АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

ПОПИНА
СТЕПАН ЮРЬЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ХРУПКИХ ПЛАСТИН, ОСЛАБЛЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЕФЕКТАМИ

(01.02.04 - механика деформируемого твердого тела)

Диссертационная работа
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель -
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
П.М.ВИТВИЦКИЙ

Львов - 1978

П Р Е Д И С Л О В И Е

Известно, что современные высокопрочные материалы обладают значительной хрупкостью. Для хрупких тел модель сплошной среды, лежащая в основе классической теории упругости, применима до тех пор, пока речь идет об определении напряженного состояния до момента, предшествующего разрушению. Но эта модель оказывается недостаточной для объяснения и количественной оценки таких закономерностей, свойственных хрупким материалам при разрушении как значительное рассеивание результатов испытаний на прочность, влияние на характеристики прочности вида напряженного состояния, размеров образцов и т.п. Имеющиеся в литературе данные показывают, что эти закономерности связаны с локальным характером разрушения. Поэтому возникает необходимость учета присущих реальным материалам дефектов (трещин, остроконечных включений). Учет этих дефектов, приводящих к значительной концентрации напряжений, позволяет объяснить существенный разброс прочности внешне идентичных образцов, как результат наличия в материале дефектов различных фори, размеров и т.п. Другие закономерности, указанные выше, можно объяснить и количественно оценить, если учесть случайный характер распределения дефектов по объему тела.

Как известно, реальное твердое тело предсталяет собой статистический ансамбль большого количества первичных элементов (элементарных объемов). Эти первичные элементы характеризуются различной дефектностью и каждый из них является в определенной мере ответственным за прочность тела в целом. Прочность тела можно определить на основе известного распределения пределов

прочности первичных элементов. При этом должны быть известны законы взаимодействия этих элементов.

Исходное распределение пределов прочности дефектных элементов определяется как величинами дефектов, так и их размещением /ориентацией/ в поле напряжений. Следовательно для каждого вида нагрузки нужно знать соответствующее ему распределение прочности первичных элементов. Это обстоятельство играет существенную роль как для материалов с анизотропией дефектности, так и для изотропных материалов при сложном напряженном состоянии. Поэтому в настоящей работе используется подход, развитый в работах Фишера и Холломона [102] , П.М.Витвицкого [11] , основанный на явном введении в модель материала дефектов структуры с вероятностными законами распределения их геометрических параметров /величины, ориентации/ и позволяющий рассчитывать распределение прочности при указанных условиях.

Актуальность и значимость проведенных в данной работе исследований подчеркивается современными теоретическими успехами детерминистической линейной механики разрушения /главным образом теории трещин/ и, вместе с тем, ее неспособностью объяснить накопленный к настоящему времени экспериментальный материал, который показывает, что прочность хрупкого тела является случайной величиной. В книге [75] отмечено, что хрупкое тело не обладает определенной, свойственной ему прочностью, и в лучшем случае можно лишь указать какова вероятность его разрушения при данной нагрузке. Поэтому возникает необходимость комплексного применения методов теории вероятностей и детерминистической механики разрушения, как одного из возможных путей построения статистической теории прочности твердых тел.

Настоящая работа посвящена развитию методов определения вероятностных характеристик /функции распределения, среднего зна-

чения, дисперсии и др./ предельных значений внешних силовых или температурных факторов для стохастически дефектных пластин и построение на этой базе вероятностных критериев разрушения материалов при плоском напряженном состоянии. При этом случайный характер прочности пластин обусловлен случайностью длин и ориентаций трещин, жестких стержневых включений или случайными отклонениями контура трещины от прямолинейности.

К защите представляются следующие новые результаты:

- способ определения закона распределения случайных предельных напряжений элемента тела с дефектом случайного размера и ориентации;

- обобщение распределения Вейбулла на случаи сложного однородного напряженного состояния пластин со стохастическим распределением трещин или жестких стержневых включений;

- модельные представления для расчета вероятностных характеристик прочности стохастически дефектных пластин с учетом технологической вытяжки материала и для прогнозирования приобретенной при этом прочностной анизотропии материала;

- расчет и построение вероятностных критериев разрушения материалов с дефектами в виде трещин или жестких стержневых включений при плоском сложном напряженном состоянии;

- исследование зависимости вероятности разрушения материалов от вида напряженного состояния, масштабного фактора и др.;

- решение задач о предельном тепловом потоке для пластины со стохастическим распределением трещин, о вероятностных характеристиках прочности пластины с трещиной случайной формы, близкой к прямолинейной.

Диссертационная работа состоит из предисловия, введения, шести глав, заключения и списка литературы.

Во введении изложены положения теории вероятностей, используемые в работе; приведены краткие сведения о предельном равновесии пластины с произвольно ориентированной трещиной при сложном напряженном состоянии; дан обзор исследований по статистической теории прочности; рассмотрен метод решения задачи по определению вероятностных характеристик прочности хрупких пластин со стохастическим распределением трещин при сложном напряженном состоянии.

Первая глава посвящена исследованию вероятностных характеристик /вероятности разрушения, среднего значения, дисперсии и др./ предельных нагрузок пластин, находящихся в сложном однородном поле напряжений и ослабленных трещинами, случайная длина которых может быть неограниченной. Получены выражения для вероятности разрушения пластины, которые при большом числе трещин приведены к двухпараметрическому распределению Вейбулла. Исследована зависимость вероятности разрушения и числовых характеристик прочности от соотношения главных нормальных напряжений, числа трещин, параметра однородности материала и коэффициента трения берегов трещин. Построены уравнения статистических кривых разрушения при плоском напряженном состоянии.

Во второй главе рассмотрена та же задача, что и в первой, но в отличие от предыдущего здесь считается, что пластины содержат трещины ограниченных случайных длин. Дано сравнение результатов, полученных в первой и второй главах.

Определение вероятностных характеристик прочности пластин, материал которых подвергли технологической вытяжке, осуществлено в третьей главе. Расчет проведен на основании модельного представления структурной перестройки стохастически дефектного материала. При различных видах напряженного состояния изучена зависимость вероятности разрушения, средних значений предельных напря-

жений и прочностной анизотропии от коэффициента вытяжки материала и масштабного фактора. Построены критерии прочности материала в зависимости от коэффициента вытяжки.

В четвертой главе исследуется прочность хрупких пластин со стохастическим распределением жестких стержневых включений. Проанализировано влияние коэффициента Пуассона материала матрицы, параметра однородности композита, числа включений на вероятностные характеристики предельных напряжений и статистические кривые прочности пластин.

Пятая глава посвящена определению вероятности разрушения и числовых характеристик прочности пластин, находящихся под действием теплового потока. Предполагается, что пластины ослаблены теплоизолированными трещинами случайных ориентаций и длин.

На основании метода малого параметра и результатов теории случайных функций в шестой главе дано решение задачи о предельных напряжениях для пластины с трещиной случайной формы, близкой к прямолинейной.

В заключении приведены основные результаты работы и краткие выводы.

Результаты, полученные в работе, опубликованы в статьях [I7-22,65-67] и доложены на УI Всесоюзной конференции по прочности и пластичности /Москва, I975/, IУ Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике /Киев, I976/, УП-УШ конференциях молодых ученых Физико-механического института АН УССР /Львов, I975, I977/, семинаре по проблемам хрупкого разрушения при Физико-механическом институте АН УССР.

В опубликованных в соавторстве работах диссертанту принадлежит построение решения всех рассмотренных задач, участие в их постановке, обсуждении полученных результатов и формулировке со-

ответствующих выводов.

Работа выполнена в отделе физических основ прочности Физико-механического института АН УССР.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю старшему научному сотруднику, кандидату физико-математических наук Витвицкому Петру Михайловичу за постоянное внимание к работе.

В В Е Д Е Н И Е

I. Элементы теории вероятностей

В литературе известно большое количество работ, посвященных изложению положений теории вероятностей и математической статистики, а также их приложениям [10, 24, 25, 73, 80]. Здесь приводятся только некоторые положения теории вероятностей, используемые в дальнейшем.

Случайные величины и их вероятностные характеристики. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие о случайной величине. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или другое значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Случайные величины, принимающие только отделенные друг от друга значения, которые можно заранее перечислить, называются дискретными случайными величинами. Существуют случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток /конечный или бесконечный/. Такие случайные величины именуются непрерывными случайными величинами. В дальнейшем будем рассматривать только непрерывные случайные величины. Для обозначения случайных величин используем большие буквы латинского алфавита, для возможных значений - малые буквы.

В теории вероятностей аксиоматически принимается, что каждому случайному событию B соответствует определенное число $P(B)$, удовлетворяющее условию $0 \le P(B) \le 1$ и называемое вероятностью этого события /под событием понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти/.

Принимается также, что вероятность достоверного события, т.е. такого события, которое в результате опыта непременно должно произойти, равна единице, а вероятность невозможного события равна нулю.

Вероятностные свойства случайной величины X полностью характеризуются при помощи функции распределения $F(x)$, равной вероятности события $X < x$

$$F(x) = P(X < x) \qquad (1)$$

функция $F(x)$ является неотрицательной, неубывающей функцией, причем $F(x_{min}) = 0$, $F(x_{max}) = 1$ / x_{min}, x_{max} - соответственно наименьшее и наибольшее возможные значения случайной величины X /. Первая производная от функции распределения называется плотностью вероятности $f(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

При помощи функции $f(x)$ вероятность события $x_1 < X < x_2$ будет равна

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) \qquad (3)$$

По известной плотности вероятности функция распределения вычисляется так

$$F(x) = P(x_{min} < X < x) = \int_{x_{min}}^{x} f(x)\,dx \qquad (4)$$

Отметим основные свойства плотности вероятности:

1. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)\,dx = 1 \qquad (5)$$

2. Плотность вероятности есть неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.

В теории вероятностей и ее приложениях применяется большое количество различных числовых характеристик случайных величин. Здесь мы приведем формулы для вычисления некоторых, необходимых в дальнейшем, числовых характеристик. Математическое ожидание /среднее значение/ случайной величины определяется по формуле

$$\langle x \rangle = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x f(x) dx \Big/ \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) dx \qquad /6/$$

Важное значение имеют общие свойства математического ожидания. Некоторые из них мы здесь перечислим:

1. Математическое ожидание постоянной C равно этой же постоянной $\langle C \rangle = C$.

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания $\langle C x \rangle = C \langle x \rangle$.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий $\langle x+y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$.

Для оценки разброса значений случайной величины около ее среднего значения используется несколько числовых характеристик, важнейшей из которых является дисперсия. Дисперсия определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(x) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx \qquad /7/$$

Формула /7/ легко приводится к виду

$$D(x) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 f(x) dx - \left(\int_{x_{min}}^{x_{max}} x f(x) dx \right)^2 \qquad /8/$$

Нам понадобятся следующие свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю $\mathcal{D}(c)=0$.

2. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате $\mathcal{D}(cx)=c^2\mathcal{D}(x)$.

Как относительная характеристика рассеивания используется коэффициент вариации /изменчивости/, определяемый по формуле

$$W(x)=\sqrt{\mathcal{D}(x)}/\langle x\rangle \qquad /9/$$

Кроме отдельной случайной величины рассмотрим систему двух случайных величин X . Y с областями возможных значений: $x_{min}\le x\le x_{max}$, $y_{min}\le y\le y_{max}$. Функцией распределения системы двух случайных величин (X,Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств:

$$F(x,y)=\mathcal{P}(X<x,\ Y<y) \qquad /10/$$

Совместная плотность вероятности определяется по формуле

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} \qquad /11/$$

Условие нормировки для системы двух случайных величин имеет вид

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}}\int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x,y)\,dx\,dy=1 \qquad /12/$$

Следует отметить, что совместная плотность вероятности есть неотрицательная функция $f(x,y)\ge 0$.

Для среднего значения и дисперсии случайной величины X , входящей в систему, имеют место такие выражения:

$$\langle x\rangle=\int_{x_{min}}^{x_{max}}\int_{y_{min}}^{y_{max}} x\,f(x,y)\,dx\,dy \qquad /13/$$

$$\mathcal{D}(x)=\int_{x_{min}}^{x_{max}}\int_{y_{min}}^{y_{max}}(x-\langle x\rangle)^2 f(x,y)\,dx\,dy \qquad /14/$$

При изучении систем случайных величин мы будем рассматривать такие независимые случайные величины. Случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения /функция распределения, плотность вероятности/ каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. Для независимых случайных величин имеет место соотношение

$$f(x,y)=f(x)\cdot f(y) \qquad /15/$$

Важным для последующего изложения является вопрос об отыскании функций распределения и плотностей вероятности функций от случайных величин. Пусть случайная величина Z представляет собой функцию случайных величин X , Y :

$$z=\varphi(x,y) \qquad /16/$$

Тогда функция распределения $F(z)$ вычисляется по формуле

$$F(z)=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad /17/$$

Здесь интегрирование осуществляется по двумерной области R возможных значений случайных величин X , Y , для которой справедливо неравенство $\varphi(x,y)<z$.

Пусть необходимо определить совместную плотность вероятности случайных величин Z_1 , Z_2 , являющихся функциями двух других случайных величин X_1 , X_2

$$z_i=\varphi_i(x_1,x_2)\,,\quad (i=1,2) \qquad /18/$$

Предполагается, что соотношения /18/ имеют единственное решение относительно величин x_1 , x_2 :

$$x_i = h_i(z_1, z_2) \quad , \quad (i = 1, 2) \qquad /19/$$

Тогда плотность $f(z_1, z_2)$ представляется выражением

$$f(z_1, z_2) = f_1[h_1(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2)] \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \frac{\partial h_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z_1} & \frac{\partial h_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} \qquad /20/$$

где $f_1(x_1, x_2)$ - плотность вероятности системы (x_1, x_2) .

Распределение минимальных значений случайных величин. Пусть имеется n значений x_1 , x_2 , ... x_n случайной величины X с функцией распределения $F(x)$. Для функции распределения $F_n(x)$ величины $\xi_n = \min\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ имеет место соотношение

$$F_n(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \qquad /21/$$

Большое значение имеет асимптотическое представление функции распределения $F_n(x)$ при $n \to \infty$, поскольку его можно использовать для приближенной оценки $F_n(x)$ при конечных, но достаточно больших n . Если функция $F(x)$ удовлетворяет условиям

$$F(x) = \begin{cases} 0 , & x \le x_0 \\ >0 , & x > x_0 \end{cases} \qquad /22/$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{F(x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon^m} = C \quad , \quad C > 0, \; m > 0 \qquad /23/$$

то для функции распределения минимальных значений $F_n(x)$ имеет место соотношение

$$F_n(x)=0\ , \qquad x \le x_0$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1-\exp[-cn(x-x_0)^m], \qquad x>x_0 \qquad /24/$$

Отсюда следует приближенная формула

$$F_n(x) \simeq 1-\exp[-cn(x-x_0)^m], \qquad x>x_0 \qquad /25/$$

которая выполняется тем точнее, чем больше n . Отметим, что параметры c , m не зависят от n . Для определения значений этих параметров служит соотношение /23/. Вид функции распределения $F(x)$, удовлетворяющей условиям /22/, /23/, отображается в представлениях /24/, /25/ посредством параметров c , m.

Распределение вида

$$F_n(x) = 1-\exp[-cn(x-x_0)^m], \qquad x>x_0 \qquad /26/$$

при $x_0=0$ было введено В.Вейбуллом [109] . Так как распределение /26/ будет использоваться нами в дальнейшем, то исследуем его более подробно. Для плотности распределения имеем

$$f_n(x)=F_n'(x)=mcn(x-x_0)^{m-1}\exp[-cn(x-x_0)^m] \qquad /27/$$

Выражения для среднего значения и дисперсии распределения /26/ имеют вид

$$\langle x\rangle = x_0 + \frac{\Gamma(1+\frac{1}{m})}{(cn)^{1/m}} \qquad /28/$$

$$\mathcal{D}(x)=\frac{\Gamma(1+\frac{2}{m})-\Gamma^2(1+\frac{1}{m})}{(cn)^{2/m}} \qquad /29/$$

где $\Gamma(y)=\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt$ /гамма функция/. Дифференцирование плотности распределения $f_n(x)$ дает

$$f_n'(x)=mcn(x-x_0)^{m-2}\left[m-1-mcn(x-x_0)^m\right]\exp\left[-cn(x-x_0)^m\right] \qquad /30/$$

На основании выражений /27/, /30/ можно сделать некоторые выводы относительно поведения функции $f_n(x)$:

I. При $m>2$ функция достигает минимума в точке $x=x_0$ $(f_n(x_0)=0)$.

2. Для $1\le m<2$ плотность распределения $f_n(x)$ имеет в точке $x=x_0$ вертикальную касательную /при $m=2$ - наклонную касательную/.

3. В случае $m\le 1$ функция убывающая при любых x.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=0$.

5. При $m>1$ функция достигает максимума в точке $x=x_M$, где

$$x_M=x_0+\left(\frac{m-1}{mcn}\right)^{1/m} \qquad /31/$$

Отметим, что значение случайной величины $x=x_M$, при котором плотность распределения достигает максимума называется наиболее вероятным значением /модой/ распределения.

Сведения из теории случайных функций. Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, неизвестно заранее какой именно. В результате каждого опыта случайная функция превращается в обычную неслучайную функцию. Случайная функция $y(x)$ при фиксирован-

ном значении аргумента x превращается в случайную величину. Будем называть эту случайную величину сечением случайной функции, соответствующим заданному x .

Для случайных функций также вводятся основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин. Математическим ожиданием случайной функции $Y(x)$ называется неслучайная функция $\langle Y(x) \rangle$, которая при каждом значении аргумента x равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции. Дисперсией случайной функции $Y(x)$ называется неслучайная функция $\mathcal{D}[Y(x)]$, значение которой для каждого x равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции.

Хорошо изученным классом случайных функций являются стационарные случайные функции. Случайная функция $Y(x)$ называется стационарной, если все ее вероятностные характеристики не зависят от x . Для стационарной случайной функции $Y(x)$, заданной на промежутке $(-l, l)$ имеет место такое разложение

$$Y(x) = \langle Y(x) \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{2l} x + B_n \sin \frac{n\pi}{2l} x \right) \qquad /32/$$

где A_n , B_n – некоррелированные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\langle A_n \rangle = \langle B_n \rangle = 0 \ , \quad \mathcal{D}(A_n) = \mathcal{D}(B_n) = \mathcal{D}_n \qquad /33/$$

Используя разложение /32/, нетрудно получить для дисперсии стационарной случайной функции следующее выражение

$$\mathcal{D}[Y(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n \qquad /34/$$

2. Краткие сведения о предельном равновесии пластины с произвольно ориентированной трещиной при сложном напряженном состоянии

Для плоского напряженного состояния /деформации тонких пластин силами, действующими в ее плоскости/ значения предельных напряжений, соответствующих предельному равновесию тела, найдены в общем случае геометрии дефекта и внешней нагрузки. Под предельными подразумеваются наименьшие значения приложенных напряжений, по достижении которых трещина начнет распространяться и тело разрушится.

Пусть бесконечная изотропная пластина единичной толщины ослаблена прямолинейной сквозной трещиной длины $2l$ и подвергнута растяжению-сжатию поза зоной влияния трещины напряжениями p и q, $(q=\gamma p)$, действующими во взаимно перпендикулярных направлениях, при этом напряжения p направлены под углом α к плоскости трещины /рис.I/. В сплошной пластине /без трещины/ нормальные напряжения на оси x будут равны

$$\sigma_y = p\sin^2\alpha + q\cos^2\alpha \qquad /35/$$

При $\sigma_y \geq 0$ в процессе деформации пластины берега трещины не будут контактировать между собой и такую трещину назовем открытой. В случае $\sigma_y < 0$ при деформации пластины берега трещины будут соприкасаться между собой по всей ее длине и такую трещину назовем закрытой. Очевидно, что при $p \geq 0$, $q \geq 0$ трещина всегда будет открытой. Для $p \geq 0$, $q \leq 0$ на основании выражения /35/ можно записать, что $\sigma_y \leq 0$ при $0 \leq |\alpha| \leq \alpha_0 = arctg\sqrt{-\gamma}$ и $\sigma_y \geq 0$ при $|\alpha| \geq \alpha_0$.

В окрестности вершин трещины компоненты тензора упругих напряжений σ_r , σ_β , $\tau_{r\beta}$ в полярной системе координат r,β

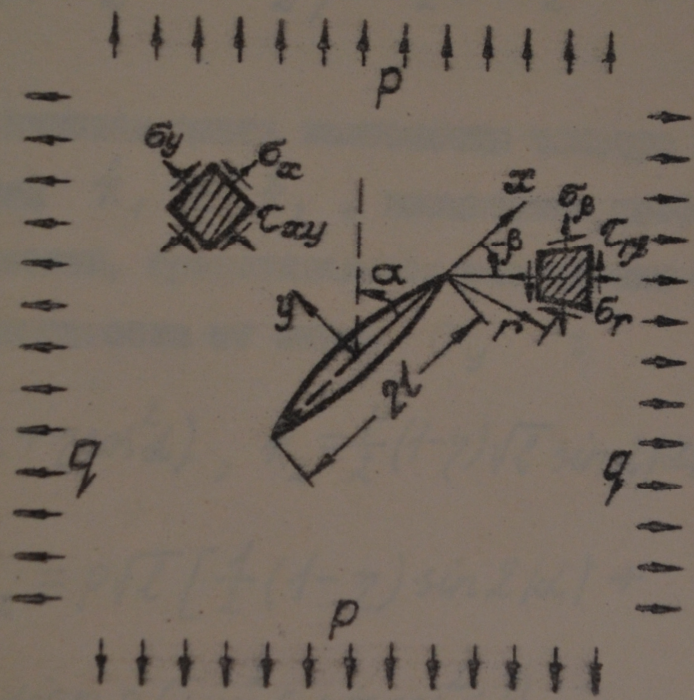

p
q
q
p
σ_y
σ_x
τ_{xy}
x
σ_β
$\tau_{r\beta}$
σ_r
α
β
y
r
2l

Рис.I.

/рис.I/ представляются такими формулами [56]

$$\sigma_r = \frac{1}{4\sqrt{2r}}\left[k_1\left(5\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{3\beta}{2}\right) + k_2\left(-5\sin\frac{\beta}{2} + 3\sin\frac{3\beta}{2}\right)\right] + O(1)$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{4\sqrt{2r}}\left[k_1\left(3\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{3\beta}{2}\right) - 3k_2\left(\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{3\beta}{2}\right)\right] + O(1) \qquad /36/$$

$$\tau_{r\beta} = \frac{1}{4\sqrt{2r}}\left[k_1\left(\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{3\beta}{2}\right) + k_2\left(\cos\frac{\beta}{2} + 3\cos\frac{3\beta}{2}\right)\right] + O(1)$$

$O(1)$ – ограниченная часть компоненты тензора напряжений при $r \to 0$. Величины k_1 и k_2, называемые коэффициентами интенсивности напряжений, представляются различными аналитическими выражениями в зависимости от знака σ_y :

$$k_1 = p\sqrt{l}\,(\sin^2\alpha + \gamma\cos^2\alpha), \quad k_2 = \frac{p}{2}(1-\gamma)\sqrt{l}\sin 2|\alpha|, \quad \sigma_y \geq 0 \qquad /37/$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = p\sqrt{l}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma)\sin 2|\alpha| + \right.$$

$$\left. + \rho\,\mathrm{sign}\,p\,(\sin^2\alpha + \gamma\cos^2\alpha)\right], \quad \sigma_y \leq 0 \qquad /38/$$

ρ – коэффициент трения берегов трещин. Отметим, что формулы /36/ имеют место в малой окрестности $(r \ll l)$ вершины трещины.

При определении предельных напряжений для пластины с трещиной существует ряд подходов. В.В.Панасюк и Л.Т.Березницкий [57] предложили для определения предельных напряжений P_* , q_* уравнение

$$\lim_{r\to 0}\left[\sqrt{r}\,\sigma_\beta^*(r, \beta_*)\right] = \frac{K_c}{\sqrt{2\pi}} \qquad /39/$$

где K_c – постоянная, характеризующая сопротивление материала

разрушения; $\sigma_\beta^*(r,\beta_*)$ - напряжения $\sigma_\beta(r,\beta)$ при $P = P_*$ и $q = q_*$. Угол $\beta = \beta_*$, определяющий начальное направление распространения трещины, находится из уравнения

$$\lim_{r\to 0}\left[\sqrt{r}\,\frac{\partial\sigma_\beta(r,\beta)}{\partial\beta}\right]_{\beta=\beta_*} = 0 \qquad /40/$$

Аналогичные предположения выдвинуты в работах Г.П.Черепанова [84], Эрдогана, Си [95]. На основании выражений /36/ - /40/ найдены формулы [56] для определения величины предельных напряжений $P_* \cdot q_* = \eta P_*$, которые для открытых трещин $(\sigma_y \geq 0)$ имеют вид

$$P_* = \frac{K_c}{\sqrt{\pi l}}\sec^2\frac{\beta_*}{2}\left[\cos\frac{\beta_*}{2}\left(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha\right)-\frac{3}{2}(1-\eta)\sin 2|\alpha|\sin\frac{\beta_*}{2}\right]^{-1} \qquad /41/$$

$$\beta_* = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\sqrt{1+8\upsilon^2}}{4\upsilon}\,,\quad \upsilon = \frac{1}{2}\,\frac{(1-\eta)\sin 2|\alpha|}{\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha}$$

для закрытых трещин $(\sigma_y < 0)$

$$|P_*| = \frac{\sqrt{3}\,K_c}{\sqrt{\pi l}}\left[(1-\eta)\sin 2|\alpha|+2\rho\,\mathrm{sign}\,\rho\left(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha\right)\right]^{-1} \qquad /42/$$

Отметим, что формула /41/ при одноосном растяжении получила хорошее экспериментальное подтверждение [58].

