с. 559-574.

2I. Волк И.М. Некоторые обобщения метода малого параметра в теории периодических движений неавтономных систем. - Прикл. матем. и мех., I947, т. II, № 4, с. 433-444.

22. Волк И.М. О периодических решениях автономных систем. - Прикл. матем. и мех., I948, т. I2, № I, с. 29-38.

23. Волосов В.М. О решениях некоторых возмущенных систем в окрестности периодических движений. - Докл. АН СССР, I958, т. I23, № 4, с. 587-590.

24. Волосов В.М. Асимптотика интегралов некоторых возмущенных систем. - Докл. АН СССР, I958, т. I2I, № 6, с. 959-962.

25. Вольперт А.И., Лебедева М.И. Уравнения с малым параметром в банаховом пространстве и их приложения к химической кинетике. - УИН, I977 , т. 32, вып. 5, с. 222-223.

26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, I967, 575 с.

27. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. - Воронеж: ВГУ, I972, I93 с.

28. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. - М.: Наука, I979, 43I с.

29. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - М.: Наука, I970, 534 с.

30. Задирака К.В. Исследование нерегулярно возмущенных дифференциальных систем методом интегральных многообразий. – Автореф. дисс. на соиск. ст. докт. физ.-мат. наук, Киев: КГУ, 1966, 10 с.
31. Ежова Л.А. Асимптотическое исследование периодических решений сингулярно возмущенных систем. – Автореф. дисс. на соиск. ст. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1980, 8 с.
32. Еременко В.А. Асимптотические разложения неразрывных периодических решений сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. – В кн.: Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных уравнений. Часть I. Алма-Ата: Наука, Каз. ССР, 1979, с. 184–185.
33. Еременко В.А.О некоторых свойствах периодических матриц. – Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 1, с. 19–26.
34. Еременко В.А. О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. – Укр. мат. журн., 1980, т.32, № 2, с. 168–174.
35. Еременко В.А. О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. – В кн.: Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1980, с. 40–52.
36. Еругин Н.П., Штокало И.З. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Вища школа, 1974, 472 с.
37. Капишев К.К. О квазипериодических решениях нелинейных систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. – Вест. АН Каз. ССР, 1966, № 6, с. 42–47.
38. Капишев К.К., Харасахал В.Х. О почти периодических решениях дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при производных. – В кн.: Труды I-й Казахстанской межвуз. научн. конф. по

матем. и мех., 1963. Алма-Ата:Наука, 1965, с. 277.
39. Капишев К.К., Умбетжанов Д.У. О многопериодических решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений с малыми параметрами. - Изв. АН Каз. ССР. Серия физ.-мат., 1968, № 3, с.32-38.
40. Кведарас Б. О свойствах решений вырожденного линейного дифференциального уравнения. - Лит. мат. сб., 1977, т. 17, № 1, с. 115-125.
41. Кведарас Б. Об асимптотическом поведении формального решения вырожденного дифференциального уравнения в особой точке. - Лит. мат. сб., 1978, т. 18, № 1, с. 123-130.
42. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. - Киев: Наукова думка, 1976, 184 с.
43. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Метод обращения возмущенных на спектре линейных операторов и некоторые его применения. - В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наукова думка, 1977, с. 107-114.
44. Кулик В.Л. Условно устойчивые инвариантные множества и многообразия динамических систем. - Автореф. дисс. на соиск. ст. канд. физ.-мат. наук, Киев: Ин-т матам. АН УССР, 1975, 15 с.
45. Кулик В.Л., Еременко В.А. О квазипериодических решениях линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. - Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 6, с.746-753.
46. Мационис И.А. Обобщенная функция Грина и вопросы разрешимости некоторых двухточечных краевых задач. - Автореф. на соиск. ст. канд. физ.-мат. наук, Вильнюс: ЦБ АН Лит.ССР, 1976, 8 с.
47. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Киев: АН УССР, 1955, 280 с.
48. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Некоторые вопросы теории

многочастотных колебаний. – Киев, I977. – 47 с. (Препринт Ин-т матем. АН УССР: 77-I4).

49. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка, I97I, 42I с.

50. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, I973, 5I2 с.

5I. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука,I975, 247 с.

52. Мозер Ю. Быстросходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения. – УМН, I968, т.23, вып. 4, с. I79-238.

53. Рожков В.И. Периодические решения линейных систем с малым параметром при производной. – Докл. АН СССР, I975, т. 224, № 6, с. I268-I27I.

54. Рожков В.И. Об одном методе исследования периодических решений систем с малым параметром при производных. – Дифф. уравнения, I975, т. II, № 8, с. I388-I395.

55. Рожков В.И. Новые результаты в теории периодических решений сингулярно возмущенных систем, полученные методом эквивалентного дифференциально-операторного уравнения. – Abh. Acad. Wiss. DDR. Abt. Math. Natur wiss. Techn., 1977, n N4, p. 177-192.

56. Рожков В.И., Панфилов Н.Г. Краевая задача для линейной системы с малым параметром при производной. – Дифф. уравнения, I978, т. I4, № I0, с. I806-I8I3.

57. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$. – Дифф. уравнения, т. II, № II, I975, с. I996-20I0.

58. Сабиров Т. Исследования по теории рождения малых периодических и почти периодических решений из состояния равновесия в нелинейных системах дифференциальных уравнений. – Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук, Киев: Ин-т матем. АН УССР,

1974, 30 с.

59. Сабиров Т. Метод нормализующих преобразований в теории ветвления периодических решений нелинейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. - Укр. мат. журн., 1974,т. 26, № I, с. 38-5I.

60. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении. - Изв. АН СССР, сер. матем., 1970, т.34, № 6, с. I2I9-I240.

6I. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений.-Киев:Вища школа,1976,180 с.

62. Самойленко А.М. Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами. - В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений . Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1975, с. 5-26.

63. Самойленко А.М. Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными. - В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наукова думка, 1977, с. I8I-I9I.

64. Самойленко А.М. Функция Грина линейного расширения динамической системы на торе, условия ее единственности и свойства, вытекающие из этих условий. - Укр. мат. журн., 1980, т. 32, № 6, с. 79I-797.

65. Самойленко А.М., Кулик В.Л. Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем. - Дифф. уравнения, 1979, т. I5, № 8, с. I434-I443.

66. Самойленко А.М., Кулик В.Л. К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе. - Укр. мат. журн., 1975, т.27, № 3, с. 3I2-32I.

67. Самойленко А.М. Необходимые условия существования инвариан-

тных торов линейных расширений динамических систем на торе. - Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1427-1437.

68. Самойленко А.М., Параскк И.О. О методе Галеркина в теории возмущения инвариантных торов. - Доп. АН УРСР, сер. А, 1977, № 2, с. 112-115.

69. Сацкая Н.С. О решении дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром, не разрешенного относительно производной. - Матем. сб., 1962, т. 57, № 4, с. 517-526.

70. Сацкая Н.С. Об одном дифференциальном уравнении с малым параметром. - Матем. сб., 1963, т. 60, № 4, с. 499-505.

71. Скрипник В.П. Вырожденные системы и малый параметр при старшей производной. - Матем. сб., 1964,т. 65, № 3, с.338-356.

72. Скрипник В.П. О вырожденных системах и малом параметре при производной. - Дифф. уравнения, 1968, т. 4,№ 4,с. 646-658.

73. Скрипник В.П. О малых множителях при производных. - Изв. АН Каз. ССР, 1978, № 1, с. 36-40.

74. Скрипник В.П. О малом параметре при производных. - В кн.: Асимптотические методы нелинейной механики. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1979, с. 128-133.

75. Скрипник В.П. О обобщенных решениях вырожденных линейных систем. - В кн.: Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных уравнений. Часть 1.,Алма-Ата: Наука, 1979, с. 131-132.

76. Скрипник В.П. Вырождающийся параметр и вырожденные уравнения. - Лит. мат. сб., 1980, т. 20, № 1, с. 165-173.

77. Сейтказиева К.С. Асимптотические оценки в теории периодических решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений со многими малыми параметрами при производных. - Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук, Киев: Ин-т

матем. АН УССР, 1980, 12 с.

78. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Метод интегральных многообразий в задаче о приемлемости решения прецессионных уравнений гироскопических систем. – В кн.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением, Новосибирск:Наука, 1979, с. 38-43.

79. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917, 308 с.

80. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. – Матем. сб., 1950, т.27(69), с. 147-156.

81. Турбин А.Ф. Исследования по теории сингулярно возмущенных полугрупп операторов и асимптотическому фазовому укрупнению случайных процессов. – Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1980, 25 с.

82. Флэтто Л., Левинсон Н. Периодические решения сингулярно возмущенных систем. – Математика, сб. переводов, 1958, 2:2,с.61-68.

83. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966, 229 с.

84. Хейл Д.К., Сейферт Г. Ограниченные и почти периодические решения сингулярно возмущенных уравнений. – Симпозиум по нелинейным колебаниям, Киев, сент. 1961, Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1961, с. 9.

85. Черышов К.И. Об операторных дифференциальных уравнениях, неразрешенных относительно производной. – Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1979, 17 с.

86. Шлапак Ю.Д. Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. – Укр.

мат. журн., I975, т. 27, № I, с. I37-I40.

87. Шлапак Б.Д. Периодические решения линейной системы второго порядка, не разрешенной относительно производных. - В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т матем. АН УССР, I975, с.I83-I88.

88. Шлапак Б.Д. О приводимости линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных. - Матем. физика. Респ. межвед. сб., Киев: Наукова думка, I977, вып. 2I, с. 60-64.

89. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.: Наука, I972, 7I7 с.

90. Birkhoff G.D. On the asymptotic character in the solutions of certain linear differential equations containing a parameter.- Trans. Amer. Math. Soc., 1908, 9, pp.219-231.

91. Campbell S.L. Optimal control of autonomous linear processes with singular matrices in the quadratic cost functional.-SIAM J. Control, 1976, 14, pp.1092-1106.

92. Campbell S.L. Linear systems of differential equations with singular coefficients.-SIAM J. Math. Anal., 1977, Vol. 8, N6, pp.1057-1066.

93. Campbell S.L, Meyer C.D., Rose N.J. Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations.-SIAM J. Appl. Math., 1976, 31, pp.411-425.

94. Friedrichs K.O., Wasow W.R. Singular perturbations of nonlinear oscillations.-Duke Math. Journ., 1946, 13, N3, pp.367-381.

95. Hale J.K., Seifer G. Bounded and almost periodic solutions of singularly perturbed equations.-J. Math. Analysis and Applic., 1961, 3, N1, pp. 18-24.

96. Harris W.A., Sibuja Jr. V., Weinberg L. A reduction algorithm

for linear differential systems.-Funkcialaj Ekvaciej, Ser. Internacia, 1968, 11, N2, pp.59-67.

97. Marsaglia George, Styan George P.H. Equalities and inequalities for ranks of matrices.-Linear and Multilinear Algebra, 1974, 2, N3, pp.269-292.

98. Nagumo M. Über das Verhalten der Integrales von $xy''+f(x,y,y',x)=0$, für $\lambda \to 0$.- Proc. phys. Math. Soc. Japan, 21, 1939, pp.529-534.

99. Noaillon P. Developpments asymptotiques dans les equations differentialles linéaires a parametre variable.-Memoires Soc. Sci. de Liege, 1912, 3, N11, p.197.

100. Rang E.R. Periodic solutions of singular perturbatior problems.- Internat. Sympos. Nonlinear Different. Equations and Nonlinear Mech., Colorado springs, 1961. New-York-London, Akad. Press, 1963, pp.377-383.

101. Sibuya Jr.V. Some global properties of matrices of functions of one variable.- Math.Ann., 1965, 161, Hf1, pp.67-77.

102. Tschen V. Über das Verhalten der Losungen einer Folge von Differentialgleichungen, Welche im Limes ousarten, Comp. Math., 1935, 2, pp.378-401.

103. Wasow W. On the construction of periodic solutions of singular pertubation problems.- Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Ann. of Math. Studies. Priceton, 1950, v.20, pp.313-350.