В.И.Иоссаковский и И.Т.Рыбка [48], основываясь на энергетических соображениях Гриффитса [103], предложили критерий для вычисления предельных напряжений из условия экстремума свободной энергии тела

$$\frac{\partial}{\partial l}(\Delta\Pi - U) = 0 \qquad /43/$$

где $\Delta\Pi$ - уменьшение потенциальной энергии тела при увеличении трещины, U - энергия, затрачиваемая на образование новых свободных поверхностей. При этом предполагается, что трещина распространяется в своей плоскости. В результате получена следующая формула [48] для предельных напряжений

$$|P_*| = \frac{A}{\sqrt{l}}\,\varphi(\alpha,\eta)\,, \qquad A = \frac{K_c}{\sqrt{\pi}} \tag{44}$$

где

$$\varphi(\alpha,\eta) = \begin{cases} (\sin^2\alpha + \eta^2\cos^2\alpha)^{-1/2}\,, & \sigma_y \geq 0 \\ 2\left[(1-\eta)\sin 2|\alpha|\right]^{-1}\,, & \sigma_y \leq 0 \end{cases} \tag{45}$$

В зависимостях, полученных Нейбером-Рыбкой, не учитывается трения берегов трещин.

П.А.Павлов и Н.Е.Никулина [50] предложили для вычисления предельных напряжений уравнение

$$\lim_{z\to 0}\left[\sqrt{z}\,(\sigma_z+\sigma_\beta)^*\right]_{\beta=\beta_*} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,K_c \tag{46}$$

где $(\sigma_z+\sigma_\beta)^*$ - значение суммы $\sigma_z+\sigma_\beta$ при $\rho=\rho_*$, $\varphi=\varphi_*$. Угол β_* находится из уравнения

$$\lim_{z\to 0}\left[\sqrt{z}\,\frac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_z+\sigma_\beta)\right]_{\beta=\beta_*} = 0 \tag{47}$$

На основании соотношений (36), (46), (47) Павловым и Никулиной получена такая формула для предельных напряжений

$$|P_*| = \frac{A}{\sqrt{l}}\,\varphi(\alpha,\eta,\rho)\,, \qquad A = \frac{K_c}{\sqrt{\pi}} \tag{48}$$

функция $\varphi(\alpha, \eta, \rho)$ имеет различные аналитические представления φ_1, φ_2 в зависимости от типа трещины /открытая или закрытая/:

$$\varphi_1(\alpha, \eta) = (\sin^2\alpha + \eta^2\cos^2\alpha)^{-1/2}, \qquad \sigma_y \geq 0$$

$$\varphi_2(\alpha, \eta, \rho) = 2\left[(1-\eta)\sin 2|\alpha| + 2\rho\, \mathrm{sign}\,\rho(\sin^2\alpha + \eta\cos^2\alpha)\right]^{-1}, \qquad \sigma_y < 0 \qquad /49/$$

Заметим, что формулы Панасюка-Березницкого /41/,/42/ также могут быть представлены в виде /48/ с той лишь разницей, что аналитические выражения функции $\varphi(\alpha, \eta, \rho)$ будут другими.

Для $\sigma_y \geq 0$ или $\sigma_y < 0$, $\rho = 0$ зависимости Павлова-Никулиной совпадают с результатами Мосаковского-Рыбки. При $\sigma_y < 0$ формула Павлова-Никулиной отличается только числовым множителем от соответствующего соотношения /42/, полученного Панасюком-Березницким. Для случая $\sigma_y < 0$, $\rho > 0$ аналогичное к соотношению Павлова-Никулиной выражение для предельных напряжений получено Г.П.Черепановым [85]. Все приведенные здесь формулы для определения предельных напряжений дают результаты мало отличающиеся между собой и хорошо согласующиеся с экспериментальными данными [51] в случае двухосного растяжения ($p \geq 0$, $q \geq 0$). При растяжении-сжатии согласие теоретических данных с экспериментальными [51] существенно зависит от величины коэффициента трения берегов трещин.

Рассмотрим область допустимых значений α для функции $\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)$ при $p > 0$. Согласно выражения /48/ функция $\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)$ не может принимать отрицательные значения. Поэтому при $p > 0$, $q < 0$ эта функция определена в области $\alpha_1 \leq |\alpha| \leq \alpha_0$. При $|\alpha| \leq \alpha_1$ трещина развиваться не может /предельные напряжения бесконечны/. Значение α_1 определяется из условия обраще-

ния в нуль знаменателя функции $f_2(\alpha,\eta,\rho)$ при $\alpha>0$, т.е. α_1 является положительным корнем уравнения

$$(1-\eta)\sin 2\alpha+2\rho(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha)=0$$

Отсюда

$$\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{-1+\eta+\sqrt{(1-\eta)^2-4\rho^2\eta}}{2\rho} \qquad /50/$$

3. Обзор исследований по статистической теории прочности

В последние годы все большее применение находят методы теории вероятностей и математической статистики в различных задачах механики деформируемого твердого тела. Это обусловлено тем, что вводимые в расчет факторы часто носят случайный характер.

Большое влияние на применение аппарата теории вероятностей и математической статистики к проблемам механики твердого деформируемого тела оказывают результаты многолетних исследований В.В.Болотина, В.А.Ломакина, С.Д.Волкова, Г.С.Писаренка, В.Т.Трощенка, А.П.Хусу, Ю.Р.Витенберга, В.А.Пальмова, подытоженных ими в монографиях [7,8,23,43,64,83].

Вероятностные методы эффективно использованы в работах Л.П.Хорошуна [81,82], Б.П.Маслова и Л.П.Хорошуна [44], А.А.Каминского [31-33], Е.С.Переверзева [61,62], С.В.Серенсена и В.С.Стреляева [72], В.С.Стреляева [74], А.И.Чудновского [89], Р.Н.Швеца и В.И.Клейна [90].

Имеется ряд работ, в которых рассмотрено применение вероятностно-статистических методов к определению усталостной прочности тел /расчету на усталость/. К их числу относятся монографии Н.Н.Афанасьева [2], С.Д.Волкова [23], В.Вейбулла [9], В.В.Болотина [7], В.П.Когаева [35], статьи И.А.Биргера [6], В.Н.Москаленка и В.В.Харьковского [47] и других авторов.

Здесь дадим более полный обзор исследований по определению кратковременной статической прочности, выполненных с использованием вероятностно-статистических методов. Теории прочности, построенные с использованием методов теории вероятностей и математической статистики известны под названием статистических теорий прочности. Обзоры ранних работ по статистических теориях прочности имеется в ряде монографий и статей [5,64,79,87,88].

Указание на связь прочности образцов с вероятностными представлениями имеется уже в работе А.П.Александрова и С.Н.Журкова [I]. Ими было экспериментально обнаружено значительное рассеяние пределов прочности, а также масштабный эффект - явление уменьшения среднего значения предела прочности образцов с увеличением их размеров, при разрушении стеклянных, кварцовых нитей. Эти явления авторы связывают с вероятностью встречи наиболее опасного дефекта /трещины/ на поверхности нити. Идея о статистической природе хрупкого разрушения, высказанная А.П.Александровым и С.Н.Журковым [I] была развита многими авторами.

Теория, предложенная В.Вейбуллом [109], основывается на таких предположениях:

I. Прочность образца определяется прочностью его наиболее слабого элемента.

2. Величины прочности отдельных элементов, составляющих образец, независимы.

3. Прочность элемента объема является непрерывной случайной

величиной.

Эти предположения известны теперь под названием гипотезы "наиболее слабого звена" [7,64].

Основной величиной, которой оперирует Вейбулл, является вероятность P хрупкого разрушения образца при растягивающем напряжении меньшем σ. Для вероятности разрушения образца объемом V при простом растяжении Вейбулл получил такое выражение

$$P = 1 - \exp\left[-V\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] \qquad (51)$$

Параметр m, как отмечает Вейбулл, должен характеризовать неоднородность материала.

В настоящее время распределение Вейбулла широко применяется для определения вероятности разрушения хрупких материалов. Методика экспериментального определения параметров σ_0, m описана в работах [28,64,73].

Т.А.Конторова и Я.И.Френкель [37] предложили статистическую теорию хрупкой прочности для случая одноосного растяжения образца. Предполагается, что прочность образца определяется наиболее опасной из всех присутствующих в нем неоднородностей /микротрещин/. В качестве параметра, характеризующего степень опасности каждой неоднородности, выбирается величина хрупкой прочности σ, которую бы имел образец, если бы источником его разрушения была данная неоднородность. Считая, что величина σ распределена по нормальному закону, авторы получили выражения для наиболее вероятного значения хрупкой прочности образца достаточно большого объема. В работе [36] найдено значение наиболее вероятной прочности образцов малых объемов.

Из изложенного выше нетрудно видеть, что в теориях Вейбулла, Конторовой и Френкеля прочность тела в целом определяется прочностью его наиболее слабого первичного элемента из совокупности

статистически распределенных первичных элементов различной прочности, т.е. принимается гипотеза "наиболее слабого звена". Физическая причина различной прочности первичных элементов материала для построения математической теории здесь не играет существенной роли. В математическом плане расчет прочности тела по гипотезе "наиболее слабого звена" сводится к задаче о распределении минимальных значений случайной величины /прочности/. Функция распределения наименьшей величины в выборке дается формулой /21/.

Сравнение результатов Вейбулла, Конторовой и Френкеля осуществлено в работе Эпштейна [100]. В работе [101] анализируется связь распределения Вейбулла с асимптотическим представлением распределения минимальных значений случайной величины. Б.Б.Чечулин [87] дал физическое обоснование результатов Вейбулла с позиций теории Конторовой и Френкеля.

Л.Г.Стракони [71] рассмотрел некоторые аспекты разрушения тел с позиций статистической теории, в частности вопрос моделирования задачи о разрушении тела задачей о разрушении каната, состоящего из стренг, которые в свою очередь состоят из волокон.

Развитие статистической теории прочности поликристаллических тел дано в работах С.Д.Волкова, подытоженных им в монографии [23]. Теория С.Д.Волкова основывается на модели материала как микронеоднородной сплошной среды. Статистическое условие прочности в рассматриваемой теории представляет собой "допуск" заданной величины на вероятность разрушения микрообъемов в сечении тела, в котором действует максимальное растягивающее макронапряжение. В работах А.А.Лебедева [40,41], Д.М.Шура [93,94] также предложен критерий прочности материалов при сложном напряженном состоянии, отражающие статистические аспекты. Результаты С.Д.Волкова, А.А.Лебедева, Д.М.Шура, основанные на предположениях отличных от гипотезы "наиболее слабого звена", дают возможность построения предельных кривых прочности при сложном напряженном состоянии.

В.В.Болотин [7] рассмотрел обобщение теории Вейбулла на случай сложного напряженного состояния, введя понятие приведенного напряжения. Величина приведенного напряжения σ, при котором происходит разрушение тела, принимается автором за предел прочности R тела. Применив гипотезу "наиболее слабого звена" к телу объема V, состоящего из большого числа $n_0 V$ первичных дефектных элементов / n_0 - среднее число дефектов в единице объема/, автор на основании асимптотического представления распределения минимального значения случайной прочности тела записывает в случае однородного напряженного состояния такое выражение для функции распределения величины R

$$F_V(R) = 1 - \exp\left[-c n_0 V (R - \sigma_{min})^m\right] \qquad /52/$$

где σ_{min} - минимальное значение прочности первичных элементов, c и m - параметры, не зависящие от V. Вводя "эталонный объем" V_0 и константу σ_0 размерности напряжения по формуле $c n_0 = \frac{1}{V_0 \sigma_0^{1/m}}$. В.В.Болотин преобразует выражение /52/ к виду

$$F_V(R) = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{R - \sigma_{min}}{\sigma_0}\right)^m\right] \qquad /53/$$

При $\sigma_{min}=0$ и $V_0=1$ это распределение совпадает с распределением Вейбулла /51/.

С.В.Ентдорф [96] предложил статистическую теорию, дающую выражения для вероятности разрушения хрупких материалов при сложном напряженном состоянии. Эта теория основывается на таких предположениях:

I. Рассматриваемый материал является макроскопически изотропной сплошной средой, содержащей равномерно распределенные по объему и случайно ориентированные плоские микротрещины. Взаимо-

действие трещин не учитывается.

2. Наличие трещин не изменяет величину макроскопического напряжения, определяемого по теории упругости. Это предположение накладывает определенные ограничения на размеры и плотность трещин.

3. Предполагается, что данная трещина приводит к разрушению образца, если макроскопическое растягивающее напряжение в материале, нормальное к плоскости трещины превышает критическое напряжение σ_{cr} , характеризующее трещину. Размеры и форма трещин, а также свойства материала специально не оговариваются. Для вероятности разрушения объема V автор получил такую формулу

$$P_f(V,\Sigma) = 1 - \exp\left[-V\int_0^\infty \frac{\Lambda(\Sigma,\sigma_{cr})}{4\pi}\,\frac{dN(\sigma_{cr})}{d\sigma_{cr}}\,d\sigma_{cr}\right] \qquad /54/$$

где $N(\sigma_{cr})$ - функция, представляющая собой плотность трещин, для которых критические напряжения не превышают σ_{cr} ; Σ обозначает напряженное состояние; $\Lambda(\Sigma,\sigma_{cr})$ - площадь пересечения сферы единичного радиуса с поверхностью нормальных напряжений $\sigma_n > \sigma_{cr}$.

В предположении, что

$$N(\sigma_{cr}) = b\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_u} - 1\right)^r, \quad r \geq 1, \quad \sigma_{cr} \geq \sigma_u$$

и $\sigma/\sigma_u \ll 1$. Батдорф привел выражение /54/ для вероятности разрушения при одноосном и двухосном симметричном растяжении к формуле Вейбулла-Болотина

$$P_f = 1 - \exp\left[-V\left(\frac{\sigma-\sigma_u}{\sigma_0}\right)^m\right]$$

При этом установлены такие зависимости:

- одноосное растяжение $(\Sigma = \sigma, 0, 0)$

$$m = z+1\,, \quad \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0}\right)^m = \frac{b}{2(z+1)} \qquad (55)$$

– двухосное растяжение $(\Sigma = \sigma, \sigma, 0)$

$$m = z+0{,}5\,, \quad \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0}\right)^m = z\,b\,B\left(\frac{3}{2}, z\right) \qquad (56)$$

где $B(x,y)$ – бета функция. Таким образом, теория Батдорфа при указанных предположениях сводится к теории Вейбулла с параметрами, зависящими от отношения главных нормальных напряжений.

В работе [99] рассмотрено приложение указанной теории к расчету вероятности разрушения реальных конструкций, используя метод конечных элементов.

Недостатки теории Батдорфа следующие:

1. Учитываются только растягивающие напряжения, нормальные к плоскости трещины. Вследствие этого рассматриваемая теория не применима, если напряжения, нормальные к плоскости трещины, являются сжимающими.

2. При произвольном соотношении главных нормальных напряжений вычисление вероятности разрушения можно осуществить только численными методами.

Некоторые общие соображения по статистическому подходу к хрупкому разрушению, высказанные А.М.Фрейденталем, имеются в книге [69] . Отдельные параграфы сборника [70] посвящены анализу параметров функции распределения прочности Вейбулла и критическим замечаниям относительно статистических теорий прочности.

В рассмотренных выше работах источники разрушения /дефекты структуры/ не вводятся каким образом в расчет. Наряду с преимуществами, такой подход имеет недостаток, ибо предполагаемое исходное распределение пределов прочности дефектных элементов за-

висит, вообще говоря, не только от материала, но и от поля напряжений, действующего на элементы тела. Это объясняется тем, что прочность дефектного элемента определяется не только физико-химической природой материала, а также величиной дефекта и его ориентацией в поле напряжений. Следовательно, для каждого вида нагрузки необходимо знать соответствующую ему функцию распределения прочности первичных элементов. Это обстоятельство играет существенную роль как для материалов с анизотропией дефектности, так и для изотропных материалов при сложном напряженном состоянии.

В литературе известен ряд работ, базирующихся на результатах механики разрушения, а также явном введении в расчет случайных геометрических параметров дефектов, и не имеющих указанного выше недостатка. Рассмотрим теперь эти работы. Фишер и Холломон [102] определили вероятностные характеристики прочности хрупких тел с трещинами при сложном однородном напряженном состоянии. Ими рассмотрено осесимметричное напряженное состояние ($\sigma_x=\sigma_y=\gamma\sigma_z$, $\sigma_z>0$, $\gamma\le 1$). Источниками разрушения считаются дискообразные трещины различных размеров и ориентаций. Предполагается, что плотность распределения размера z трещины следует экспоненциальному закону $f(\frac{z}{h})=e^{-\frac{z}{h}}$, $(h=const)$, а любая ориентация трещины равновероятна. В качестве критерия разрушения принимается условие $\sigma\ge\sigma_k$, где σ - нормальные к плоскости трещины напряжения, $\sigma_k=\frac{A}{\sqrt{z}}$, A - постоянная для данного материала.

При сделанных предположениях Фишер и Холломон находят сначала вероятность неразрушения образца с одной трещиной произвольного размера и ориентации. Для тела, содержащего n трещин указанные авторы определяют вероятность разрушения в предположении независимодействия отдельных дефектов, т.е. на основе гипотезы

"наиболее слабого звена". Для некоторых видов напряженного состояния / $\eta=0$ - одноосное растяжение, $\eta=1$ - гидростатическое растяжение, $\eta=-1$ - растяжение в одном направлении и равное ему сжатие в двух других направлениях/ Бивер и Холломон вычислили значения наиболее вероятной относительной прочности при различном количестве трещин в теле.

П.М.Витвицкий [II] сформулировал схему расчета прочности /предельной нагрузки/ хрупких тел со статистическим распределением характеристик микронеоднородности и дефектности структуры материала тела для случая однородного сложного напряженного состояния. Считается, что материал тела состоит из определенного числа первичных элементов, каждый из которых ослаблен дефектом типа трещины. Определяющие параметры k_j $(j=1,2\dots m)$ физико-механических свойств материала первичных элементов, а также геометрические характеристики a_i $(i=1,2\dots n)$ дефектов считаются случайными. Предполагается также известным условие предельного состояния первичного элемента, представляющее собой зависимость между определяющими параметрами дефектного элемента и предельными значениями действующих на него усилий.

При однородном напряженном состоянии предельные значения главных напряжений $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ можно представить в виде

$$P_1=\varphi(\eta,\xi,a_1\dots a_n,k_1\dots k_m)\,,\quad P_2=\eta P_1\,,\quad P_3=\xi P_1 \qquad (5.1)$$

Функция распределения параметра предельной нагрузки элемента тела вычисляется по формуле для функции распределения функции от случайных величин:

$$F_1(P_1)=\int\limits_{\varphi(\eta,\xi,a_1\dots k_m)<P_1} f(a_1\dots a_n,k_1\dots k_m)\,da_1\dots da_n\,dk_1\dots dk_m \qquad (5.2)$$

где $f(a_1 \dots a_n, k_1 \dots k_m)$ - совместная плотность вероятности случайных параметров $a_i \cdot k_j$; $(i=1,2 \dots n ; j=1,2 \dots m)$. В формуле /58/ интегрирование осуществляется по $n+m$ -мерной области значений параметров $a_i \cdot k_j$, для которых выполняется указанное после знака интегрирования неравенство. Вычисление функции распределения предельной нагрузки всего тела осуществляется на основании гипотезы "наиболее слабого звена".

Эта схема применена автором для определения прочности хрупких пластин со статистическим распределением внутренних [12,13] и поверхностных [14] трещин. В работах [12,14] распределение трещин по ориентации и длине принято равномерным, в работе [13]- равномерным по ориентации, в виде "полутреугольного" закона - по длине. Во всех этих статьях [12-14] геометрические характеристики /ориентации, длины/ трещин считаются статистически независимыми случайными величинами.

При вычислении вероятностных характеристик прочности пластин П.И.Витвицкий [12,13] использовал условие предельного состояния Мосаковского-Рибки /44/ - /45/ не учитывающее трение берегов трещин.

В статье [108] получено уравнение для описания предельного состояния хрупкого тела при двухосном напряженном состоянии на основании формулы Вейбулла для вероятности разрушения. При этом предполагается, что материал тела содержит равномерно распределенные по объему эллиптические трещины, и разрушение наступает при достижении местным окружным напряжением значения теоретической прочности.

Попытка применения результатов механики разрушения осуществлена С.Л.Бегдорфом в работе [97] , в которой используется ранее предложенный автором подход [96] для определения вероятности разрушения при одноосном растяжении хрупких материалов, содер-

ющих дискообразные трещины. Здесь выражения для вероятности разрушения материала выведены на основании принятого, как и в статьях [102,107], экспоненциального распределения размеров трещин.

В работах [104,105] также получены выражения для вероятности разрушения при растяжении хрупкого материала, ослабленного трещинами. При этом считается, что ориентации трещин имеют равномерное распределение, а плотность распределения полудлин трещин представляется в виде произведения степенной и экспоненциальной функций. Определение прочности элемента материала с трещиной осуществляется на основании условия минимума плотности энергии деформации. Для вычисления вероятностных характеристик прочности материала с n трещинами используется гипотеза "наиболее слабого звена".

4. Схема решения задачи о прочности хрупких пластин со стохастическим распределением трещин при сложном напряженном состоянии

Рассмотрим схему расчета вероятностных характеристик прочности при плоском напряженном состоянии пластин, содержащих трещины случайной длины и ориентации. Эта схема приведена в работах [12,13], но здесь внесем добавления, касающиеся учета трения берегов трещин, а также предложим еще один способ вычисления вероятностных характеристик прочности дефектного элемента тела. В заключение будет сформулирована цель диссертационной работы.

Пусть хрупкие пластины растягиваются или сжимаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях напряжениями p и $q = \gamma p$ /рис.2/. Считаем, что пластины изготовлены из однород-

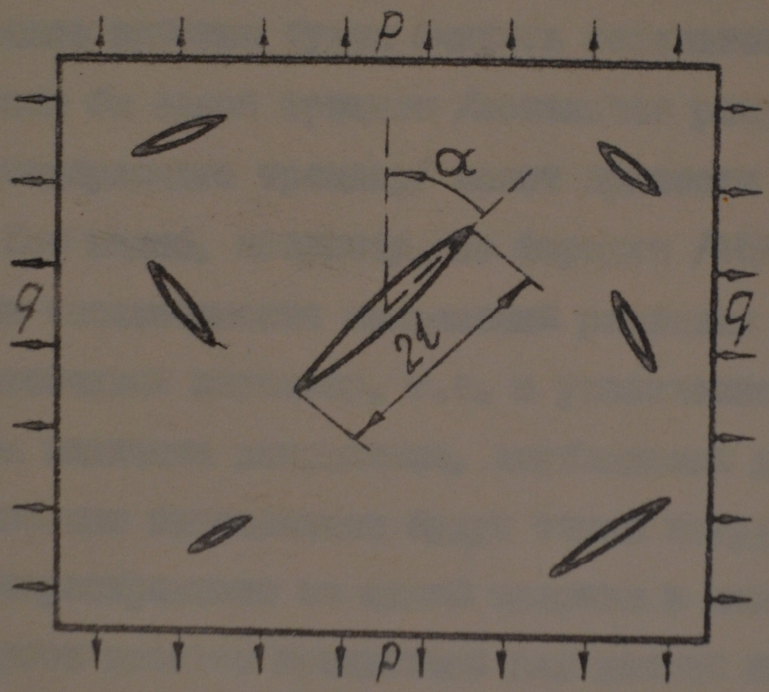


Рис.2.

ного /т.е. с везде одинаковым сопротивлением развитию трещин/ материала, в котором рассеяны невзаимодействующие между собой трещины /рис.2/ случайной длины 2ℓ и ориентации α /α - угол между линией трещины и направлением усилий p /. Дефектность материала будем характеризовать плотностью $f(\alpha,\ell)$ совместного распределения вероятностей случайных величин α , ℓ . Отметим, что геометрические параметры трещин α , ℓ могут быть статистически независимыми или зависимыми. Это, в частности, может зависеть от технологии изготовления материала.

Разрушение пластин будем считать результатом развития трещин. Развитие хотя бы одной трещины /локальное разрушение элемента пластины, содержащего трещину/ может привести к разрушению всей пластины. Как видно, например, из формулы /48/, под действием приложенных на бесконечности напряжений развитие трещины в пластине носит неустойчивый характер, т.е. с увеличением длины трещины уменьшается величина напряжений, необходимых для ее развития.

Для пластины безопасными будут такие нагрузки, которые не приведут к распространению ни одной трещины в ней. Максимальную из таких нагрузок назовем предельной для данной пластины. Максимальная нагрузка, не вызывающая еще развития отдельной трещины в элементе пластины, называется предельной для данного элемента. В случае невзаимодействующих дефектов предельная нагрузка для пластины совпадает с предельной нагрузкой наименее прочного ее элемента. Таким образом, вычисление предельной нагрузки пластины будет аналогичным расчету прочности по гипотезе "наиболее слабого звена", согласно которой прочность тела равна прочности его наиболее слабого элемента.

Для невзаимодействующих дефектов предельные напряжения элемента пластины, содержащего трещину, можно вычислять по формуле, выведенной из решения задачи о бесконечной пластине с трещиной. Как

следует из п.2, эта формула имеет вид /48/, где аналитическое представление функции $\varphi(\alpha, \eta, \rho)$ зависит от типа трещины и от подхода к решению указанной задачи.

Поскольку величины l и α являются случайными, то и предельные нагрузки p . q для дефектного элемента также случайные величины /индексы для обозначения предельных значений опускаем/. При фиксированном η предельная нагрузка определяется одним параметром, например p , и поэтому рассмотрим вероятностные характеристики этого параметра. Функцию распределения вероятностей предельных напряжений p элемента пластины с трещиной определяем по формуле /17/ для функции распределения вероятностей функции от случайных величин. Эта формула в используемых здесь обозначениях имеет вид

$$F_1(|p|, \eta) = \iint_{A l^{-1/2}} f(\alpha, l)\, d\alpha\, dl, \qquad p_{min} < |p| < p_{max} \qquad /59/$$

$$\varphi(\alpha, \eta, \rho) < |p|$$

При $|p| \le p_{min}$ имеем $F_1(|p|, \eta) = 0$. Значение напряжения p_{min} , ниже которого вероятность разрушения равна нулю, назовем пороговым напряжением. В формуле /59/ интегрирование осуществляется по всем возможным значениям параметров l и α , для которых выполняется указанное ниже знака интегрирования неравенство. Величины p_{min} . p_{max} - соответственно наименьшее и наибольшее значения предельной нагрузки при всевозможных значениях l . α . Из формулы /59/ видно, что функция распределения $F_1(|p|, \eta)$ зависит от неслучайной величины η , т.е. от параметра сложности напряженного состояния.

В статистической теории Вейбулла [109], Конторовой-Среницкая [37] и др. предполагается известной сразу функция $F_1(p)$. Для плоского напряженного состояния такой подход в некоторой степени оправдан, хотя он скрывает физические причины разнообра-

зия прочности отдельных элементов тела. Задавая распределение $F_1(\rho)$, указанные авторы учитывали одновременно случайность многих факторов /свойств элементов тела, параметров дефектов этих элементов, причем разных типов дефектов и т.п./.

Предложим еще один способ вычисления вероятностных характеристик /плотности распределения, функции распределения/ предельных напряжений дефектного элемента тела. Из предыдущего известно, что граничные напряжения ρ элемента пластины с одной трещиной определяются по формуле /48/. Согласно этого выражения мы имеем одну случайную величину ρ, являющуюся функцией двух случайных параметров α, l. Для того, чтобы использовать формулу /20/ для плотности распределения преобразованных случайных величин необходимо, как отмечено в книге [80], ввести вторую случайную величину z, являющуюся, вообще говоря, функцией параметров α, l. Примем, что $z = \alpha$. Тогда выражения для параметров α, l как функций величин ρ, z примут вид

$$l = \frac{A^2}{\rho^2} \varphi^2(z, \eta, \rho), \quad \alpha = z \qquad /60/$$

На основании формулы /20/ плотность $h(|\rho|, z)$ совместного распределения вероятностей величин $|\rho|$, z представляется так

$$h(|\rho|, z) = f\left[z, \frac{A^2}{\rho^2} \varphi^2(z, \eta, \rho)\right] |J| \qquad /61/$$

где

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial l}{\partial \rho} & \frac{\partial l}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{2A^2}{|\rho|^3} \varphi^2(z, \eta, \rho) \qquad /62/$$

Плотность распределения $f_1(|\rho|, \eta)$ предельной нагрузки элемента тела с одним дефектом находим, исключая величину $\alpha = z$ путем интегрирования выражения /61/ по α

$$f_1(|\rho|, \eta) = \frac{2A^2}{|\rho|^3} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi^2(\alpha, \eta, \rho) f\left[\alpha, \frac{A^2}{\rho^2} \varphi^2(\alpha, \eta, \rho)\right] d\alpha \qquad /63/$$

$$\rho_{min} < |\rho| < \rho_{max}$$

Пределы интегрирования по α в этой формуле зависят от интервала изменения ориентаций дефектов, от области определения функции $\varphi(\alpha, \eta, \rho)$, а также должны обеспечивать выполнение условия

$$l_{min} \le \frac{A^2 \varphi^2(\alpha, \eta, \rho)}{\rho^2} \le l_{max}, \quad (l_{min} \le l \le l_{max}) \qquad /64/$$

Заметим, что формулу /63/ можно получить также дифференцированием выражения /59/ по переменной ρ.

Предполагая статистическую независимость величин α, l, т.е. что $f(\alpha, l) = f_2(\alpha) \cdot f_3(l)$, на основании формулы /63/ имеем

$$f_1(|\rho|, \eta) = \frac{2A^2}{|\rho|^3} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi^2(\alpha, \eta, \rho) f_2(\alpha) f_3\left[\frac{A^2 \varphi^2(\alpha, \eta, \rho)}{\rho^2}\right] d\alpha \qquad /65/$$

Функцию распределения $F_1(|\rho|, \eta)$ определяем интегрированием выражения /65/ по переменной $|\rho|$

$$F_1(|\rho|, \eta) = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f_2(\alpha) \left\{ \int_{\rho_0}^{|\rho|} \frac{2A^2}{|\rho|^3} \varphi^2(\alpha, \eta, \rho) f_3\left[\frac{A^2 \varphi^2(\alpha, \eta, \rho)}{\rho^2}\right] d|\rho| \right\} d\alpha \qquad /66/$$

где

$$\rho_0 = \frac{A}{\sqrt{l_{max}}} \varphi(\alpha, \eta, \rho) .$$

Вводя в рассмотрение функцию распределения полудлин дефектов $F_3(l)$ и учитывая, что $F_3(l_{max})=1$, преобразуем формулу /66/ к виду

$$F_1(|p|,\gamma)=\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f_2(\alpha)\left\{1-F_3\left[\frac{A^2 l^2(\alpha,\gamma,p)}{p^2}\right]\right\}d\alpha \qquad /67/$$

$$p_{min}<|p|<p_{max}$$

Рассмотрим теперь пластину, содержащую n трещин. Пусть $|p_i|$- прочность /предельная нагрузка/ i -того элемента пластины, содержащего трещину. Тогда предельная нагрузка $|p|$ пластины определится так

$$|p|=\min\{|p_1|\dots|p_n|\} \qquad /68/$$

В таком случае, согласно формулы /21/, имеем для функции распределения предельной нагрузки пластины такое выражение

$$F_n(|p|,\gamma)=1-[1-F_1(|p|,\gamma)]^n \qquad /69/$$

Эта функция по определению равна вероятности локального разрушения пластины /развития хотя бы одной трещины/ при параметре нагрузки меньшем $|p|$

$$F_n(|p|,\gamma)=P(|\tilde{p}|<|p|) \qquad /70/$$

При больших n вместо формулы /69/ можно использовать асимптотическое представление типа /25/. Число n можно считать пропорциональным размеру пластины S_1 или структурному параметру n_0 - среднему числу дефектов в единице площади S_0 $(n=n_0 S_1/S_0)$. Зависимость от S_1 отражает фактор масштаба /при постоянном n_0 /, и наоборот, зависимость от n_0 / S_1 - постоянно/ можно истолковать как фактор повреждённости структуры

материала пластины.

Имея функцию $F_n(|p|,\eta)$ /или $F_1(|p|,\eta)$ / можно найти ряд числовых характеристик случайной предельной нагрузки пластин. Среднее значение $\langle|p|\rangle$ определяется по формуле /6/, которая в нашем случае примет вид

$$\langle|p|\rangle=\int_{p_{min}}^{p_{max}}|p|\frac{dF_n(|p|,\eta)}{d|p|}d|p|\Big/\int_{p_{min}}^{p_{max}}\frac{dF_n(|p|,\eta)}{d|p|}d|p| \qquad /11/$$

Целью настоящей работы является:

- исследование на основании только что рассмотренной схемы вероятностных характеристик прочности стохастически дефектных пластин и аналитическое построение статистических кривых прочности дефектных материалов для случая плоского напряженного состояния при различных исходных предположениях о природе дефектов /трещины или жесткие стержневые включения/, о виде и свойствах поверхностей трещин /прямолинейные гладкие или испытывающие силы трения при соприкасании поверхностей, или в среднем прямолинейные, но стохастически шероховатые/, о законах вероятностного распределения геометрических параметров трещин /ограниченности или неограниченности их длин, равномерного или неравномерного распределения ориентаций трещин/;

- сравнительный анализ полученных результатов и выявление возможностей метода и входных предположений для адекватного описания и прогнозирования прочностных свойств реальных материалов;

- разработка модели для расчета влияния вытяжки стохастически дефектного материала на вероятностные распределения его структурных и прочностных характеристик;

- распространение метода вычисления вероятностных характеристик прочности на случай дефектных пластин, подвергнутых тепловому воздействию;

- исследование влияния малых случайных отклонений формы трещины от прямолинейной на значения предельной нагрузки дефектной пластины /по аналогии с исследованием влияния случайной шероховатости поверхности тела на его напряженно-деформированное состояние/.

Глава I

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ХРУПКИХ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ДЛИН

В этой главе исследуем вероятностные характеристики прочности пластин, ослабленных трещинами случайной ориентации и длины и находящихся в сложном поле напряжений. При этом исходим из постановки задачи и результатов п.4. Предполагаем, что геометрические параметры трещин α , ℓ - независимые случайные величины. Считаем также, что возможные значения параметра α удовлетворяют условию $|\alpha| \le \pi/2$ /тем самым учитываются все возможные ориентации трещин/, а область возможных значений случайной полудлины ℓ трещины является полубесконечной $(0 \le \ell < \infty)$. Предположение о неограниченности случайного размера трещин является упрощением в отношении модели материала и математических выкладок, но оно дает возможность сравнительно просто получить ряд результатов, адекватно отображающих действительность.

Так как случайная величина ℓ может принимать любое неотрицательное значение, то из формулы /48/ видно, что возможные значения предельных напряжений $|p|$ будут находиться на промежутке $(0, \infty)$. Другими словами, наличие в теле с отличной от нуля вероятностью трещин любой длины приводит к нулевому значению порогового напряжения p_{min} . Условие $p_{min} = 0$ физически означает, что при любом значении приложенных к дефектной пластине напряжений p , q существует ненулевая вероятность ее разрушения. Такая ситуация иногда наблюдается в действительности

[70]. В некоторых работах [64, I02, I04, I05] она постулируется.

I.I. Функция распределения предельных напряжений

При сделанных выше предположениях выражение /67/ для функции распределения предельных напряжений элемента пластины с одной трещиной примет вид

$$F_1(|p|,\eta)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha)\left\{1-F_3\left[\frac{A^2\varphi^2(\alpha,\eta,\rho)}{p^2}\right]\right\}d\alpha \qquad /I.I/$$

$$0\le|p|<\infty$$

Здесь из промежутка интегрирования $|\alpha|\le\pi/2$ исключаются те участки, на которых функция $\varphi(\alpha,\eta,\rho)$ не определена.

Для дальнейших вычислений конкретизируем вид распределения полудлин трещин. Из физических соображений плотность распределения $f_3(l)$ размеров трещин должна быть убывающей функцией, т.е. вероятность наличия дефектов должна уменьшаться с ростом их длин. Плотность распределения полудлин трещин примем в виде

$$f_3(l)=\frac{(s-1)\,a^{s-1}}{(l+a)^s}\quad,\quad s>1\ ,\quad 0\le l<\infty \qquad /I.2/$$

Предложенное здесь распределение представляет собой двухпараметрическую статистическую модель / s – параметр формы, a – параметр масштаба/ случайных полудлин дефектов. С ростом параметра s уменьшается вероятность наличия в материале длинных трещин. Вычисляя по формулам /6/. /8/ математическое ожидание $\langle l\rangle$ и дисперсию $D(l)$, имеем

$$\langle l\rangle=\frac{a}{s-2}\quad(s>2)\ ,\quad D(l)=\frac{s-1}{(s-2)^2(s-3)}a^2\quad(s>3) \qquad /I.3/$$

На основании выражений /I.2/ и /4/ формула для функции распределения размеров дефектов запишется так

$$F_3(l)=\int_0^l \frac{(s-1)a^{s-1}}{(l+a)^s}\,dl = 1-\frac{a^{s-1}}{(l+a)^{s-1}} \qquad /I.4/$$

Подставляя выражение /I.4/ в формулу /I.I/, получим

$$F_1(|p|,\eta)=(ap^2)^{s-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha)\left[A^2\varphi^2(\alpha,\eta,\rho)+ap^2\right]^{1-s}d\alpha \qquad /I.5/$$

$$0\le|p|<\infty$$

Пусть пластина содержит n трещин. Тогда функцию распределения предельной нагрузки такой пластины определяем по формуле /69/. При больших n применяем приближенную формулу /25/, которая в данном случае примет вид

$$F_n(|p|,\eta)\simeq 1-\exp(-cn|p|^m)\,,\quad 0\le|p|<\infty \qquad /I.6/$$

Величина m называется параметром однородности материала. Выражение /23/ для определения величины c здесь запишется так

$$c=\lim_{|p|\to 0}\frac{F_1(|p|,\eta)}{|p|^m}\,,\quad c>0\,,\quad m>0 \qquad /I.7/$$

Осуществив предельный переход /I.7/ с учетом выражения /I.5/ и требования конечности величины c, получим

$$m=2(s-1)\,,\quad c=\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha)\,\varphi^{2-2s}(\alpha,\eta,\rho)\,d\alpha \qquad /I.8/$$

В формуле для величины c из области интегрирования $|\alpha|\le\pi/2$ исключаются те промежутки, на которых $\varphi(\alpha,\eta,\rho)$ не определена. Из выражения /I.8/ видно, что параметр однородности материала m

линейно зависит от показателя S распределения полудиск трещин /I.2/. Зависимость функции распределения $F_n(|p|,\eta)$ от соотношения главных напряжений /параметра η / учитывается через величину c .

Для изотропных материалов можно считать все ориентации трещин равновероятными, т.е. $f_2(\alpha)=\frac{1}{\pi}$, $(|\alpha|\le\pi/2)$. Поэтому рассмотрим только случай $p\ge 0$. $-\infty<\eta\le 1$. Функцию $\psi(\alpha,\eta,\beta)$ выберем в виде /49/ как более простом по сравнению с выражениями, вытекающими из формул /41/ - /42/. Тогда из соотношения /I.5/ при $p\ge 0$, $0\le\eta\le 1$ имеем

$$F_1(p,\eta)=\frac{2}{\pi}(ap^2)^{s-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}{A^2+ap^2(\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha)}\right]^{s-1}d\alpha \qquad /I.9/$$

$$0\le p<\infty$$

Для $p\ge 0$. $-\infty<\eta\le 0$ получим

$$F_1(p,\eta)=\frac{2}{\pi}(ap^2)^{s-1}\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_0}\frac{[(1-\eta)\sin 2\alpha+2\beta(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha)]^{2s-2}d\alpha}{\left[4A^2+ap^2((1-\eta)\sin 2\alpha+2\beta(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha)\right)^2]^{s-1}}+\right.$$

$$\left.+\int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}{A^2+ap^2(\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha)}\right]^{s-1}d\alpha\right\} \qquad /I.10/$$

$$0\le p<\infty$$

Напомним, что $\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{-\eta}$. а значение α_1 определяется по формуле /50/.

Наиболее простой вид принимает функция распределения $F_1(p,\eta)$ при $p=q>0$ $(\eta=1)$

$$F_1(p,1)=\left(\frac{ap^2}{A^2+ap^2}\right)^{s-1}, \quad 0\le p<\infty \qquad /I.11/$$

На основании выражений /I.11/ и /69/ проведены вычисления функ-

ции распределения $F_n(P,1)$ /вероятности разрушения $\mathcal{P}$ пластин/ при n = 100 и различных S. Результаты представлены на рис.I.I. Из графиков видно, что имеется определенный диапазон изменения безразмерной величины $\frac{P\sqrt{a}}{A}$, для которого вероятность разрушения мала. С ростом величины S длина этого диапазона увеличивается. При увеличении параметра S возрастают значения предельных напряжений, соответствующих заданной вероятности разрушения.

Для некоторых значений параметра S функция распределения $F_1(P,\eta)$ может быть определена в элементарных функциях. Например, при S = 2 формула /I.9/ преобразуется к виду

$$F_1(P,\eta) = 1 - \frac{2A^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{A^2+\eta^2 aP^2+aP^2(1-\eta^2)\sin^2\alpha} =$$

$$= 1 - A^2\left[(A^2+\eta^2 aP^2)(A^2+aP^2)\right]^{-1/2} \qquad /I.12/$$

$$0 \le P < \infty$$

Здесь использовано значение интеграла [26]

$$\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x} = \frac{\operatorname{sign} a}{\sqrt{a(a+b)}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+b}{a}}\operatorname{tg}x\right), \quad \frac{b}{a} > -1 \qquad /I.13/$$

По формулам /I.12/ и /69/ вычислены зависимости вероятности разрушения пластины от приложенных напряжений для двухосного симметричного $(\eta = 1)$ и одноосного $(\eta = 0)$ растяжения при n = 40, 100. Результаты вычислений показаны на рис.I.2. На этом рисунке сплошные линии соответствуют случаю n = 40, штриховые – n = 100. Как видно из графиков, при одинаковых n двухосное растяжение приводит к уменьшению напряжений, соответствующих заданной вероятности разрушения, по сравнению с

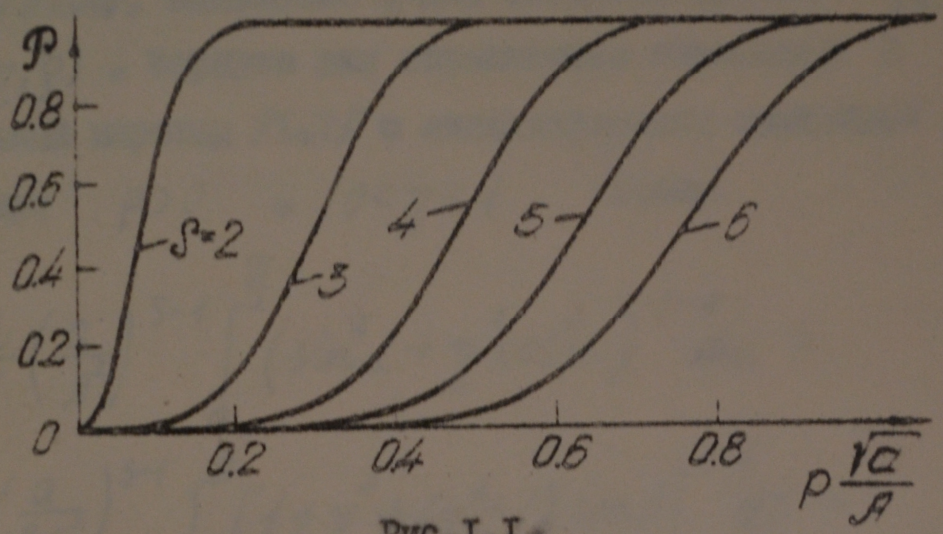

P
0.8
0.6
0.4
0.2
0
S=2
3
4
5
6
0.2
0.4
0.6
0.8
p √c/A

Рис.I.I.

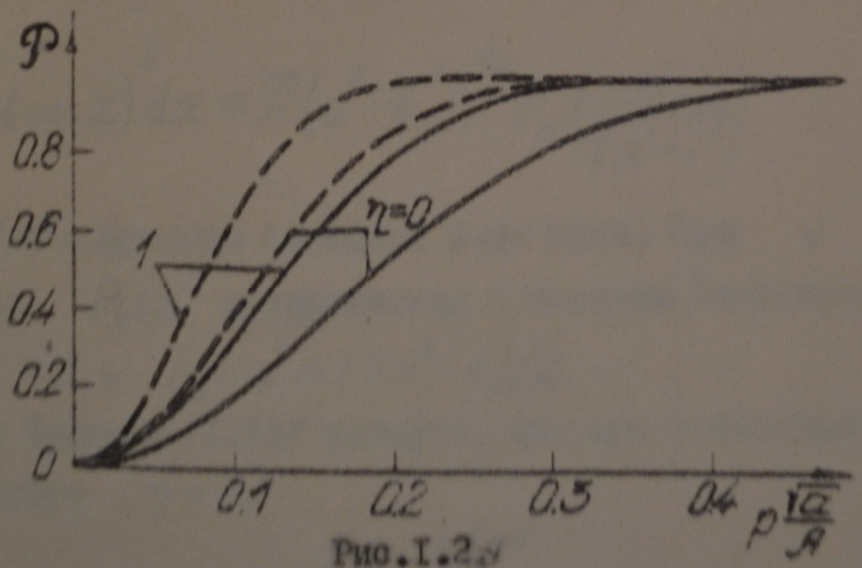

P
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
η=0
0.1
0.2
0.3
0.4
p √c/A

Рис.I.2.

одноосным. Рост числа трещин также ведет к уменьшению напряжений, обеспечивающих заданную вероятность разрушения. При фиксированном уровне напряжений возрастание количества трещин обуславливает увеличение вероятности разрушения.

Теперь продолжим вывод формул для параметра c распределения /I.6/. Выражения для величины c можно получить из формулы /I.8/, подставив в нее значения функций $f_2(\alpha)$ и $\varphi(\alpha, \eta, \beta)$. Формули для определения параметра c дает также предельный переход /I.7/ с использованием выражений /I.9/, /I.10/. Итак, при $p>0$, $0<\eta\leq 1$ имеем

$$c=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha\right)^{s-1}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{2A^2}\right)^{s-1}\int_0^{\pi}\left[1+\eta^2+(\eta^2-1)\cos\beta\right]^{s-1}d\beta= \qquad /I.14/$$

$$=\left(\frac{a\eta}{A^2}\right)^{s-1}P_{s-1}\left(\frac{1+\eta^2}{2\eta}\right)$$

Здесь использовано значение интеграла [26]

$$\int_0^{\pi}(a+b\cos x)^{\nu}dx=\pi(a^2-b^2)^{\nu/2}P_{\nu}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right),\quad a^2>b^2$$

$P_\nu(x)$ - функция Лежандра I-го рода. При $\nu = 0, 1, 2, 3\ldots$ функция $P_\nu(x)$ превращается в полином Лежандра. Например, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=(3x^2-1)/2$.

Из формулы /I.14/ следует, что при двухосном симметричном растяжении ($\eta=1$)

$$c=\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1} \qquad /I.15/$$

Для одноосного растяжения ($\eta=0$) имеем

$$c=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s-2}\alpha\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\left(\frac{4a}{A^2}\right)^{s-1}B\left(\frac{2s-1}{2},\frac{2s-1}{2}\right) \qquad /I.16/$$

где $B(x,y)$ – бэта функция. В формуле /I.16/ использовано значение интеграла [26]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu-1}x\,dx=2^{\mu-2}B\left(\frac{\mu}{2},\frac{\mu}{2}\right)$$

В случае растяжения-сжатия $(\rho>0,\ -\infty<\eta\le 0)$ получим

$$c=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\left\{\frac{1}{4^{s-1}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_0}\left[(1-\eta)\sin 2\alpha+2\rho\left(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha\right)\right]^{2s-2}d\alpha+\right. \qquad /I.17/$$

$$\left.+\int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha\right)^{s-1}d\alpha\right\}$$

При $\rho=-q>0$ $(\eta=-1)$, $\rho=0$ эта формула примет вид

$$c=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2s-2}2\alpha\,d\alpha+\frac{\pi}{4}\right)= \qquad /I.18/$$

$$=\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\left[\frac{2^{2s-3}}{\pi}B\left(\frac{2s-1}{2},\frac{2s-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]$$

I.2. Числовые характеристики случайной прочности пластин

По известным значениям функции распределения $F_n(\rho,\gamma)$ можно определить с помощью численного интегрирования ряд числовых характеристик /среднее значение, дисперсию/ предельных напряжений пластин. Удобные для анализа и вычислений выражения для числовых характеристик прочности пластин получаем в случае большого числа трещин n.

На основании полученных выражений для параметров c, m распределения /I.6/ можно вычислять вероятность разрушения, а также другие вероятностные характеристики прочности пластин с большим числом трещин. Формулы /28/, /29/ для среднего значения $\langle\rho\rangle$ и дисперсии $\mathcal{D}(\rho)$ в данном случае примут вид

$$\langle\rho\rangle=\frac{\Gamma(1+\frac{1}{m})}{(cn)^{1/m}}\quad,\quad \mathcal{D}(\rho)=\frac{\Gamma(1+\frac{2}{m})-\Gamma^2(1+\frac{1}{m})}{(cn)^{2/m}} \qquad /I.19/$$

Зависимость среднего значения и дисперсии предельных напряжений от вида напряженного состояния /параметра γ/, а при $\gamma<0$ и от коэффициента трения берегов трещин ρ, учитывается посредством параметра c. Из выражения /I.17/ видно, что при возрастании ρ величина c уменьшается вследствие увеличения нижнего предела интегрирования α_1 и уменьшения подинтегрального выражения. Тогда величины $\langle\rho\rangle$, $\mathcal{D}(\rho)$ при $\gamma<0$ будут возрастать с ростом ρ.

Формулы /I.19/ показывают, что зависимость числовых характеристик $\langle\rho\rangle$, $\mathcal{D}(\rho)$ случайной прочности от количества трещин n определяется параметром m. На основании выражений /I.15/, /I.16/, /I.18/, /I.19/ построены кривые зависимости средних значений и дисперсий предельных напряжений от числа трещин для некоторых значений параметров γ, m /рис.I.3 - I.6/.

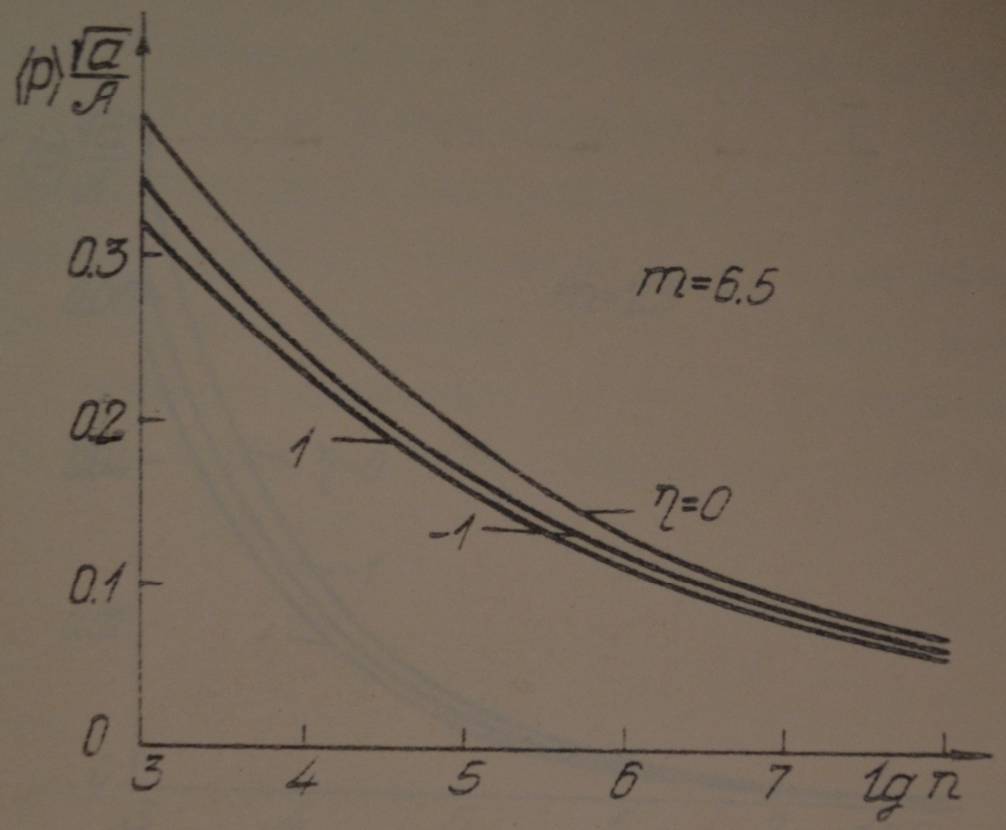

⟨P⟩√a/A
0.3
0.2
0.1
0
m=6.5
1
η=0
-1
3
4
5
6
7
lg n

Рис.I.3.

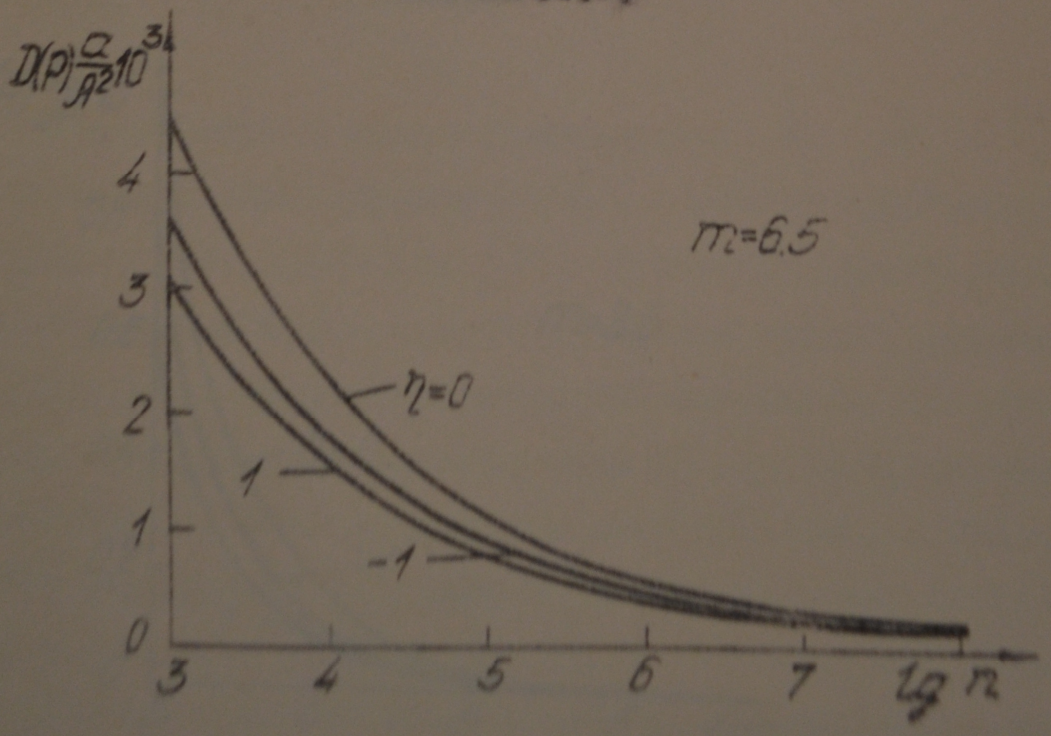

D⟨P⟩a/A²10³
4
3
2
1
0
m=6.5
η=0
1
-1
3
4
5
6
7
lg n

Рис.I.4.

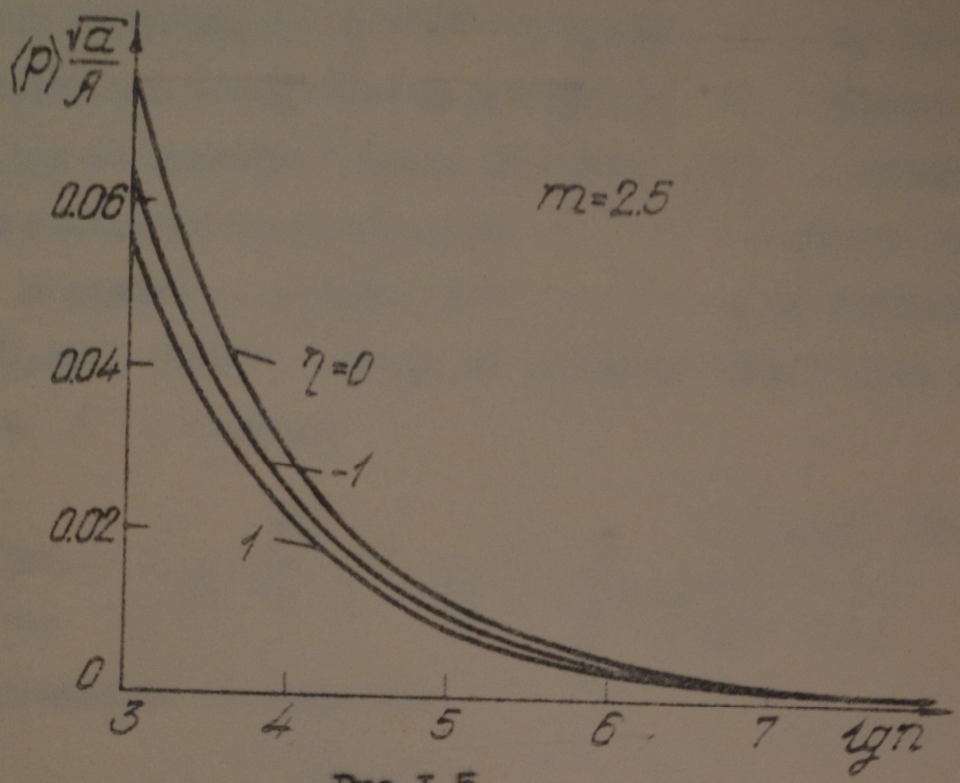

$(P)\frac{\sqrt{a}}{A}$
0.06
0.04
0.02
0
m=2.5
η=0
-1
1
3
4
5
6
7
lgn

Рис.I.5

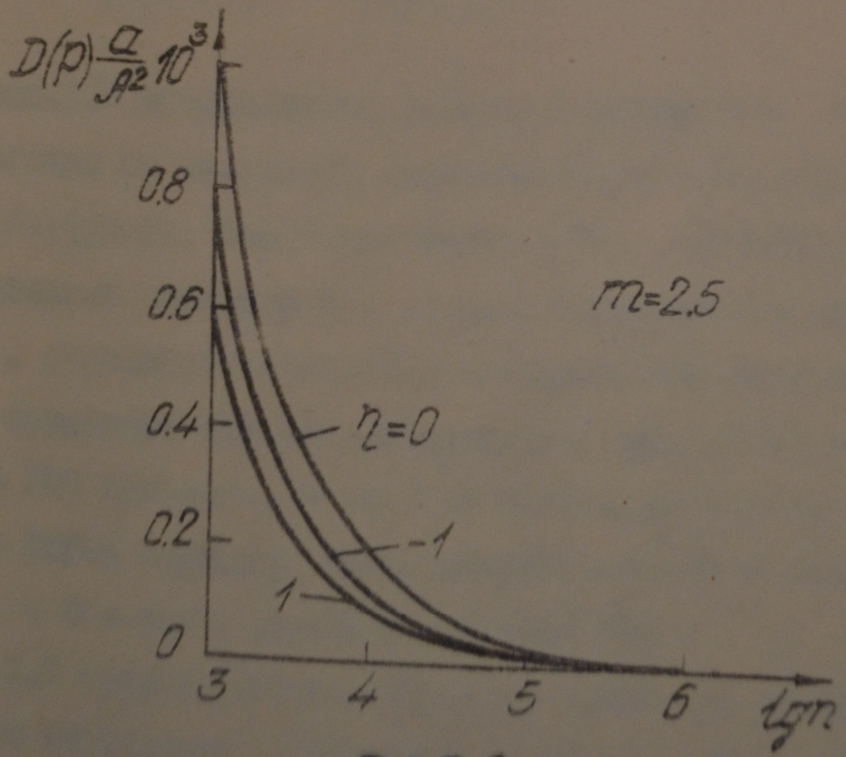

$D(P)\frac{a}{A^2}10^3$
0.8
0.6
0.4
0.2
0
m=2.5
η=0
-1
1
3
4
5
6
lgn

Рис.I.6

Графики показывают, что интенсивность уменьшения среднего значения и дисперсии прочности с ростом n увеличивается при уменьшении значения параметра однородности материала m.

Из формул /I.I9/ видно также, что зависимость числовых характеристик случайной предельной нагрузки P от вида напряженного состояния определяется параметром m. Покажем это более детально на примере средних значений $\langle P \rangle$, сравнивая двухосное симметричное растяжение $(\eta=1)$ и чистый сдвиг $(\eta=-1)$ с одноосным растяжением $(\eta=0)$. Из выражений /I.I9/, /I.I6/, /I.I5/, приняв во внимание зависимость /I.8/ между m и S, получим

$$\lambda = \frac{\langle P \rangle_{\eta=1}}{\langle P \rangle_{\eta=0}} = \frac{2}{\pi^{1/m}} B^{1/m}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \frac{2}{\pi^{1/m}}\left[\frac{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}\right]^{1/m} \qquad /I.20/$$

Здесь использовано соотношение

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

На рис.I.7 представлена кривая зависимости λ от m, построенная на основании формулы /I.20/. В работе А.И.Фридмана, Ю.П.Ануфриева, В.Н.Барабанова [78] приведены средние значения предельных нагрузок при разных соотношениях главных напряжений η, определенные экспериментально при плоском сложно-напряженном состоянии для мелкозернистого типа МПГ-6 и среднезернистого типа ВПП графитов. В этой же работе отмечено, что для графита типа МПГ-6 параметр однородности материала принимает значения $m = 6 \div 6{,}4$, для графита типа ВПП - $m = 9{,}8 \div 10{,}2$. На рис.I.7 треугольниками нанесены значения, вычисленные по результатам отмеченной работы, при этом взяты средние значения параметров однородности материалов $m_ч = 6{,}2;\ 10$.

На основании соотношений /I.I9/, /I.I8/, /I.I6/ имеем

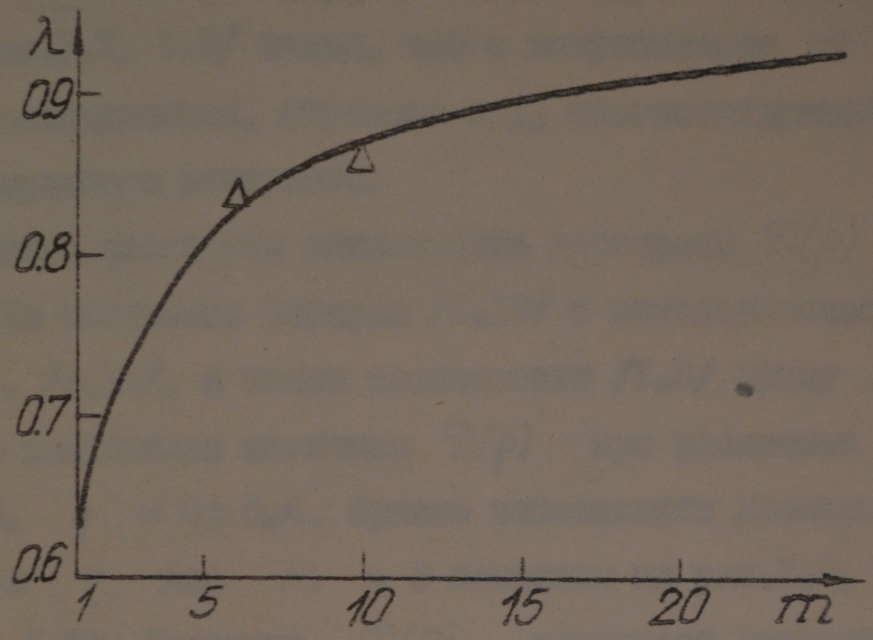


Рис.I.7

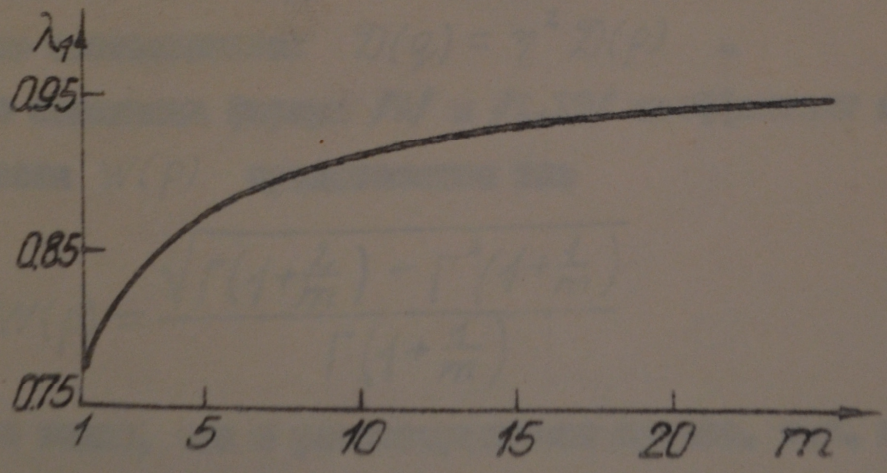


Рис.I.8

$$\lambda_1 = \frac{\langle P\rangle_{\eta=-1}}{\langle P\rangle_{\eta=0}} = 2\left[\frac{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2^{m-1}\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\Gamma(m+1)}\right]^{1/m} \qquad /I.21/$$

Кривая зависимости λ_1 от m показана на рис.I.8. Из графиков /рис.I.7, I.8/ видно, что с возрастанием m величины λ и λ_1 увеличиваются, стремясь к I, соответствующей случаю абсолютно однородного материала.

Теперь исследуем зависимость дисперсии $\mathcal{D}(p)$ от параметра η. На основании формулы /I.I9/ с использованием выражений /I.I7/, /I.I4/, а также зависимости /I.8/ между m и S, проведены вычисления величины $\mathcal{D}(p)$ при различных η для m = = 2; 6, β = 0; 0,4. Кривые зависимости дисперсии $\mathcal{D}(p)$ от параметра η для m = 2 показаны на рис.I.9, для m = 6 - на рис.I.I0. Величина $\mathcal{D}(p)$ достигает максимального значения при η = 0. Трение берегов трещин $(\beta>0)$ приводит к увеличению дисперсии $\mathcal{D}(p)$. Заметим, что величины $\mathcal{D}(p)$ и $\mathcal{D}(q)$ связаны соотношением: $\mathcal{D}(q) = \eta^2\mathcal{D}(p)$.

На основании формул /9/ и /I.I9/ коэффициент изменчивости прочности $W(p)$ представится так

$$W(p) = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)} \qquad /I.22/$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае, т.е. при p_{min} = 0 и больших n, коэффициент изменчивости $W(p)$ зависит только от параметра однородности материала m. Исходя из соотношений $\langle q\rangle = \eta\langle p\rangle$, $\mathcal{D}(q) = \eta^2\mathcal{D}(p)$, легко заметить, что $W(q)=W(p)$. Зависимость /I.22/ представлена графически в монографии В.В.Болотина [7], а также в работе К.А.Казакявичюса [29]. Здесь только упомянем, что величина $W(p)$ является убывающей функцией параметра m. Другими словами, с ростом параметра одно-

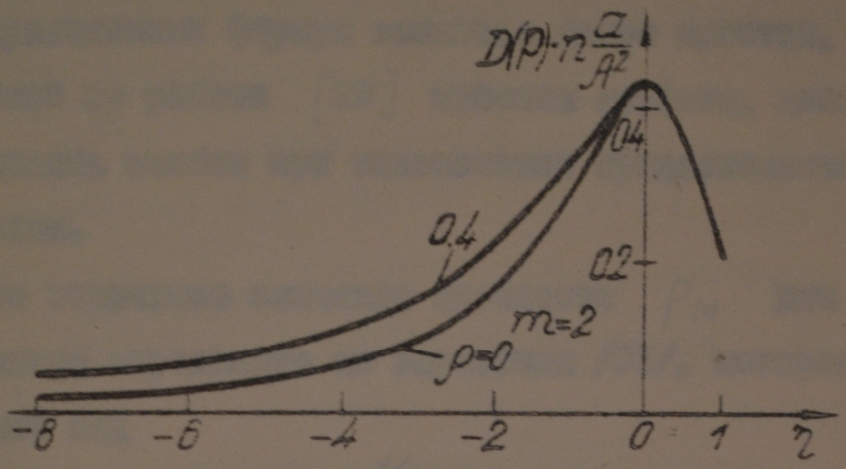


Рис.I.9

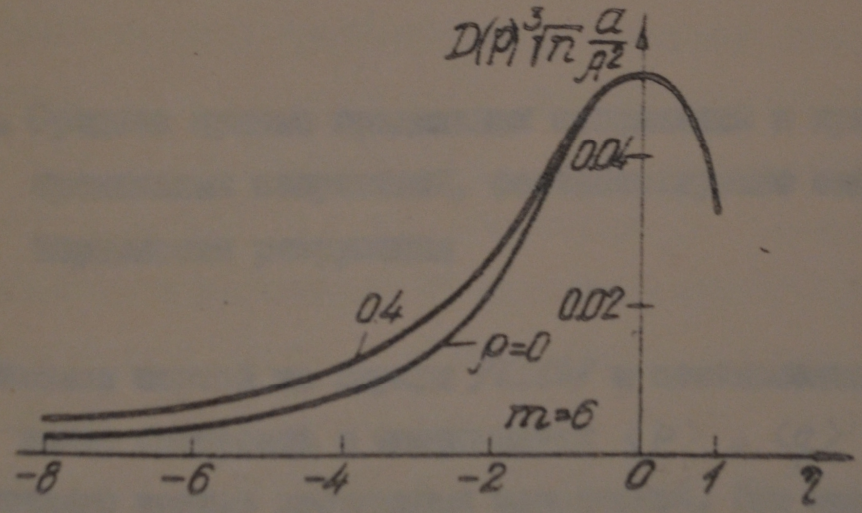


Рис.I.10

родности материала уменьшается величина коэффициента изменчивости прочности. В статье К.А.Казакявичуса [29] приведены приближенные апроксимации к выражению /I.22/. Эти апроксимации имеют вид

$$W(p) = 1{,}05\, m^{-0{,}945}, \quad W(p) = 1{,}17/m$$

Вторая из приведенных формул является более простой, но менее точной. В этой же работе [29] имеются графики, дающие возможность определять ошибки при пользовании предложенными приближенными формулами.

Наиболее вероятное значение прочности p_M для распределения /I.6/ можно определить из выражения /3I/, которое в нашем случае примет вид

$$p_M = \left(\frac{m-1}{c n m}\right)^{1/m} \qquad /I.23/$$

I.3. Средние кривые предельных напряжений и кривые предельных напряжений, соответствующие заданной вероятности разрушения

На основании первой из формул /I.I9/ и соотношения $\langle q \rangle = \eta \langle p \rangle$ можно построить в координатах $\langle p \rangle$, $\langle q \rangle$ так называемые средние кривые предельных напряжений. Эти кривые представляют собой границу области изменения средних значений $\langle p \rangle$, $\langle q \rangle$, безопасных в отношении разрушения пластин при плоском сложном напряженном состоянии.

Рассмотрим ход построения указанных кривых. По формулам /I.I4/, /I.I7/ с учетом зависимости между параметрами m и S

вычисляем значения величины c при различных η. Затем по первой из формул /I.I9/, а также из соотношения $\langle q\rangle = \eta\langle p\rangle$ определяем величины $\langle p\rangle$ и $\langle q\rangle$. Совокупность точек с координатами $(\langle p\rangle, \langle q\rangle)$ образует среднюю кривую предельных напряжений.

Такие кривые для $m=2$ и некоторых значений коэффициента трения берегов трещин ρ представлены на рис.I.II. В силу равномерности распределения трещин по ориентациях указанные кривые симметричны относительно прямой $\langle p\rangle = \langle q\rangle$. Трение берегов трещин $(\rho>0)$ существенно влияет на вид средних кривых предельных напряжений при $\eta<-1$ $(|q|>p)$. Чем больше значение коэффициента ρ, тем кривые принимают более вытянутую форму, т.е. возрастает абсолютная величина отношения средних предельных напряжений при сжатии $(\eta\to-\infty)$ к средним предельным напряжениям при одноосном растяжении $(\eta=0)$. При изменении количества трещин n указанные кривые деформируются с соблюдением подобия, т.е. растягиваются или сжимаются равномерно во всех направлениях.

Если считать среднее число дефектов в единице площади пластины постоянным, то с изменением n проявляется масштабный эффект [5,27,42,63,68,77,87,88,91], интенсивность которого в данном случае, т.е. при $\rho_{min}=0$ и больших n, не зависит от вида напряженного состояния. На основании первого из выражений /I.I9/ легко установить, что для пластин, изготовленных из одного материала, а также содержащих n_1 и n_2 трещин, имеет место при одинаковых отношениях η главных напряжений такое соотношение

$$\frac{\langle p\rangle_1}{\langle p\rangle_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/m}$$

где $\langle p\rangle_i$ $(i=1,2)$ – среднее значение предельных напряжений для пластины, содержащей n_i трещин.

На рис.I.I2 показана сплошной линией средняя кривая предель-

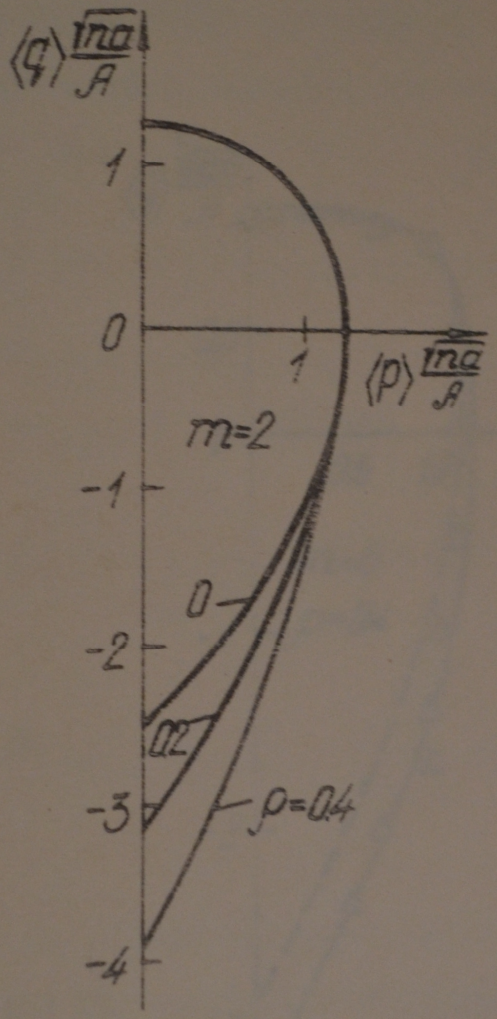


Рис.I.II

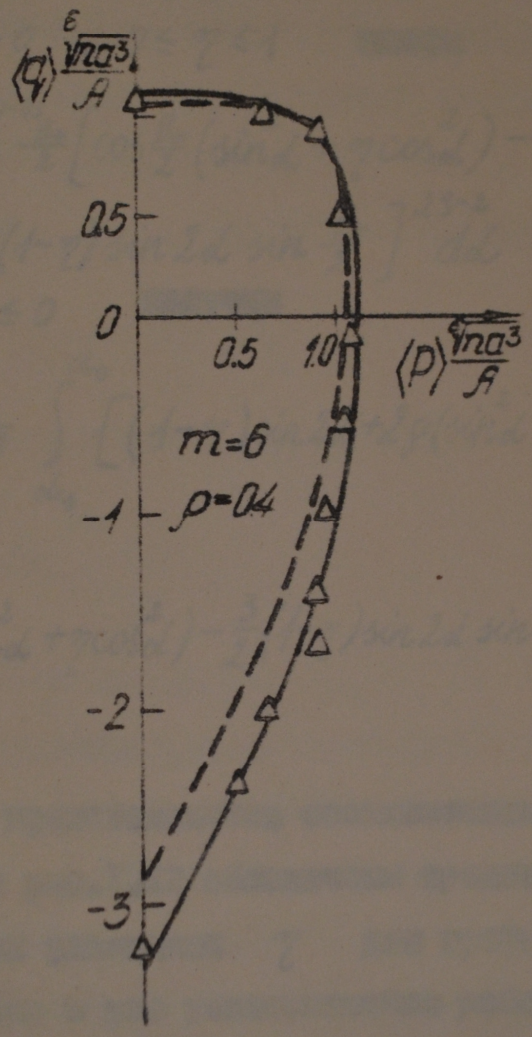


Рис.I.I2

ных напряжений для $m=6$, $\rho=0,4$. Здесь же для сравнения изображена штриховой линией указанная кривая для тех же m , ρ , полученная с использованием детерминистического критерия Панасюка-Березницкого.

Запишем выражения для параметра c на основании указанного критерия. Эти выражения, необходимые при построении отмеченной выше штриховой линии, получаем на основании формул /I.8/, /4I/ - /42/. При $\rho>0$, $0\le\eta\le1$ имеем

$$c=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\int_0^{\pi/2}\sec^{4-4s}\frac{\beta_*}{2}\left[\cos\frac{\beta_*}{2}\left(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha\right)-\right. \qquad /I.24/$$
$$\left.-\frac{3}{2}(1-\eta)\sin 2\alpha\sin\frac{\beta_*}{2}\right]^{2s-2}d\alpha$$

Для $\rho<0$, $-\infty<\eta\le0$ получим

$$c=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A^2}\right)^{s-1}\left\{\frac{1}{3^{s-1}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_0}\left[(1-\eta)\sin 2\alpha+2\rho\left(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha\right)\right]^{2s-2}d\alpha+\right.$$
$$\left.+\int_{\alpha_0}^{\pi/2}\sec^{4-4s}\frac{\beta_*}{2}\left[\cos\frac{\beta_*}{2}\left(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha\right)-\frac{3}{2}(1-\eta)\sin 2\alpha\sin\frac{\beta_*}{2}\right]^{2s-2}d\alpha\right\} \qquad /I.25/$$

Здесь величина β_* представляется соотношениями /4I/.

Треугольниками на рис.I.I2 обозначены средние значения предельных напряжений при различных η для графита МПГ-6, полученные экспериментально в уже упоминавшейся работе [78]. Как видно, совпадение теоретической кривой с экспериментальными данными удовлетворительное.

Из графиков, представленных на рис.I.II, I.I2 видно, что двухосность напряженного состояния приводит к уменьшению средних значений допустимых растягивающих напряжений по сравнению с одноосным растяжением. Такой же характер имеют кривые предельных напряжений, построенные в работах [23, 63, 93, 108], учитывающих определенным образом статистические аспекты прочности.

вывод об уменьшении прочности при двухосном растяжении в сравнении с одноосным, подтверждаемый экспериментально, не вытекает из классических критериев прочности, а также из детерминистических критериев [48,56], основанных на теории трещин.

Перейдем к построению кривых предельных напряжений, соответствующих заданной вероятности разрушения /кривых равной вероятности разрушения/. Пусть вероятность разрушения не может превышать некоторое нормативное значение μ, устанавливаемое на основании опытов или технико-экономических соображений. Тогда на основании распределения /I.6/ напряжения $|p_1|$, соответствующие вероятности разрушения μ, определяем из уравнения

$$\mu = 1 - \exp(-cn|p_1|^m) \qquad /I.26/$$

Решая это уравнение относительно $|p_1|$, имеем

$$|p_1| = \left(\frac{1}{cn}\right)^{1/m} \ln^{1/m} \frac{1}{1-\mu} \qquad /I.27/$$

Это соотношение вместе с выражением $q_1 = \eta p_1$ представляют собой заданное в параметрической форме уравнение кривой предельных напряжений, соответствующих заданной вероятности разрушения. Такие кривые для $m=6$, $\rho=0,4$ и двух значений вероятности разрушения μ представлены на рис.I.I3. При этом значения параметра c определялись по формулам /I.I4/, /I.I7/. Если точка с координатами (p_1, q_1) находится внутри /вне/ области ограниченной кривой и вертикальной осью, то для пластины при действии главных напряжений $p_1 \cdot q_1$ вероятность разрушения будет меньше /больше/ величины μ. С возрастанием назначаемой вероятности разрушения область допустимых значений напряжений $p_1 \cdot q_1$ расширяется.

Сравнение первой из формул /I.I9/ с выражением /I.27/ пока-

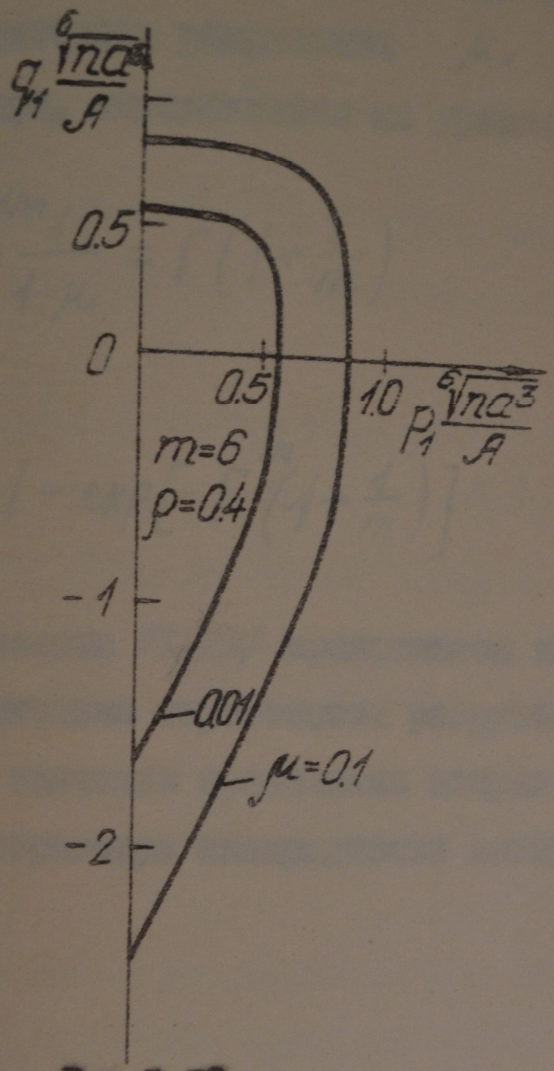


Рис.I.I3

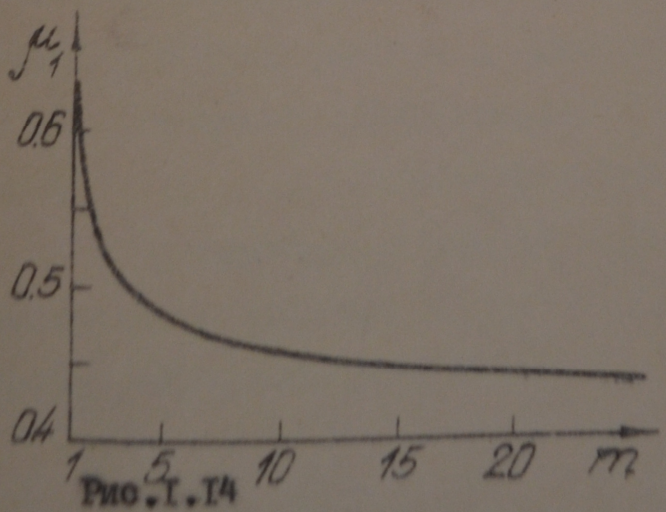


Рис.I.I4

зывает, что средние кривые предельных напряжений и рассматриваемые кривые подобны между собой при одинаковых m , ρ . Значение вероятности разрушения μ_1 , при котором эти обе кривые совпадут, определяется из уравнения

$$\ln \frac{1}{1-\mu_1}^{1/m} = \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) \qquad /I.28/$$

Отсюда

$$\mu_1 = 1 - \exp\left[-\Gamma^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right] \qquad /I.29/$$

График зависимости /I.29/ представлен на рис.I.I4. Из графика видно, что величина вероятности разрушения μ_1 , соответствующая среднему значению предельных напряжений $\langle\rho\rangle$, уменьшается с ростом параметра однородности материала m .

Глава 2

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ ОГРАНИЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ДЛИН

Предположение о возможности существования в материале как угодно больших трещин, принятое в первой главе, не всегда может быть приемлемым /хотя часто является полезным для упрощения решения задачи/. Это относится к таким следствиям этого предположения, как равенство нулю порогового напряжения, отличие от нуля вероятности разрушения пластины при любых /даже весьма малых/ нагрузках, сильная зависимость прочности от масштабного фактора и другим.

Более адекватным действительности является допущение об ограниченности возможных размеров дефектов в материале $/0 \le l \le d$, d - конечная величина/. Используя указанное допущение, в этой главе исследуем вероятностные характеристики прочности хрупких пластин со статистическим распределением трещин при сложном напряженном состоянии. При этом исходим из постановки задачи и результатов п.4. Как и в главе I предполагаем, что геометрические характеристики трещин α , l - независимые случайные величины и ориентации α удовлетворяют условию $|\alpha| \le \pi/2$.

Величина порогового напряжения p_{min} будет определяться на основании формулы /48/ таким выражением

$$p_{min} = \frac{A}{\sqrt{d}} \min_{\alpha} \varphi(\alpha, \gamma, \beta) \qquad /2.1/$$

где $\min_{\alpha} \varphi(\alpha, \gamma, \beta)$ - минимальное значение функции $\varphi(\alpha, \gamma, \beta)$

по аргументу α . Так как $\varphi(\alpha,\eta,\rho)>0$, то в данном случае пороговое напряжение ρ_{min} удовлетворяет условию $\rho_{min}>0$.

2.I. Определение функции распределения предельных напряжений

Вычисление функции распределения предельных напряжений элемента пластины с одной трещиной осуществляем на основании формулы /67/, при этом используем аналитические представления /49/ функции $\varphi(\alpha,\eta,\rho)$. При получении выражений для функции распределения $F_1(\rho,\eta)$ рассмотрим случай $-\infty<\eta\le 1$ $(\eta=q/\rho,\ \rho>0)$. При $1<\eta<\infty$ $(\rho>0)$ или $-\infty<\eta\le 0$ $(q>0)$ функция $F_1(q,\eta_1)$ получается заменой в соответствующих выражениях для $F_1(\rho,\eta)$ ρ на q и η на η_1 $(\eta_1=1/\eta)$. Пределы интегрирования в формуле /67/ определяем на основании условия /64/, которое в данном случае примет вид

$$0\le\frac{A^2\varphi^2(\alpha,\eta,\rho)}{\rho^2}\le d \qquad /2.2/$$

Отмеченные промежутки интегрирования по α для различных диапазонов изменения величин ρ , η показаны схематично /заштрихованы/ на рис.2.Ia-и. На этих рисунках имеются обозначения: B - кривая $\ell=A^2\rho^{-2}\varphi_1^2(\alpha,\eta)$, L - кривая $\ell=A^2\rho^{-2}\varphi^2(\alpha,\eta,\rho)$ /кривые при фиксированных ρ , η , ρ /. Ввиду симметричности промежутки интегрирования показаны на рисунках только для $\alpha>0$.

Предположим, что $0\le\eta\le 1$. Тогда на основании формулы /2.1/ нетрудно установить, что $\rho_{min}=A/\sqrt{d}$. При $\frac{A}{\sqrt{d}}\le\rho\le\frac{A}{\eta\sqrt{d}}$, $(\eta\le 1)$ промежуток интегрирования по α показан на рис.2.Ia. Пределы изменения величины ρ определяем из соотношений /рис.2.Ia/ $A^2/(\rho^2\eta^2)\ge d$, $A^2/\rho^2\le d$. Выражение /67/ для отмеченных диа-

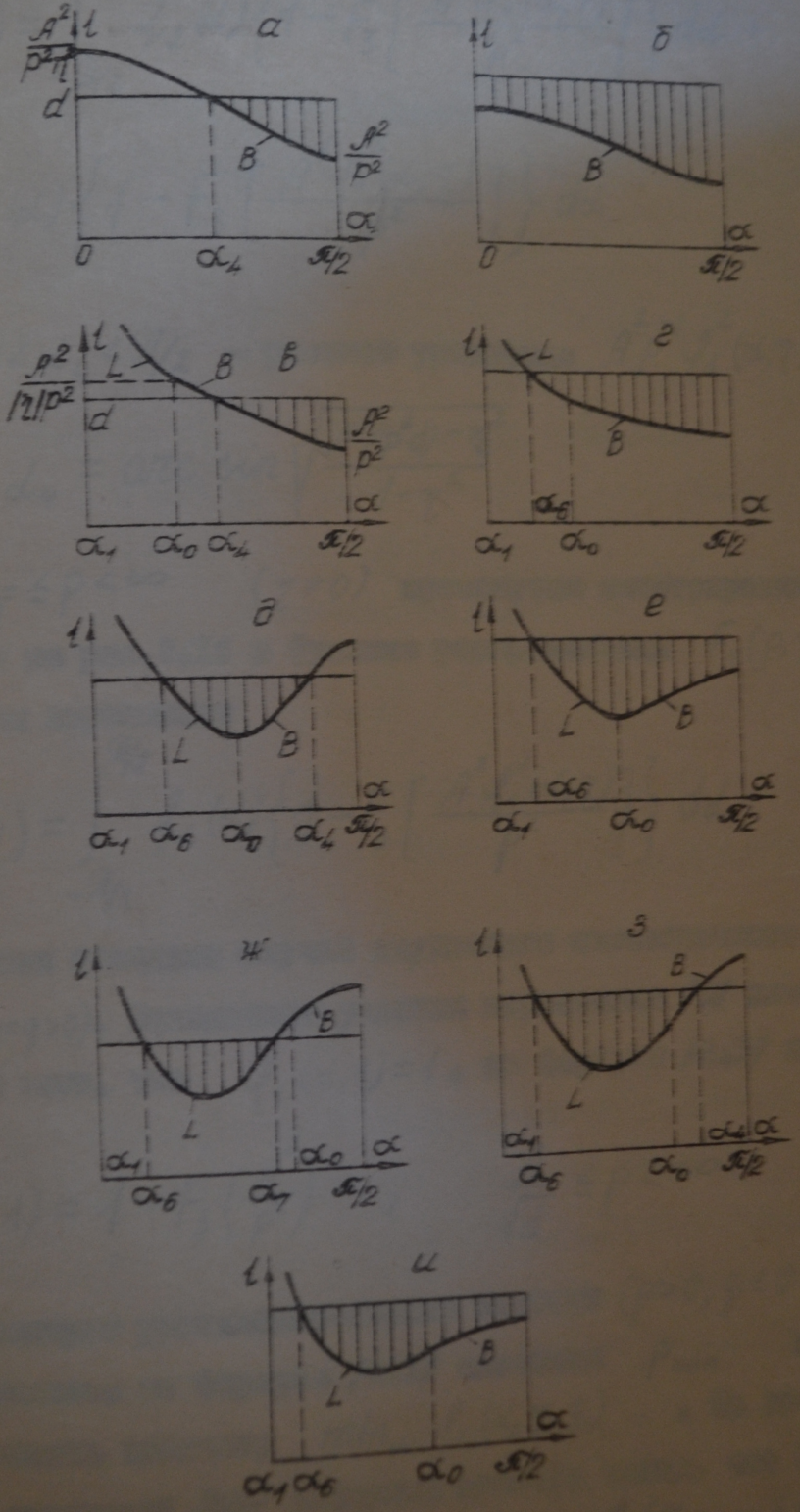


Рис.2.I

пазонов изменения величин ρ и η запишется так

$$F_1(\rho,\eta)=\int_{-\pi/2}^{-\alpha_4} f_2(\alpha)\left\{1-F_3\left[\frac{A^2 f_1^2(\alpha,\eta)}{\rho^2}\right]\right\}d\alpha+$$

$$+\int_{\alpha_4}^{\pi/2} f_2(\alpha)\left\{1-F_3\left[\frac{A^2 f_1^2(\alpha,\eta)}{\rho^2}\right]\right\}d\alpha \qquad /2.3/$$

где $0<\alpha_4<\pi/2$ - решение уравнения $A^2\rho^{-2}f_1^2(\alpha,\eta)=d$

$$\alpha_4=\arcsin\sqrt{\frac{A^2/(\rho^2 d)-\eta^2}{1-\eta^2}} \qquad /2.4/$$

Для $\frac{A}{\eta\sqrt{d}}\le\rho<\infty$ $(\eta\neq 0)$ промежуток интегрирования по α изображен на рис.2.1б и функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ представляется выражением

$$F_1(\rho,\eta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_2(\alpha)\left\{1-F_3\left[\frac{A^2 f_1^2(\alpha,\eta)}{\rho^2}\right]\right\}d\alpha \qquad /2.5/$$

Отметим отдельно случай двухосного симметричного растяжения $(\eta=1,\ p=q>0)$. Вследствие условия нормировки /5/ для плотности $f_2(\alpha)$ и того, что $f_1(\alpha,1)=1$, из формулы /2.5/ получаем

$$F_1(\rho,1)=1-F_3\left(\frac{A^2}{\rho^2}\right),\quad \frac{A}{\sqrt{d}}\le\rho<\infty \qquad /2.6/$$

Рассмотрим растяжение-сжатие пластин $(p>0,\ q\le 0,\ \eta\le 0)$. Для вычисления по формуле /2.1/ значения ρ_{min} нам необходимо определить величину $\min_\alpha f_2(\alpha,\eta,\beta)$. На основании второго из неравенств /49/ нетрудно сделать вывод, что функция $f_2(\alpha,\eta,\beta)$ имеет минимум при $\alpha=\alpha_5=\frac{1}{2}(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{\beta})$. Значение $f_2(\alpha_5,\eta,\beta)$ равно

$$\varphi_2(\alpha_5, \eta, \rho) = b = \frac{2}{(1-\eta)\sqrt{1+\rho^2} + \rho(1+\eta)} \qquad /2.7/$$

Ранее было установлено, что функция $\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)$ определена в области $\alpha_1 \le |\alpha| \le \alpha_0$. Так как $\alpha_5 \ge \pi/4$, то при $-1 \le \eta \le 0$ имеем $\alpha_5 \ge \alpha_0$ и

$$\min_\alpha \varphi_2(\alpha, \eta, \rho) = \varphi_2(\alpha_0, \eta, \rho) = 1/\sqrt{|\eta|}$$

В случае $-\infty < \eta < -1$ возможны два варианта:
1/ $\alpha_5 \ge \alpha_0$ и следовательно $\min_\alpha \varphi_2(\alpha, \eta, \rho) = 1/\sqrt{|\eta|}$;
2/ $\alpha_5 \le \alpha_0$ тогда $\min_\alpha \varphi_2(\alpha, \eta, \rho) = b$.
Условие $\alpha_5 \le \alpha_0$ эквивалентно такому соотношению

$$\eta \le -(\rho + \sqrt{1+\rho^2})^2$$

Отметим также, что в случае $-1 \le \eta \le 0$ функция $\varphi_1(\alpha, \eta)$ принимает наименьшее значение при $\alpha = \pi/2$, $(\varphi_1(\pi/2, \eta) = 1)$.
При $-\infty < \eta < -1$ имеем

$$\min_\alpha \varphi_1(\alpha, \eta) = \varphi_1(\alpha_0, \eta) = 1/\sqrt{|\eta|}$$

Пусть $-1 \le \eta \le 0$. В этом случае на основании формулы /2.1/, а также вышеизложенного, получаем значение $\rho_{min} = A/\sqrt{d}$. Для $A/\sqrt{d} \le \rho \le A/\sqrt{|\eta| d}$, $(\eta \ne -1)$ промежуток интегрирования по α в формуле /67/ показан на рис.2.1в. Диапазон изменения напряжения ρ определяем из соотношений /рис.2.1в/

$$A^2/(|\eta|\rho^2) \ge d, \qquad A^2/\rho^2 \le d$$

Для указанного диапазона изменения величины ρ функция распределения $F_1(\rho, \eta)$ вычисляется по формуле /2.3/. Отсюда можно сделать вывод, что в этом случае вклад в вероятность раз-

рушения дают только открытые трещины. При $A/\sqrt{|\eta|d} \le \rho < \infty$, $(\eta \neq 0)$ промежуток интегрирования по аргументу α изображен на рис.2.1г и выражение для $F_1(\rho,\eta)$ имеет вид

$$F_1(\rho,\eta) = \int_{-\pi/2}^{-\alpha_0} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_1^2(\alpha,\eta)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha +$$

$$+ \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_6} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_2^2(\alpha,\eta,\beta)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha + \qquad /2.8/$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{\pi/2} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_1^2(\alpha,\eta)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha +$$

$$+ \int_{\alpha_6}^{\alpha_0} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_2^2(\alpha,\eta,\beta)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha$$

Величина $\alpha_6 > 0$ является наименьшим корнем уравнения

$$A d^{-1/2} f_2(\alpha,\eta,\beta) = \rho \qquad /2.9/$$

$$\alpha_6 = \operatorname{arc\,tg} \frac{(1-\eta)\beta\sqrt{d} - \sqrt{(1-\eta)^2\beta^2 d - 4(A-\beta\rho\sqrt{d})(A-\eta\beta\rho\sqrt{d})}}{2(A-\beta\rho\sqrt{d})} \qquad /2.10/$$

В частности, при $\rho = A/\beta\sqrt{d}$ имеем $\alpha_6 = \operatorname{arc\,tg}\beta$. При $\beta = 0$ наименьший корень уравнения /2.9/ примет вид

$$\alpha_6 = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{A}{\rho\sqrt{d}}\,\frac{2}{1-\eta}\right) \qquad /2.11/$$

Допустим теперь, что $-(\beta+\sqrt{1+\beta^2})^2 \le \eta \le -1$. Тогда $\rho_{min} = A/\sqrt{|\eta|d}$. При $A/\sqrt{|\eta|d} \le \rho \le A/\sqrt{d}$, $(\eta \neq -1)$ промежуток интегрирования по переменной α изображен на рис.2.1д. Диапазон изменения напряжения ρ находим из выражений

$$\frac{A^2}{\rho^2} f_1^2(\alpha,\eta)/_{\alpha=\frac{\pi}{2}} \geq d \quad , \quad \frac{A^2}{\rho^2} f_1^2(\alpha,\eta)/_{\alpha=\alpha_0} \leq d$$

Для найденного промежутка изменения величины ρ функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ вычисляется по формуле

$$F_1(\rho,\eta) = \int_{-\alpha_4}^{-\alpha_0} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_1^2(\alpha,\eta)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha +$$

$$+ \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_6} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_2^2(\alpha,\eta,\rho)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha + \qquad /2.12/$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{\alpha_4} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_1^2(\alpha,\eta)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha +$$

$$+ \int_{\alpha_6}^{\alpha_0} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_2^2(\alpha,\eta,\rho)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha$$

При $A/\sqrt{d} \leq \rho < \infty$ /рис.2.1е/ функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ задается выражением /2.8/.

Рассмотрим оставшийся еще диапазон $-\infty < \eta \leq -(\rho+\sqrt{1+\rho^2})^2$. В этом случае $\rho_{min} = Ab/\sqrt{d}$. Для $Ab/\sqrt{d} \leq \rho \leq A/\sqrt{|\eta|d}$ промежуток интегрирования по аргументу α показан на рис.2.1ж. Пределы изменения напряжения ρ вычисляются из соотношений

$$\frac{A^2}{\rho^2} f_2^2(\alpha,\eta,\rho)/_{\alpha=\alpha_5} \leq d \quad , \quad \frac{A^2}{\rho^2} f_1^2(\alpha,\eta)/_{\alpha=\alpha_0} \geq d$$

Выражение для $F_1(\rho,\eta)$ запишется в виде

$$F_1(\rho,\eta) = \int_{-\alpha_7}^{-\alpha_6} f_2(\alpha)\left\{1 - F_3\left[\frac{A^2 f_2^2(\alpha,\eta,\rho)}{\rho^2}\right]\right\} d\alpha +$$

$$+\int_{\alpha_6}^{\alpha_7} f_2(\alpha)\left\{1-F_3\left[\frac{A^2 f_2^2(\alpha,\gamma,\beta)}{p^2}\right]\right\}d\alpha \qquad /2.13/$$

где $\alpha_7>0$ является большим корнем уравнения /2.9/ и вычисляется по формуле

$$\alpha_7 = arc\,tg\,\frac{(1-\gamma)p\sqrt{d}+\sqrt{(1-\gamma)^2p^2d-4(A-\beta p\sqrt{d})(A-\gamma\beta p\sqrt{d})}}{2(A-\beta p\sqrt{d})} \qquad /2.14/$$

При $\beta=0$ выражение для α_7 примет вид

$$\alpha_7=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}arc\,sin\left(\frac{A}{p\sqrt{d}}\,\frac{2}{1-\gamma}\right) \qquad /2.15/$$

Формула /2.13/ показывает, что для значений напряжений p из отмеченного выше промежутка вклад в вероятность разрушения дают только закрытые трещины.

При $A/\sqrt{|\gamma|d}\le p\le A/\sqrt{d}$ /рис.2.1з/ функция распределения $F_1(p,\gamma)$ определяется по формуле /2.12/. В случае $A/\sqrt{d}\le p<\infty$ /рис.2.1и/ для вычисления $F_1(p,\gamma)$ имеем выражение /2.8/.

Теперь конкретизируем вид законов распределения случайных величин α и l. Для изотропных материалов естественно считать все ориентации трещин равновероятными, т.е. $f_2(\alpha)=\frac{1}{\pi}$, $(|\alpha|\le\frac{\pi}{2})$. Предполагаем также, что плотность распределения полудлин трещин имеет вид

$$f_3(l)=\frac{\gamma+1}{d}\left(1-\frac{l}{d}\right)^{\gamma},\quad \gamma\ge 0,\quad 0\le l\le d \qquad /2.16/$$

Это распределение является частным случаем обобщенного бета-распределения [80], использующегося для описания большого числа

реальных случайных величин, значения которых ограничены конечным интервалом. Здесь выбран частный случай обобщенного бета-распределения, так как по физическому смыслу функция $f_2(l)$ должна быть не возрастающей. На убывающий характер плотности распределения размеров трещин указывают экспериментальные результаты [106]. Распределение полудлин трещин вида /2.16/ при $\gamma=0$ использовалось в работах [12,14], при $\gamma=1$ – в работах [13, 15,16,18,22]. Распределение /2.16/ является двухпараметрическим, γ – параметр формы, d – параметр масштаба. С ростом параметра γ уменьшается вероятность присутствия в материале длинных трещин.

Среднее значение $\langle l \rangle$ и дисперсия $\mathcal{D}(l)$ случайных полудлин трещин, распределенных по закону /2.16/ представляются выражениями

$$\langle l \rangle = \frac{d}{\gamma+2}, \qquad \mathcal{D}(l) = \frac{\gamma+1}{(\gamma+2)^2(\gamma+3)} d^2 \qquad /2.17/$$

На основании известной плотности $f_3(l)$ определим функцию распределения $F_3(l)$

$$F_3(l) = \int_0^l \frac{\gamma+1}{d}\left(1-\frac{l}{d}\right)^{\gamma} dl = 1-\left(1-\frac{l}{d}\right)^{\gamma+1} \qquad /2.18/$$

Теперь подставим выражения функций $f_2(\alpha)$, $F_3(l)$, $f_1(\alpha,\gamma)$, $f_2(\alpha,\gamma,\beta)$ в формулы для функции распределения $F_1(p,\gamma)$. В случае $0 \le \gamma \le 1$ $(p>0)$ на основании выражений /2.3/, /2.5/ получаем

$$F_1(p,\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_4}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{A^2}{p^2 d}\,\frac{1}{\sin^2\alpha+\gamma^2\cos^2\alpha}\right)^{\gamma+1} d\alpha \qquad /2.19/$$

$$A/\sqrt{d} \le p \le A/(\gamma\sqrt{d}), \quad (\gamma \neq 1)$$

$$F_1(p,\eta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{A^2}{p^2\alpha}\,\frac{1}{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}\right)^{z+1}d\alpha \qquad /2.20/$$

$$A/(\eta\sqrt{\alpha})\le p<\infty\ ,\ (\eta\neq 0)$$

При двухосном симметричном растяжении $(p=q>0,\ \eta=1)$, используя выражения /2.6/, /2.18/ запишем

$$F_1(p,1)=\left(1-\frac{A^2}{p^2\alpha}\right)^{z+1}\ ,\quad \frac{A}{\sqrt{\alpha}}\le p<\infty \qquad /2.21/$$

Предположим, что $-1\le\eta\le 0$, $(p>0,\ q\le 0)$. Для $A/\sqrt{\alpha}\le p\le A/(\sqrt{|\eta|\alpha})$, $(\eta\neq -1)$ имеет место формула /2.19/. При $A/(\sqrt{|\eta|\alpha})\le p<\infty$, $(\eta\neq 0)$ имеем

$$F_1(p,\eta)=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{A^2}{p^2\alpha}\,\frac{1}{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}\right)^{z+1}d\alpha+ \qquad /2.22/$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_6}^{\alpha_0}\left\{1-\frac{A^2}{p^2\alpha}\,\frac{4}{\left[(1-\eta)\sin 2\alpha+2p(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha)\right]^2}\right\}^{z+1}d\alpha$$

Если $q=0$ и $\eta=-1$ $(p=-q>0)$, то выражение /2.22/ преобразуется к виду

$$F_1(p,-1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{A^2}{p^2\alpha}\right)^{z+1}+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_6}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{A^2}{p^2\alpha}\,\frac{1}{\sin^2 2\alpha}\right)^{z+1}d\alpha \qquad /2.23/$$

$$A/\sqrt{\alpha}\le p<\infty$$

В этой формуле значение α_6 определяется выражением /2.11/ при $\eta=-1$, т.е. $\alpha_6=\frac{1}{2}\arcsin\frac{A}{p\sqrt{\alpha}}$.

Пусть $-(q+\sqrt{1+q^2})^2\le\eta\le -1$. Для $A/(\sqrt{|\eta|\alpha})\le p\le A/\sqrt{\alpha}$, $(\eta\neq -1)$

на основании формулы /2.12/ получим

$$F_1(\rho,\eta)=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_4}\left(1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\,\frac{1}{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}\right)^{z+1}d\alpha+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_6}^{\alpha_0}\left\{1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\,\frac{4}{\left[(1-\eta)\sin 2\alpha+2\rho(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha)\right]^2}\right\}^{z+1}d\alpha \qquad /2.24/$$

При $A/\sqrt{\alpha}\le\rho<\infty$ функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ задается выражением /2.22/.

Рассмотрим еще случай $-\infty<\eta\le-(\rho+\sqrt{1+\rho^2})^2$. Для $Ab/\sqrt{\alpha}\le\rho\le A/(\sqrt{|\eta|\alpha})$, используя выражения /2.13/, /2.18/ находим

$$F_1(\rho,\eta)=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_6}^{\alpha_7}\left\{1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\,\frac{4}{\left[(1-\eta)\sin 2\alpha+2\rho(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha)\right]^2}\right\}^{z+1}d\alpha \qquad /2.25/$$

При $A/(\sqrt{|\eta|\alpha})\le\rho\le A/\sqrt{\alpha}$ функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ задается формулой /2.24/, для $A/\sqrt{\alpha}\le\rho<\infty$ имеем выражение /2.22/.

Для хрупкой пластины, содержащей n трещин, функция распределения $F_n(\rho,\eta)$ предельных напряжений ρ находим по формуле /69/.

По полученным выражениям можно определять вероятность разрушения пластин при различных соотношениях, действующих главных нормальных напряжений $\rho\cdot\eta$ с учетом трения берегов трещин.

Для некоторых значений параметра z можно получить выражения функции распределения $F_1(\rho,\eta)$ в элементарных функциях.

Плотность распределения размеров трещин $f_3(l)$, определяемая формулой /2.16/, имеет наиболее простой убывающий характер при $z=1$. В этом случае распределение /2.16/ называют полутреугольным [80].

Запишем аналитические выражения для функции распределения $F_1(\rho,\eta)$ при $z=1$. Необходимые для этой цели интегралы обозначим так:

$$\frac{2}{\pi}\int\left(1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\,\frac{1}{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}\right)^2 d\alpha = \varphi_3(\alpha,\rho,\eta) \qquad /2.26/$$

$$\frac{2}{\pi}\int\left\{1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\,\frac{4}{[(1-\eta)\sin 2\alpha+2\rho(\sin^2\alpha+\eta\cos^2\alpha)]^2}\right\}^2 d\alpha =$$

$$= \varphi_4(\alpha,\rho,\eta) \qquad /2.27/$$

Для введенных функций φ_3 и φ_4, используя таблицы интегралов [26], получим

$$\varphi_3(\alpha,\rho,\eta)=\frac{2}{\pi}\alpha+\frac{1}{\pi}\,\frac{A^4}{\rho^4\alpha^2}\,\frac{1-\eta^2}{2\eta^2}\,\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}+$$

$$+\frac{1}{\pi|\eta|}\,\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\left(\frac{1+\eta^2}{\eta^2}\,\frac{A^2}{\rho^2\alpha}-4\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{|\eta|}\right),$$

$$\eta\neq 0 \qquad /2.28/$$

при $\rho=0$

$$\varphi_4(\alpha,\rho,\eta)=\frac{2}{\pi}\alpha+\left[1-\frac{2}{(1-\eta)^2}\,\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\right]\frac{8}{\pi(1-\eta)^2}\,\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\operatorname{ctg}2\alpha-$$

$$-\frac{16}{3\pi(1-\eta)^4}\,\frac{A^4}{\rho^4\alpha^2}\operatorname{ctg}^3 2\alpha$$

при $\rho > 0$

$$\varphi_4(\alpha,\rho,\eta) = \frac{2}{\pi}\alpha - \frac{8}{\pi}\frac{A^2}{\rho^2 d}\frac{a_3\cos 2\alpha - a_2\sin 2\alpha}{(a_1^2-a_2^2-a_3^2)(a_1+a_2\cos 2\alpha+a_3\sin 2\alpha)} +$$

$$+\frac{16}{\pi}\frac{A^4}{\rho^4 d^2}\left[\frac{a_3\cos 2\alpha - a_2\sin 2\alpha}{3(a_1^2-a_2^2-a_3^2)(a_1+a_2\cos 2\alpha+a_3\sin 2\alpha)^3} +\right.$$

$$+\frac{-4a_2a_3+a_1a_3\cos 2\alpha - 5a_1a_2\sin 2\alpha}{6(a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2(a_1+a_2\cos 2\alpha+a_3\sin 2\alpha)^2} +$$

$$\left.+\frac{-6a_1a_2a_3+(5a_1^2+4a_2^2-4a_3^2)a_3\cos 2\alpha-(11a_1^2+4a_2^2-4a_3^2)a_2\sin 2\alpha}{6(a_1^2-a_2^2-a_3^2)^3(a_1+a_2\cos 2\alpha+a_3\sin 2\alpha)}\right] +$$

$$+\left[\frac{8}{3\pi}\frac{A^4}{\rho^4 d^2}\frac{6a_1^3+9a_1a_2^2-5a_1a_3^2}{(a_1^2-a_2^2-a_3^2)^3} - \frac{8}{\pi}\frac{A^2}{\rho^2 d}\frac{a_1}{a_1^2-a_2^2-a_3^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_1^2}}\ln\frac{(a_1-a_2)\operatorname{tg}\alpha+a_3-\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_1^2}}{(a_1-a_2)\operatorname{tg}\alpha+a_3+\sqrt{a_2^2+a_3^2-a_1^2}} \qquad /2.29/$$

где $a_1=\rho(1+\eta)$, $a_2=-\rho(1-\eta)$, $a_3=1-\eta$. На основа-

Пусть $0<\eta<1$. При $A/\sqrt{d}\le\rho\le A/(\eta\sqrt{d})$

нии формул /2.19/, /2.26/ имеем

$$F_1(\rho,\eta) = \varphi_3\left(\frac{\pi}{2},\rho,\eta\right) - \varphi_3(\alpha_4,\rho,\eta) \qquad /2.30/$$

Для $A/(\eta\sqrt{d}) \le \rho < \infty$ из выражения /2.20/ получаем

$$F_1(\rho,\eta) = \varphi_3\left(\frac{\pi}{2},\rho,\eta\right) - \varphi_3(0,\rho,\eta) \qquad /2.31/$$

В случае одноосного растяжения ($\eta=0$, $\rho>0$) из формулы /2.19/ после вычисления соответствующих интегралов получим

$$F_1(\rho,0) = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{A}{\rho\sqrt{d}} - \frac{4}{3\pi}\frac{A}{\rho\sqrt{d}}\left(1-\frac{A^2}{\rho^2 d}\right)^{\frac{3}{2}} - \qquad /2.32/$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{A}{\rho\sqrt{d}}\sqrt{1-\frac{A^2}{\rho^2 d}}\,, \qquad \frac{A}{\sqrt{d}} \le \rho < \infty$$

При двухосном симметричном растяжении ($\eta=1$, $\rho>0$) подстановка в выражение /2.21/ значения $\eta=1$ дает

$$F_1(\rho,1) = \left(1-\frac{A^2}{\rho^2 d}\right)^2, \qquad \frac{A}{\sqrt{d}} \le \rho < \infty \qquad /2.33/$$

Предположим, что $-1 \le \eta < 0$. При $A/\sqrt{d} \le \rho \le A/(\sqrt{|\eta|d})$, $(\eta \neq -1)$ функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ определяется по формуле /2.30/. Для $A/\sqrt{|\eta|d} \le \rho < \infty$ на основании выражений /2.22/, /2.26/, /2.27/ имеем

$$F_1(\rho,\eta) = \varphi_3\left(\frac{\pi}{2},\rho,\eta\right) - \varphi_3(\alpha_0,\rho,\eta) + \varphi_4(\alpha_0,\rho,\eta) - \varphi_4(\alpha_6,\rho,\eta) \qquad /2.34/$$

При $\rho=0$, $\eta \neq -1$, $\eta=1$ формула /2.23/ после вычисления интегралов примет вид

$$F_1(\rho,-1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{A}{\rho\sqrt{\alpha}}+$$

$$+\left(\frac{2}{3\pi}\,\frac{A^3}{\rho^3\alpha^{3/2}}-\frac{5}{3\pi}\,\frac{A}{\rho\sqrt{\alpha}}\right)\sqrt{1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}}\,,\quad \frac{A}{\sqrt{\alpha}}\le\rho<\infty \qquad /2.35/$$

Рассмотрим случай $-\left(\rho+\sqrt{1+\rho^2}\right)^2\le\eta\le-1$. При $A/\sqrt{|\eta|\alpha}\le\rho\le A/\sqrt{\alpha}$, $(\eta\neq-1)$ на основании формул /2.24/. /2.26/ /2.27/ получаем

$$F_1(\rho,\eta)=\varphi_3(\alpha_4,\rho,\eta)-\varphi_3(\alpha_0,\rho,\eta)+\varphi_4(\alpha_0,\rho,\eta)-\varphi_4(\alpha_6,\rho,\eta) \qquad /2.36/$$

Для $A/\sqrt{\alpha}\le\rho<\infty$ функция распределения предельных напряжений $F_1(\rho,\eta)$ определяется выражением /2.34/.

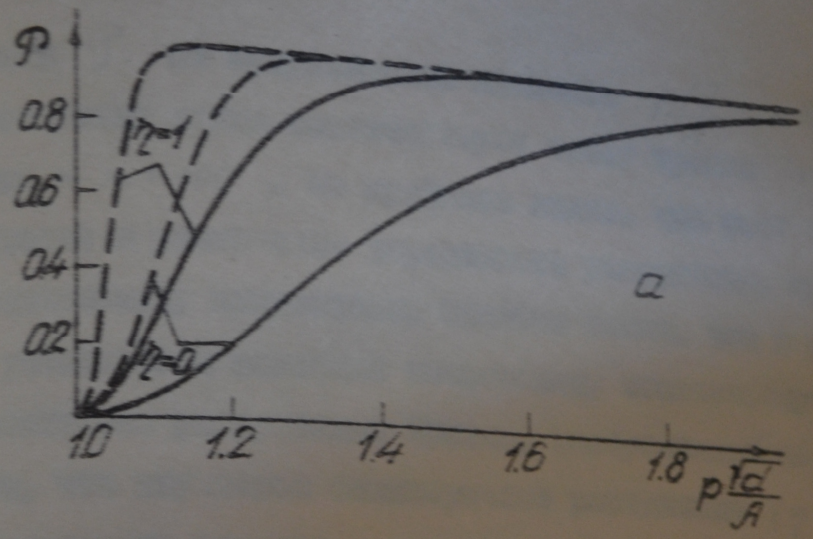
Допустим, что $-\infty<\eta\le-\left(\rho+\sqrt{1+\rho^2}\right)^2$. Используя формулы /2.25/. /2.27/. имеем

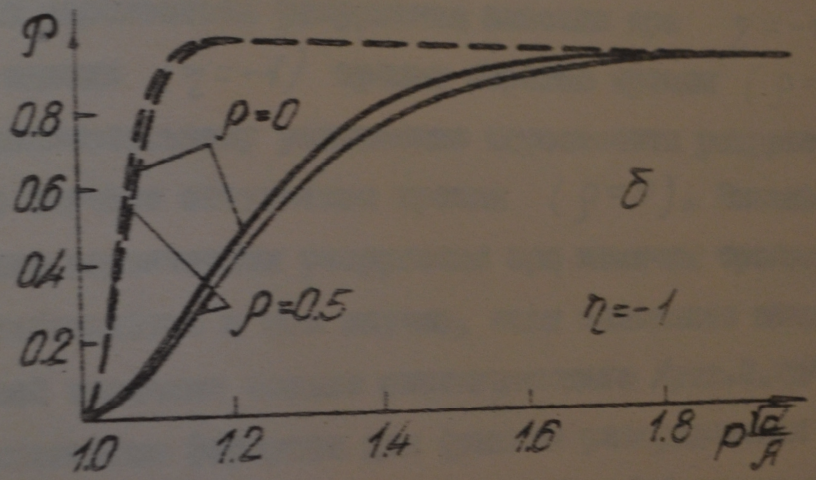
$$F_1(\rho,\eta)=\varphi_4(\alpha_7,\rho,\eta)-\varphi_4(\alpha_6,\rho,\eta)\,,\quad A\sqrt{b}/\sqrt{\alpha}\le\rho\le A/\sqrt{|\eta|\alpha} \qquad /2.37/$$

При $A/\sqrt{|\eta|\alpha}\le\rho\le A/\sqrt{\alpha}$ функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ вычисляется по формуле /2.36/. Для $A/\sqrt{\alpha}\le\rho<\infty$ определение величины $F_1(\rho,\eta)$ осуществляется согласно выражения /2.34/.

В случае $\eta=1$. $\rho=0$ формулы другого вида для функции распределения предельных напряжений получены в работе [13].

На основании выражений /2.32/ - /2.37/ с использованием соотношения /69/ проведены вычисления величины $F_n(\rho,\eta)$ при различных значениях параметров η . ρ . n . Результаты представлены на рис.2.2 в виде кривых зависимости вероятности


P
0.8
0.6
0.4
0.2
η=1
η=0
а
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
p√C/A


P
0.8
0.6
0.4
0.2
ρ=0
ρ=0.5
б
η=-1
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
p√C/A

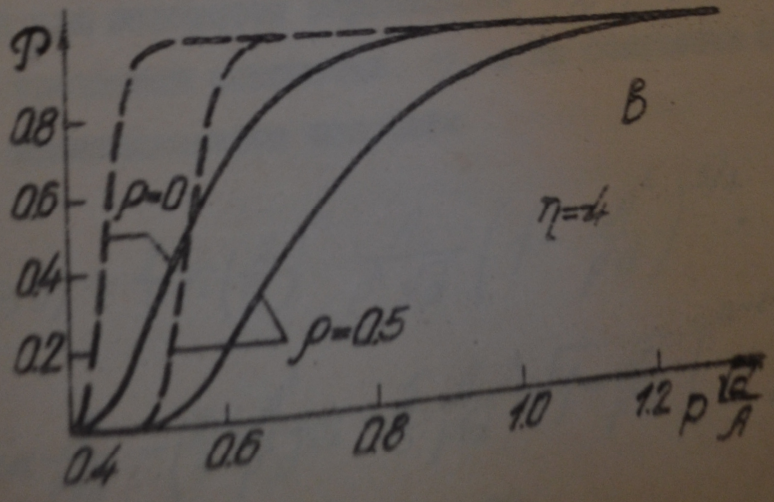

P
0.8
0.6
0.4
0.2
ρ=0
ρ=0.5
в
η=4
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
p√C/A

Рис.2.2

разрушения P от безразмерной величины $p\sqrt{d}/A$. На этих рисунках сплошные линии соответствуют числу трещин $n=10$, штриховые – $n=100$. Из графиков видно, что рост числа трещин n приводит к увеличению вероятности разрушения, соответствующей определенному напряжению. Заметим также, что с ростом числа трещин уменьшается величина напряжения, соответствующего заданной вероятности разрушения. Кривые, изображенные на рис.2.2а показывают, что двухосное симметричное растяжение $(\eta=1)$ увеличивает вероятность разрушения в сравнении с одноосным $(\eta=0)$. На рис.2.2б,в приведены графики, отражающие влияние трения берегов трещин на вероятность разрушения пластин при $\eta=-1,\ -4$. Для чистого сдвига $(\eta=-1)$ трение берегов трещин $(\rho=0{,}5)$ приводит к незначительному уменьшению вероятности разрушения в сравнении со случаем отсутствия трения $(\rho=0)$. Значительное уменьшение вероятности разрушения при наличии трения берегов трещин наблюдается в том случае, если сжимающее напряжение по абсолютной величине больше растягивающего /рис.2.2в/.

По известным формулам для функции распределения $F_1(p,\eta)$, принимая во внимание соотношения /69/ и /2/, можно вычислять плотность вероятности $f_n(p,\eta)$ предельной нагрузки для пластины, содержащей n трещин. В качестве примеров запишем здесь выражения для плотности вероятности $f_n(p,\eta)$ при двух фиксированных значениях параметра η. На основании формул /2.32/, /2.33/ и вышесказанного получаем

$$f_n(p,0)=\frac{8}{3}n\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\frac{A}{p^2\sqrt{d}}\left(1-\frac{A^2}{p^2d}\right)^{3/2}\cdot$$

$$\cdot\left[\arcsin\frac{A}{p\sqrt{d}}-\left(\frac{2}{3}\frac{A^3}{p^3d^{3/2}}-\frac{5}{3}\frac{A}{p\sqrt{d}}\right)\sqrt{1-\frac{A^2}{p^2d}}\right]^{n-1}, \qquad /2.38/$$

$$A/\sqrt{d}\le p<\infty$$

$$f_n(p,1)=4n\left(\frac{A^2}{p^3d}-\frac{A^4}{p^5d^2}\right)\left(\frac{2A^2}{p^2d}-\frac{A^4}{p^4d^2}\right)^{n-1},$$

$$A/\sqrt{d}\le p<\infty \qquad /2.39/$$

По выписанным формулам проведены вычисления плотностей $f_n(p,0)$. $f_n(p,1)$ для двух значений $n=10,100$. Соответствующие графики изображены на рис.2.3. Анализ построенных кривых показывает, что при двухосном симметричном растяжении $(\eta=1)$ наиболее вероятное значение прочности меньше, нежели при одноосном $(\eta=0)$. С ростом количества трещин n имеем уменьшение наиболее вероятного значения прочности.

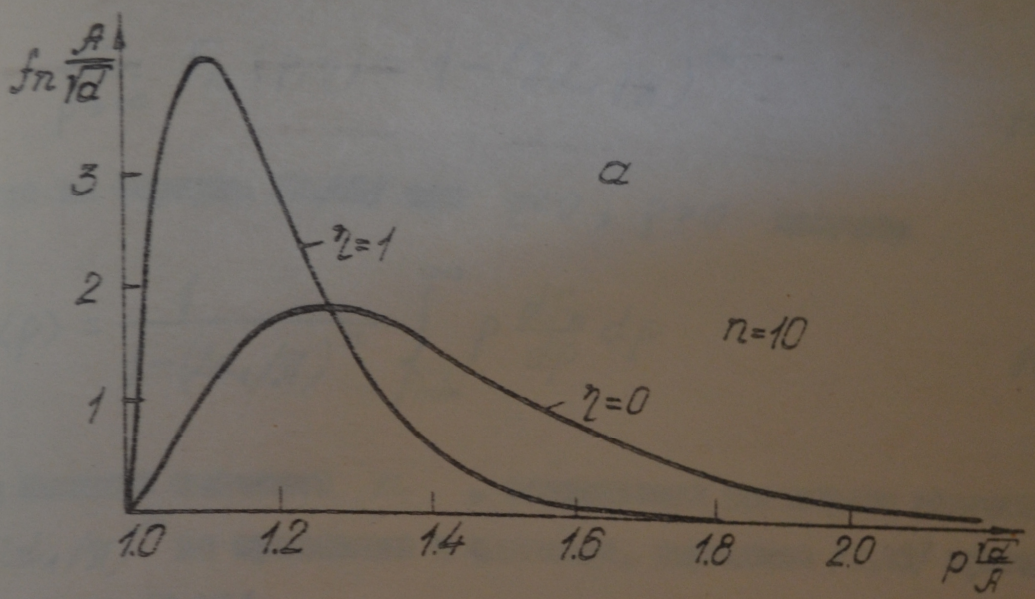
2.2. Средние кривые предельных напряжений

На основании известной функции $F_n(p,\eta)$ можно вычислить ряд числовых характеристик случайной предельной нагрузки. Среднее значение определяется по формуле /71/, которая в нашем случае запишется так

$$\langle p\rangle=\int_{p_{min}}^{\infty} p\frac{dF_n}{dp}dp\Big/\int_{p_{min}}^{\infty}\frac{dF_n}{dp}dp \qquad /2.40/$$

Для одноосного или двухосного растяжения $(0\le\eta\le1)$, а также для растяжения-сжатия $(\eta<0)$ без учета трения берегов трещин $(\varsigma=0)$ выражение /2.40/ интегрированием по частям с использованием соотношений $F_n(p_{min})=0$, $\lim_{p\to\infty}F_n(p)=1$ преобразуется к виду [12.13]

$$\langle p\rangle=p_{min}+\int_{p_{min}}^{\infty}[1-F_n(p,\eta)]dp \qquad /2.41/$$


fn A/√a
3
2
1
а
η=1
n=10
η=0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
p √a/A

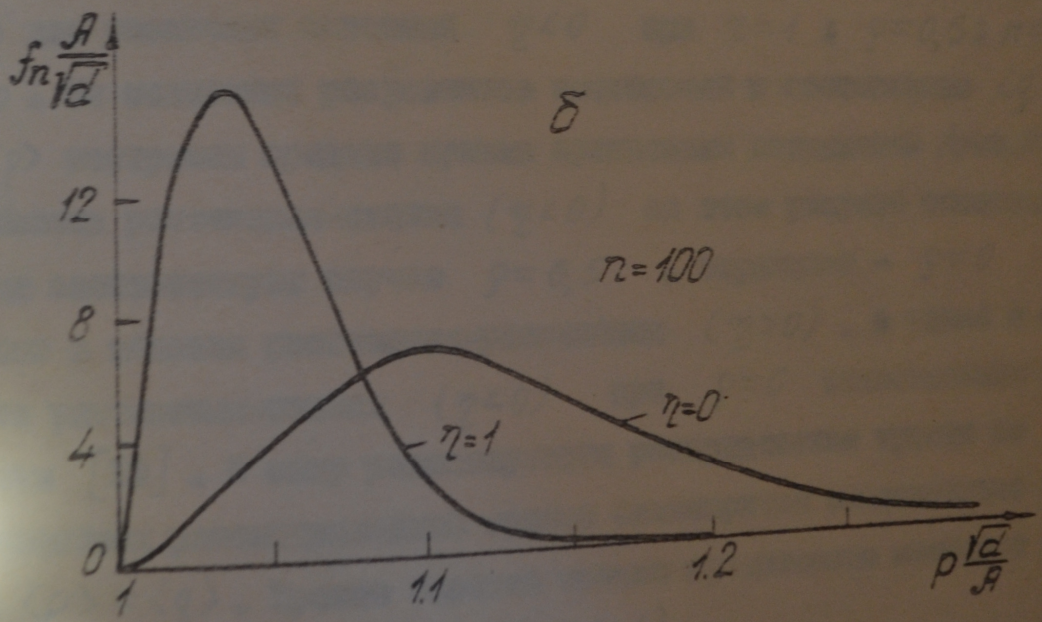

fn A/√a
12
8
4
0
б
n=100
η=0
η=1
1
1.1
1.2
p √a/A

Рис.2.3

При растяжении-сжатии ($\eta<0$) с учетом трения берегов трещин ($\rho>0$) имеет место следующее

$$\lim_{p\to\infty} F_n(p,\eta) = 1-(2\alpha_1/\pi)^n \qquad /2.42/$$

Тогда из формулы /2.40/ при $\eta<0$, $\rho>0$ получаем

$$\langle p\rangle = \frac{1}{1-(2\alpha_1/\pi)^n}\int_{p_{min}}^{\infty} p\,\frac{dF_n}{dp}\,dp \qquad /2.43/$$

Для больших значений n, позволяющих пренебречь величиной $(2\alpha_1/\pi)^n$ по сравнению с единицей, выражение /2.43/ приводится к виду /2.41/.

На основании формулы /2.41/ выполнены вычисления величины $\langle p\rangle$ для различных значений $\eta<0$ при $z=1$; $\rho=0,5$; $n=10$, 100. На основании результатов вычислений и соотношения $\langle q\rangle = \eta\langle p\rangle$ построены средние кривые предельных напряжений /рис.2.4/. В области растяжения-сжатия ($\eta<0$) на этом рисунке сплошные линии соответствуют случаю $\rho=0,5$, штриховые - $\rho=0$. Кривые в области растяжения-растяжения ($\eta>0$), а также в области растяжения-сжатия ($\eta<0$) при $\rho=0$ заимствованы из работы [13]. В силу равномерности распределения трещин по ориентациям рассматриваемые кривые симметричны относительно прямой $\langle p\rangle=\langle q\rangle$. Трение берегов трещин существенно изменяет форму кривых в области $\eta<-1$, $(p<|q|)$.

При возрастании количества трещин n кривые предельных напряжений изменяются без соблюдения подобия, т.е. интенсивность масштабного эффекта зависит от вида напряженного состояния /соотношения главных нормальных напряжений/. Такой же вывод сделан в работах [63,77] на основании анализа полученных эксперимен-

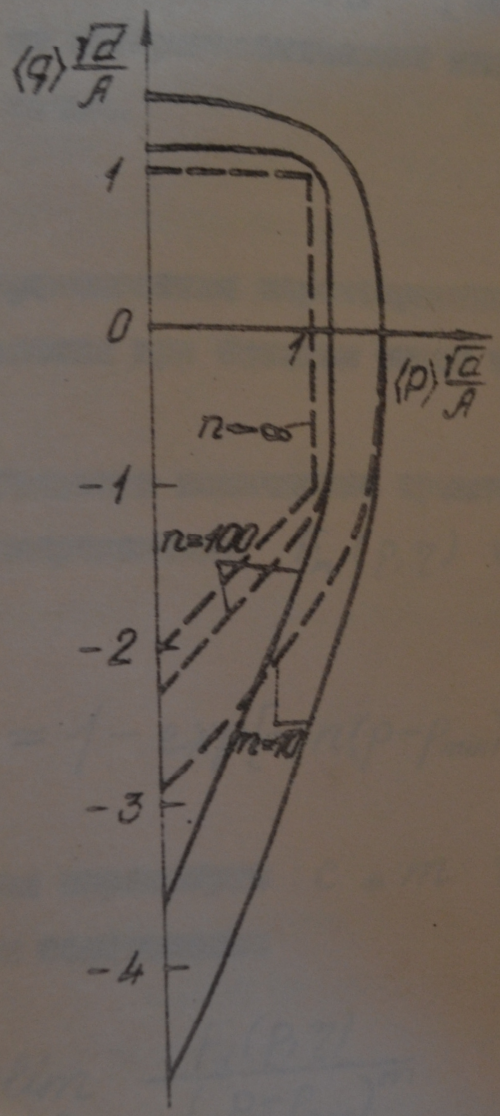


Рис.2.4

тальных кривых предельных напряжений для ряда материалов.

Для $n \to \infty$ имеем $\langle p \rangle \to p_{min}$, $\langle q \rangle \to q_{min} = \eta p_{min}$. Поэтому при $n \to \infty$ статистические кривые предельного состояния /рис.2.4/ переходят в детерминистические кривые минимальных предельных напряжений для пластины, ослабленной различно ориентированными трещинами длины $2d$ [48]. Статистические кривые в отличие от детерминистических являются гладкими, т.е. не имеют угловых точек.

2.3. Вероятностные характеристики прочности пластин при большом числе трещин

В случае большого количества трещин n запишем выражения для функции распределения $F_n(p,\eta)$ на основании формул /21/, /25/ в виде

$$F_n(p,\eta) = 1 - \exp[-cn(p-p_{min})^m], \quad c>0, \; m>0 \; . \qquad /2.44/$$

Для определения параметров c , m распределения /2.44/ типа Вейбулла имеем соотношение

$$c = \lim_{p \to p_{min}} \frac{F_1(p,\eta)}{(p-p_{min})^m} \qquad /2.45/$$

и условие $0<c<\infty$.

Перейдем к вычислению величин c , m для различных видов напряженного состояния /различных значений параметра η/, используя полученные в предыдущем параграфе выражения для функции распределения $F_1(p,\eta)$. В случае двухосного симметричного растяжения ($\eta=1$, $p=q>0$) на основании выражений /2.21/, /2.45/

получаем

$$m = z+1 \qquad /2.46/$$

$$C = \left(\frac{2\sqrt{d}}{A}\right)^{z+1} \qquad /2.47/$$

При вычислении величин C и m для других значений параметра z применим правило Лопиталя. Чтобы получить выражения для производных от функции $F_1(p,z)$ воспользуемся формулами дифференцирования под знаком интеграла.

Пусть некоторая функция $J(y)$ представляется таким интегралом

$$J(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \qquad /2.48/$$

тогда для производной $J'(y)$ имеет место формула [76]

$$J'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y'(x,y)\,dx + \beta'(y) f(\beta(y),y) - \alpha'(y) f(\alpha(y),y) \qquad /2.49/$$

Определим значения параметров C и m при $-1<z<1$. Считая параметр z целым числом, на основании формулы /2.19/, /2.49/ получим для производной z-того порядка по аргументу p функции $F_1(p,z)$ такое выражение

$$F_1^{(z)}(p,z) = \frac{2^{z+1}}{\pi}(z+1)! \cdot \left(\frac{A^2}{p^3 d}\right)^z \cdot$$

$$\cdot \int_{\alpha_4}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2\alpha + z^2\cos^2\alpha}\right)^z \cdot \left(1 - \frac{A^2}{p^3 d}\,\frac{1}{\sin^2\alpha + z^2\cos^2\alpha}\right) d\alpha + \ldots \qquad /2.50/$$

Здесь не приведены слагаемые в виде определенных интегралов от произведений каких-то функций переменной α на функции типа

$$f^s(\alpha)=\left(1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\,\frac{1}{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}\right)^s, \quad s=2,3,4\ldots \qquad /2.51/$$

Дифференцируя выражение /2.50/ по переменной ρ, получаем

$$F_1^{(z+1)}(\rho,\eta)=\frac{2}{\pi}^{z+2}(z+1)!\cdot\left(\frac{A^2}{\rho^3\alpha}\right)^{z+1}\cdot$$

$$\cdot\int_{\alpha_4}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha}\right)^{z+1}d\alpha+\ldots \qquad /2.52/$$

В этой формуле не выписаны слагаемые, содержащие интегралы от произведений каких-то функций аргумента α на функции $f^s(\alpha)$, $(s=1,2,3\ldots)$.

Так как $f^s(\alpha_4)\equiv 0$, $(s=1,2\ldots)$, то все производные от функции $F_1(\rho,\eta)$ до $z+1$ -го порядка включительно не имеют слагаемых без интегралов. При предельном переходе $\rho\to A\alpha^{-1/2}$ указанные производные превращаются в нуль, потому что

$$\lim_{\rho\to A\alpha^{-1/2}}\alpha_4=\frac{\pi}{2} \qquad /2.53/$$

На основании выражений /2.52/, /2.49/, /2.4/ имеем

$$F_1^{(z+2)}(\rho,\eta)=\frac{2}{\pi}^{z+2}(z+1)!\cdot\left(\frac{A^2}{\rho^3\alpha}\right)^{z+2}\cdot\left(\frac{\rho^2\alpha}{A^2}\right)^{z+1}\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{A^2}{\rho^2\alpha}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{A^2}{\rho^2\alpha}-\eta^2\right)^{-1/2}+\ldots \qquad /2.54/$$

В последней формуле не приведены слагаемые в виде интегралов. Эти слагаемые нам не понадобятся, так как на основании соотношения /2.53/ они стремятся к нулю при $p \to Ad^{-1/2}$.

Согласно правила Лопиталя выражение /2.45/ примет вид

$$C = \lim_{p \to Ad^{-1/2}} \frac{F_1^{(z+2)}(p,\eta)}{\left[(p - Ad^{-1/2})^m\right]^{(z+2)}} \qquad /2.55/$$

Верхний индекс $(z+2)$ обозначает производные $z+2$ -го порядка по переменной p от соответствующих выражений.

Используя формули /2.55/, /2.54/ и условие конечности параметра $C > 0$, получаем такую зависимость

$$m = z + \frac{3}{2} \qquad /2.56/$$

Вычисляя предел /2.55/ с учетом соотношений /2.54/, /2.56/, приходим к выражению

$$C = \frac{2^{z+1}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1-\eta^2}} \; \frac{(z+1)!}{\prod_{k=0}^{z+1} \left(z + \frac{3}{2} - k\right)} \left(\frac{\sqrt{d}}{A}\right)^{z+\frac{3}{2}}, \qquad /2.57/$$

$$|\eta| < 1$$

Аналогичным методом вычислим значения параметров C, m распределения /2.44/ при $-\infty < \eta < -1$. При этом для простоты выкладок используем выражение для функции распределения $F_1(p,\eta)$ не учитывающее трение берегов трещин $(\rho = 0)$. На основании формулы /2.25/ при $\rho = 0$ имеем

$$F_1^{(z)}(p,\eta)=\frac{2^{z+1}}{\pi}(z+1)!\cdot\left(\frac{A^2}{p^3 d}\right)^z\cdot$$

$$\cdot\int_{\alpha_6}^{\frac{\pi}{2}-\alpha_6}\left[\frac{4}{(1-\eta)^2\sin^2 2\alpha}\right]^z\cdot\left[1-\frac{A^2}{p^2 d}\,\frac{4}{(1-\eta)^2\sin^2 2\alpha}\right]d\alpha+\ldots \qquad /2.58/$$

Величина α_6 определяется выражением /2.11/. Дальнейшее дифференцирование формулы /2.58/ приводит к таким соотношениям

$$F_1^{(z+1)}(p,\eta)=\frac{2^{z+2}}{\pi}(z+1)!\cdot\left(\frac{A^2}{p^3 d}\right)^{z+1}\cdot$$

$$\cdot\int_{\alpha_6}^{\frac{\pi}{2}-\alpha_6}\left[\frac{4}{(1-\eta)^2\sin^2 2\alpha}\right]^{z+1}d\alpha+\ldots \qquad /2.59/$$

$$F_1^{(z+2)}(p,\eta)=\frac{2^{z+2}}{\pi}(z+1)!\cdot\left(\frac{A^2}{p^3 d}\right)^{z+1}\cdot\left(\frac{p^2 d}{A^2}\right)^{z+1}\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{1-\eta}\,\frac{A}{p^2\sqrt{d}}\left[1-\frac{A^2}{p^2 d}\,\frac{4}{(1-\eta)^2}\right]^{-1/2}+\ldots \qquad /2.60/$$

В последнем выражении не выписаны слагаемые, содержащие интегралы. При предельном переходе $p\to 2Ad^{-1/2}\cdot(1-\eta)^{-1}$ эти слагаемые дают нулевые значения вследствие того, что

$$\lim_{p\to 2Ad^{-1/2}(1-\eta)^{-1}}\alpha_6=\frac{\pi}{4} \qquad /2.61/$$

Для рассматриваемого теперь диапазона изменения параметра η формулу /2.45/ с учетом правила Лопиталя запишем в виде

$$C=\lim_{p\to 2Ad^{-1/2}(1-\eta)^{-1}}\frac{F_1^{(z+2)}(p,\eta)}{\left\{\left[p-2Ad^{-1/2}(1-\eta)^{-1}\right]^m\right\}^{(z+2)}} \qquad /2.62/$$

На основании выражений /2.62/, /2.60/ и условия конечности параметра $C>0$ приходим к линейной зависимости /2.56/ между ве-

личинами m и τ . В результате предельного перехода /2.62/ с использованием формулы /2.60/ получаем

$$C = \frac{(\tau+1)!}{\prod_{K=0}^{\tau+1}\left(\tau+\frac{3}{2}-K\right)} \frac{(1-\eta)^{\tau+\frac{3}{2}}}{\pi} \left(\frac{\sqrt{d}}{A}\right)^{\tau+\frac{3}{2}}, \qquad /2.63/$$

$$-\infty < \eta < -1$$

Вычислим значения параметров C , m для остающегося случая $\eta=-1$, $(\rho=-q)$. Из формул /2.45/, /2.23/ следуют выводы о том, что при $\eta=-1$ величины m и τ связаны зависимостью /2.46/, а параметр C представляется соотношением

$$C = 2^{\tau}\left(\frac{\sqrt{d}}{A}\right)^{\tau+1} \qquad /2.64/$$

Таким образом, на основании полученных здесь выражений для параметров C , m можно вычислять по формуле /2.44/ вероятность разрушения пластин с большим числом трещин при сложном напряженном состоянии.

Как уже отмечалось в обзоре, Батдорф [96] установил линейные зависимости /55/, /56/ между параметром однородности материала и некоторой величиной, характеризующей материал, только для двух случаев напряженного состояния: одноосного и двухосного симметричного растяжения. Согласно Батдорфу, значение параметра однородности материала при двухосном симметричном растяжении меньше на 0,5 его значения при одноосном растяжении.

На основании полученных в данном параграфе выражений для параметра однородности материала m сформулируем более общее в сравнении с Батдорфом утверждение: при ненулевом значении порогового напряжения ($\rho_{min}>0$) параметр однородности материала постоянен для всех случаев растяжения-сжатия за исключением

двухосного симметричного растяжения $(p=q>0)$ и чистого сдвига $(p=-q>0)$; для двух соотношений главных напряжений $(\eta=1,-1)$ имеем уменьшение параметра m на 0,5 в сравнении с другими случаями нагружения. Эффект уменьшения параметра однородности материала при указанных выше соотношениях главных напряжений отмечен качественно также на стр.152 монографии Г.С.Писаренко и А.А.Лебедева [63].

Уменьшение параметра m при $\eta=1$ и $\eta=-1$ означает, что в этих случаях материал, ослабленный трещинами, является более неоднородным, нежели при других соотношениях главных напряжений. Это согласуется с физическими представлениями, так как выражения /48/, /49/ показывают, что при η отличных от значений $\eta=1;-1$ открытые трещины заданной длины менее опасны нежели трещины той же длины в случае $\eta=1;-1$.

Перейдем к вычислению среднего значения $\langle p\rangle$, дисперсии $\mathcal{D}(p)$ и коэффициента изменчивости $W(p)$ предельных напряжений, распределенных по закону /2.44/. При этом используем выражения /28/, /29/ для среднего значения и дисперсии случайной величины, имеющей распределение Вейбулла /26/, а также установленные выше зависимости для параметров c и m.

Для $-1<\eta<1$ имеем

$$\langle p\rangle=\frac{A}{\sqrt{d}}\left\{1+\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}{2n^{1/m}}\left[\frac{\pi\sqrt{1-\eta^2}\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)}{(m-0,5)!}\right]^{1/m}\right\} \qquad /2.65/$$

$$\mathcal{D}(p)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)}{4n^{2/m}}\left[\frac{\pi\sqrt{1-\eta^2}\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)}{(m-0,5)!}\right]^{2/m}\frac{A^2}{d} \qquad /2.66/$$

$$W(\rho)=\frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{m})-\Gamma^2(1+\frac{1}{m})}\left[\pi\sqrt{1-\eta^2}\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)\right]^{1/m}}{2\left[n(m-0,5)!\right]^{1/m}+\Gamma(1+\frac{1}{m})\left[\pi\sqrt{1-\eta^2}\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)\right]^{1/m}} \qquad /2.67/$$

В случае $-\infty<\eta<-1$ получаем

$$\langle\rho\rangle=\frac{A}{\sqrt{d}(1-\eta)}\left\{2+\frac{\Gamma(1+\frac{1}{m})}{n^{1/m}}\left[\frac{\pi\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)}{(m-0,5)!}\right]^{1/m}\right\} \qquad /2.68/$$

$$\mathcal{D}(\rho)=\frac{\Gamma(1+\frac{2}{m})-\Gamma^2(1+\frac{1}{m})}{(1-\eta)^2}\left[\frac{\pi\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)}{n(m-0,5)!}\right]^{2/m}\frac{A^2}{d} \qquad /2.69/$$

$$W(\rho)=\frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{m})-\Gamma^2(1+\frac{1}{m})}\left[\pi\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)\right]^{1/m}}{2\left[n(m-0,5)!\right]^{1/m}+\Gamma(1+\frac{1}{m})\left[\pi\prod_{k=0}^{m-0,5}(m-k)\right]^{1/m}} \qquad /2.70/$$

Заметим, что выражения /2.65/ – /2.70/ справедливы только для дискретных значений параметра однородности материала $m=1,5;2,5;3,5\ldots$. Из формул /2.65/ – /2.66/, /2.68/ – /2.69/ видно, что с возрастанием абсолютного значения параметра η убывают величины $\langle\rho\rangle$, $\mathcal{D}(\rho)$.

При $\eta=1,-1$ удается записать формулы для вероятностных характеристик предельных напряжений, применимые для любых значений параметра $m\geq 1$.

Для случая $\eta=1$, $(\rho=q>0)$ находим

$$\langle\rho\rangle=\frac{A}{\sqrt{d}}\left[1+\frac{\Gamma(1+\frac{1}{m})}{2n^{1/m}}\right] \qquad /2.71/$$

$$D(p) = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})}{4n^{2/m}} \frac{A^2}{d} \qquad /2.72/$$

$$W(p) = \frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})}}{2n^{1/m} + \Gamma(1+\frac{1}{m})} \qquad /2.73/$$

При $\eta=-1$, $(p=-q>0)$ получим

$$\langle p \rangle = \frac{A}{\sqrt{d}}\left[1 + \frac{2^{1/m}\,\Gamma(1+\frac{1}{m})}{2n^{1/m}}\right] \qquad /2.74/$$

$$D(p) = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})}{(2^{m-1}n)^{2/m}} \frac{A^2}{d} \qquad /2.75/$$

$$W(p) = \frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})}}{(2^{m-1}n)^{1/m} + \Gamma(1+\frac{1}{m})} \qquad /2.76/$$

Формулы /2.65/ - /2.76/ показывают, что среднее значение, дисперсия и коэффициент изменчивости прочности уменьшаются при возрастании параметра n, т.е. при увеличении объема тела, если число трещин в единице объема материала постоянно. Вывод об уменьшении среднего значения, дисперсии и коэффициента изменчивости прочности с ростом объема тела сделан также Г.В.Громовым [27] на основе анализа экспериментальных данных Е.М.Шевандина и В.С.Маневича [91].

На основании выражений /2.65/, /2.66/, /2.71/, /2.72/, /2.74/, /2.75/ выполнены вычисления средних значений и дисперсий пре-

дельных напряжений при различных значениях параметров η, n, m. Результаты вычислений показаны на рис.2.5, 2.6. Как видно из графиков, наибольшая интенсивность уменьшения величин $\langle p \rangle$, $\mathcal{D}(p)$ с ростом числа трещин n имеет место при одноосном растяжении $(\eta=0)$.

В заключение отметим некоторые сравнительные выводы исследований, выполненных в первой и второй главах.

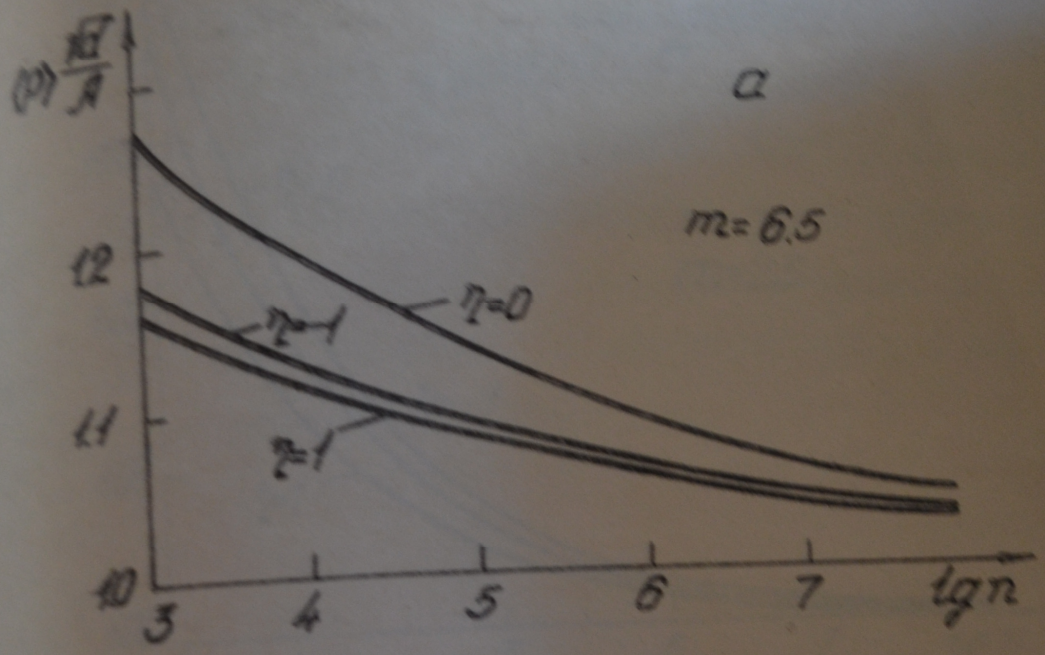
1. Предположение о неограниченности случайных размеров трещин приводит к нулевому значению порогового напряжения $(p_{min}=0)$, в случае ограниченной области возможных длин дефектов имеем $p_{min}>0$.

2. При $p_{min}=0$ вероятность разрушения пластин отлична от нуля при любом значении приложенных напряжений, но при малых нагрузках вероятность разрушения мала и поэтому ее можно в некоторых случаях пренебречь. В случае $p_{min}>0$ всегда имеется диапазон изменения внешних нагрузок, для которого вероятность разрушения равна нулю.

3. Для $p_{min}=0$ вероятностные характеристики прочности /среднее значение, наиболее вероятное значение/ асимптотически стремятся к нулю при возрастании размеров пластины, в случае $p_{min}>0$ указанные характеристики также уменьшаются с ростом размеров пластины, асимптотически приближаясь к значению $p_{min}>0$.

4. Сравнение графиков, представленных на рис.1.3, 1.5, 2.5а, 2.6а, показывает, что при одинаковых значениях параметра однородности материала масштабный эффект более интенсивен в случае $p_{min}=0$ нежели при $p_{min}>0$.

В ряде случаев для описания одних и тех же экспериментальных данных с помощью теоретических зависимостей /например, кривых предельных напряжений/ могут оказаться пригодными как результаты, соответствующие случаю $p_{min}=0$ /глава I/, так и результаты



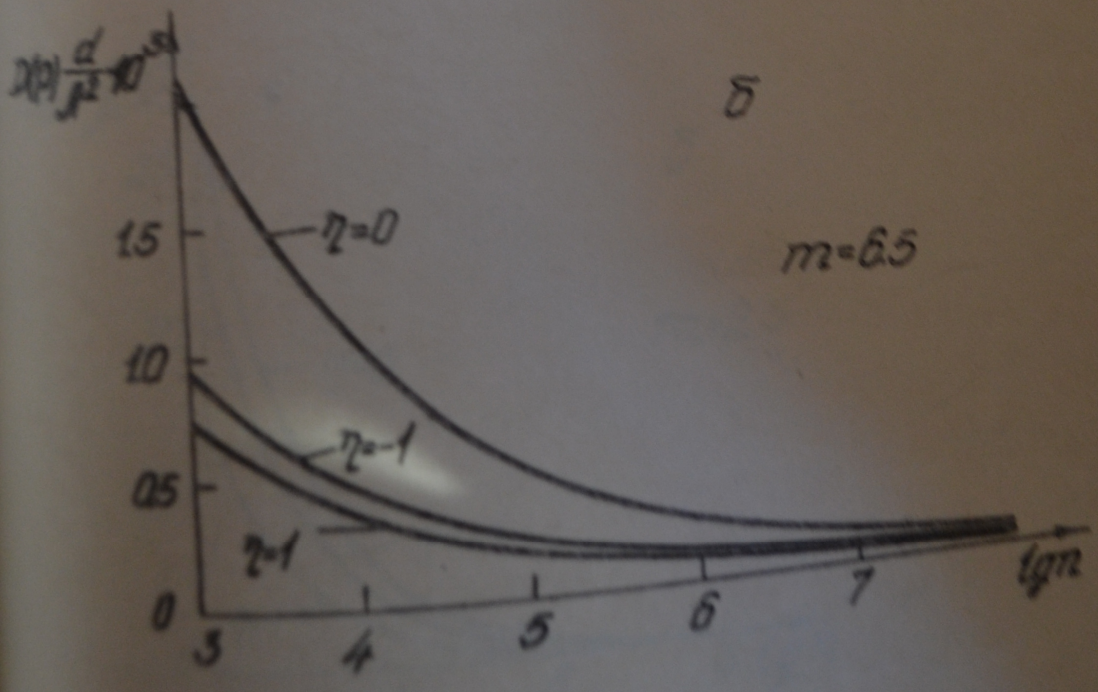
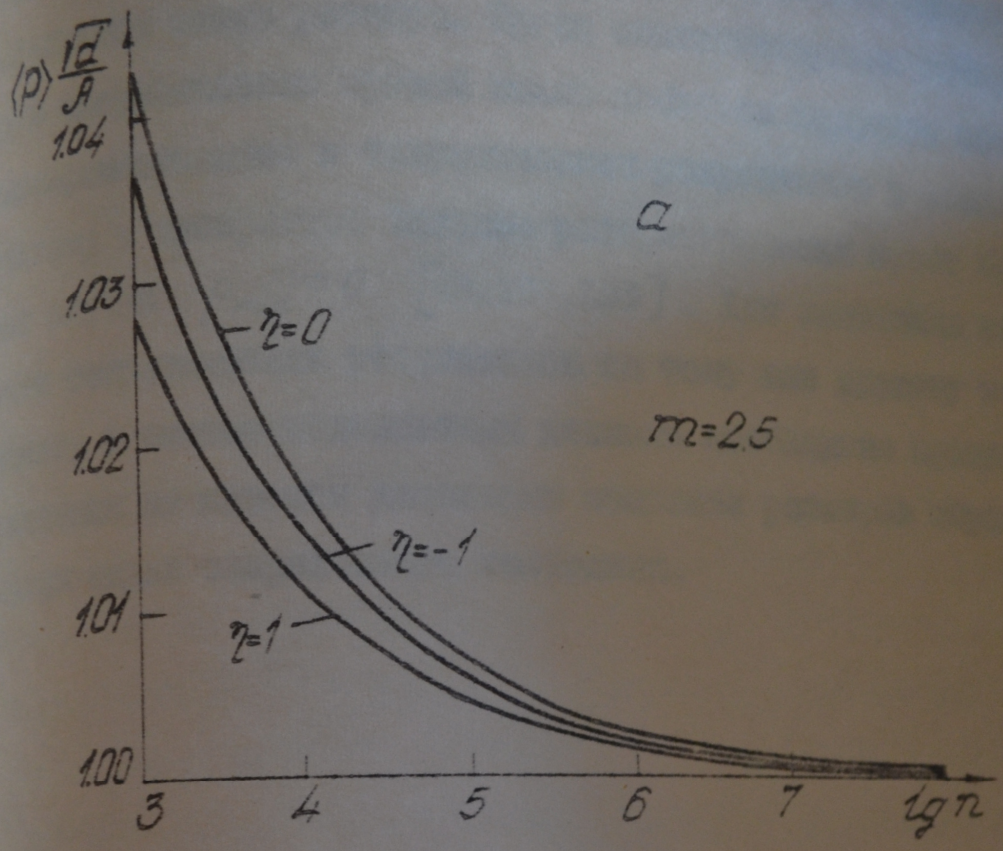


Рис.2.5


(P) √d / A
1.04
1.03
1.02
1.01
1.00
а
η=0
m=2.5
η=-1
η=1
3
4
5
6
7
lg n

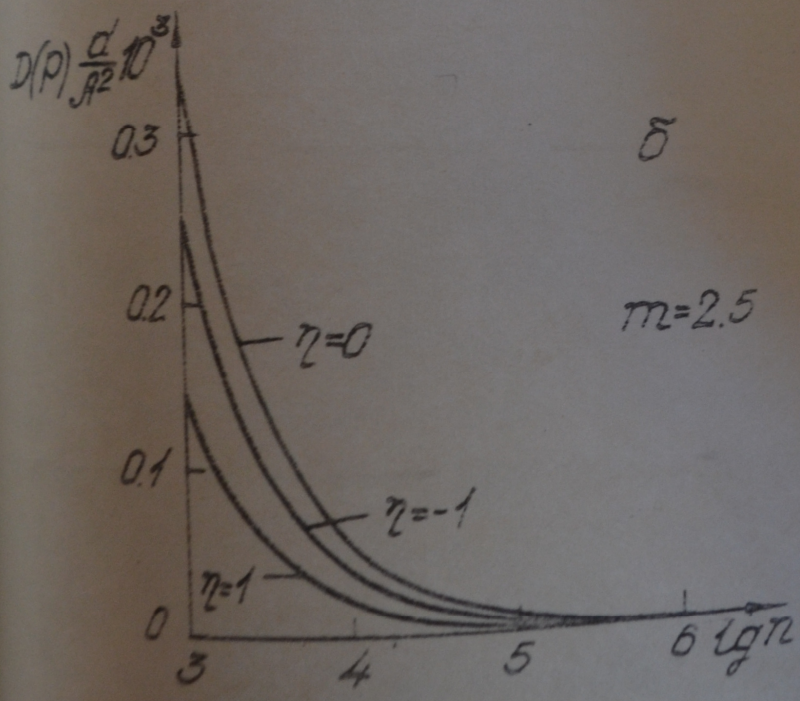

D(P) d / A² 10³
0.3
0.2
0.1
0
б
m=2.5
η=0
η=-1
η=1
3
4
5
6
lg n

Рис.2.6

для $\rho_{min} > 0$ /глава 2/, особенно если экспериментальные данные соответствуют одному значению размера образцов или малому диапазону изменения этого размера. Тогда соответствующим выбором параметров теоретической кривой можно добиться хорошего совпадения экспериментальных и теоретических результатов в обеих случаях. Поэтому в литературе большее распространение имеет более простой случай $\rho_{min} = 0$ [64, 104, 105]. Для выявления согласованности теоретических результатов по тому или другому типу распределения с экспериментальными данными необходимо произвести их сравнение на широком диапазоне масштаба размеров образцов при различных видах напряженного состояния.

Глава 3

ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ВИТЯЖКИ МАТЕРИАЛА НА ПРОЧНОСТНУЮ АНИЗОТРОПИЮ СТОХАСТИЧЕСКИ ДЕФЕКТНЫХ ПЛАСТИН

Некоторые виды технологических обработок приводят к ослаблению и изменению геометрических параметров дефектов и тем самым могут значительно повлиять на прочностные свойства тела. Например, материалы, подвергшиеся при обработке направленной пластической деформации, приобретают свойство прочностной анизотропии, что может быть объяснено возникновением преимущественной ориентации дефектов. Попытка аналитической оценки анизотропии хрупкой прочности материалов с ориентированной, случайной структурой дефектов сделана Р.С.Косачиным и О.Н. Романивым [39]. В этой работе выбран нормальный, усеченный на некотором интервале, закон распределения ориентаций трещин. Однако связь этого закона с каким-либо параметром обработки, вызывающей преимущественную ориентацию дефектов, здесь не рассматривалась. Поэтому результаты указанной работы не дают возможности исследовать влияние параметра обработки на прочностные свойства материала и прогнозировать их в зависимости от значений этого параметра.

В данной главе на основании модельного представления технологической деформационной обработки /витяжки/ стохастически дефектного материала произведен расчет вероятности разрушения и вероятности предельного состояния пластин при сложном напряженном состоянии, изучена зависимость прочности пластин и

прочностной анизотропии от параметра обработки и количестве дефектов.

Модель материала принимается здесь такой же как и в предыдущих главах, т.е. считается, что в материале рассеяны невзаимодействующие между собой прямолинейные трещины со случайными геометрическими характеристиками.

3.1. Закон распределения измененных геометрических параметров трещин

Плотность $f_1(\alpha_1, l_1)$ /индекс 1 введен для обозначения исходного состояния/ совместного распределения вероятностей случайной полудлины l_1 и ориентации α_1 трещин изотропного до обработки материала примем в виде

$$f_1(\alpha_1, l_1) = \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{d}\left(1 - \frac{l_1}{d}\right), \quad |\alpha_1| \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le l_1 \le d \qquad (3.1)$$

Пусть такой материал в разупрочненном состоянии подвергается технологической вытяжке с коэффициентом $k \ge 1$, показывающим во сколько раз увеличивается размер элементов материала в направлении вытяжки, а затем отвердевает /охрупчивается/. Такая обработка приводит к изменению геометрических характеристик трещиноватости. Предполагаем, что материал несжимаем, т.е. при увеличении длины фиксированного элемента объема в k раз, его ширина и толщина уменьшаются в $\sqrt{k}$ раз, а также, что трещины при вытяжке ведут себя как связанные с материалом растянутые нити.

Рассмотрим элемент материала с трещиной, изображенный на рис.3.1 /сплошные линии – исходное состояние, штриховые – пос-

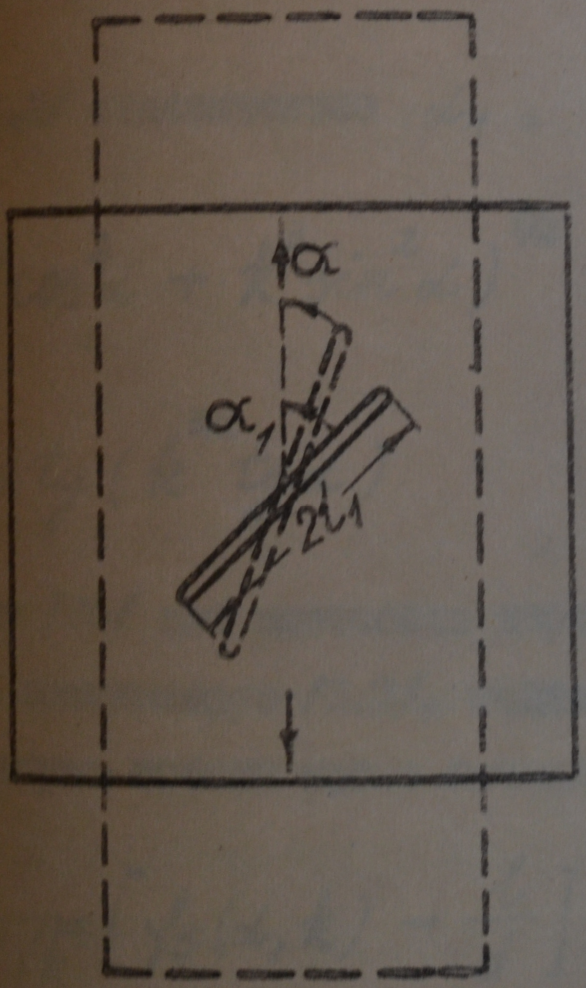


Рис.3.1

ле вытяжки/. Для измененных геометрических параметров трещины имеем

$$l^2 = l_1^2 \left(k^2 \cos^2 \alpha_1 + \frac{\sin^2 \alpha_1}{k} \right)$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \left(k^{-3/2} \operatorname{tg} \alpha_1 \right) \qquad /3.2/$$

Решая систему /3.2/ относительно α_1 , l_1 , получим

$$l_1 = \frac{l}{k} \left(\cos^2 \alpha + k^3 \sin^2 \alpha \right)^{1/2}$$

$$/3.3/$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \left(k^{3/2} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

Используя формулу /20/ для плотности вероятности функций от случайных величин и соотношение /3.3/, найдем плотность $f(\alpha, l)$ распределения параметров трещин после вытяжки

$$f(\alpha, l) = \frac{2}{\pi d \sqrt{k}} \left[\varphi_5(\alpha, k) - \frac{l}{d} \right] , \qquad /3.4/$$

$$|\alpha| \le \frac{\pi}{2} , \quad 0 \le l \le \varphi_5(\alpha, k)\, d$$

где $\varphi_5(\alpha, k) = k \left(\cos^2 \alpha + k^3 \sin^2 \alpha \right)^{-1/2}$. Пределы изменения параметра l обеспечивают выполнение условия $f(\alpha, l) \ge 0$. При $k = 1$ /вытяжка отсутствует/ получим исходное распределение /3.1/. Вследствие того, что область возможных значений случайной полудлины трещины l зависит от значения случайной ориентации α , то эти величины теперь являются статистически зависимыми в отличие от исходного состояния /величины α_1 , l_1 – статистически независимы/. В работе [39] геометрические параметры трещин являются статистически независи-

ными величинами и после обработки.

Используя формулы /13/, /14/, вычислим среднее значение и дисперсию величины α

$$\langle\alpha\rangle = \frac{2}{\pi d\sqrt{k}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha \int_0^{l_5 d} \left[l_5(\alpha,k) - \frac{l}{d} \right] dl\, d\alpha = 0 \qquad /3.5/$$

$$\mathcal{D}(\alpha) = \frac{2}{\pi d\sqrt{k}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \int_0^{l_5 d} \left[l_5(\alpha,k) - \frac{l}{d} \right] dl\, d\alpha =$$

$$= \frac{2k^{3/2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^2 d\alpha}{\cos^2\alpha + k^3 \sin^2\alpha} \qquad /3.6/$$

Кривая зависимости дисперсии $\mathcal{D}(\alpha)$ от коэффициента витязи k, построенная на основании выражения /3.6/, показана на рис.3.2. Как видно из графика, дисперсия при $k>1$ меньше последней для $k=1$. Физически это означает, что вследствие витязи в материале возникает преимущественная ориентация дефектов, совпадающая с направлением витязи. Как будет показано ниже, возникновение преимущественной ориентации трещин ведет к прочностной анизотропии материала.

3.2. Вычисление функции распределения предельных напряжений

На основании схемы, описанной в п.4, имея закон /3.4/ вероятностного распределения геометрических параметров дефектности, произведем вычисление функции распределений предельных напряжений хрупкого материала /пластины/ в условиях сложного напряжен-

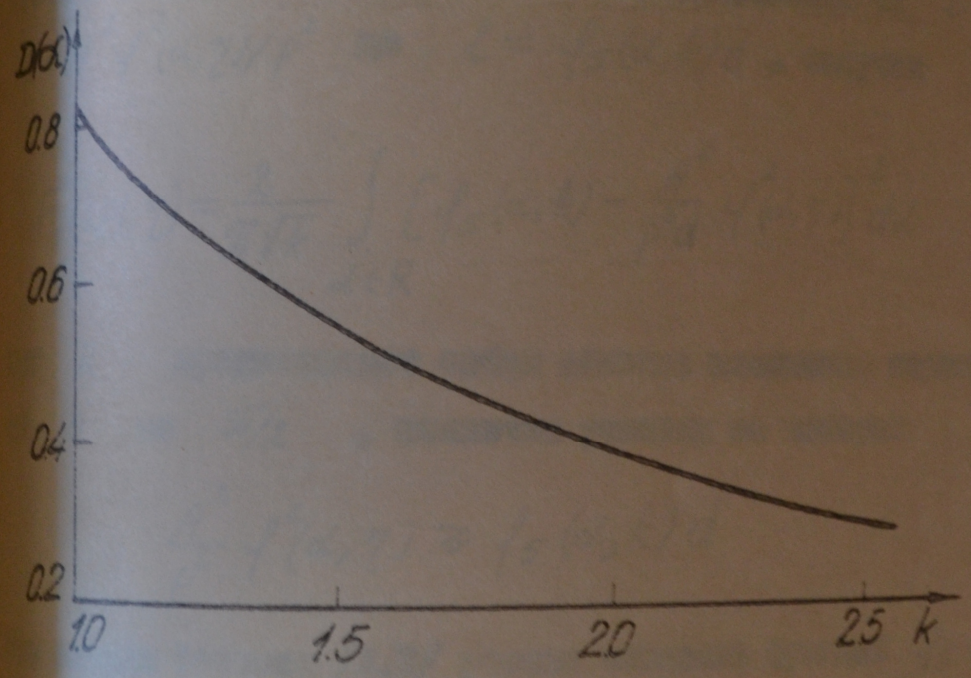


Рис.3.2

ного состояния.

Пусть элемент пластины находится под действием таких нормальных напряжений p и q, $(q=\eta p)$. Усилие p действует по линии витяжки. Функция распределения предельных напряжений p /при заданном η/ элемента пластины с одной трещиной определяется по формуле /59/. В этой формуле двойной интеграл представляем через повторные и, подставив туда выражение /3.4/, а также выполнив интегрирование по ℓ от $\ell = A^2\varphi^2(\alpha,\eta)/p^2$ до $\ell = \varphi_5(\alpha,k)d$, получим

$$F_1(|p|,\eta) = \frac{2}{\pi\sqrt{k}} \int_{\alpha\in R} \left[\varphi_5(\alpha,k) - \frac{A^2}{p^2 d}\varphi^2(\alpha,\eta)\right]^2 d\alpha \qquad /3.7/$$

где R представляет собой область изменения переменной α от 0 до $\pi/2$, исключая участки на которых

$$\frac{A^2}{p^2}\varphi^2(\alpha,\eta) \geq \varphi_5(\alpha,k)d \qquad /3.8/$$

При выводе формулы /3.7/ учтена четность функций $\varphi_5(\alpha,k)$ и $\varphi(\alpha,\eta)$ относительно α. Для простоты выкладок в дальнейшем будем выбирать функцию $\varphi(\alpha,\eta)$ в виде /45/, не учитывающем трение берегов трещин.

Вычислим функцию распределения $F_1(p,\eta)$ для двухосного растяжения $(p\geq 0,\ q\geq 0)$. Пусть $0\leq\eta\leq k^{-3/4}$. Рассмотрим случай $A\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{d}} \leq p \leq \frac{A}{\eta\sqrt{kd}}$. Пределы изменения величины η определены из условия, чтобы нижняя граница для нагрузки p не превышала верхнюю. Для указанных границ изменения p область интегрирования в формуле /3.7/ представлена схематично /заштрихована/ на рис.3.3а. На этом рисунке и последующих аналогичных обозначения: B - кривая $\ell = A^2 p^{-2}(\sin^2\alpha + \eta^2\cos^2\alpha)^{-1}$, E - кривая $\ell = kd(\cos^2\alpha + k^3\sin^2\alpha)^{-1/2}$. Отметим также, что

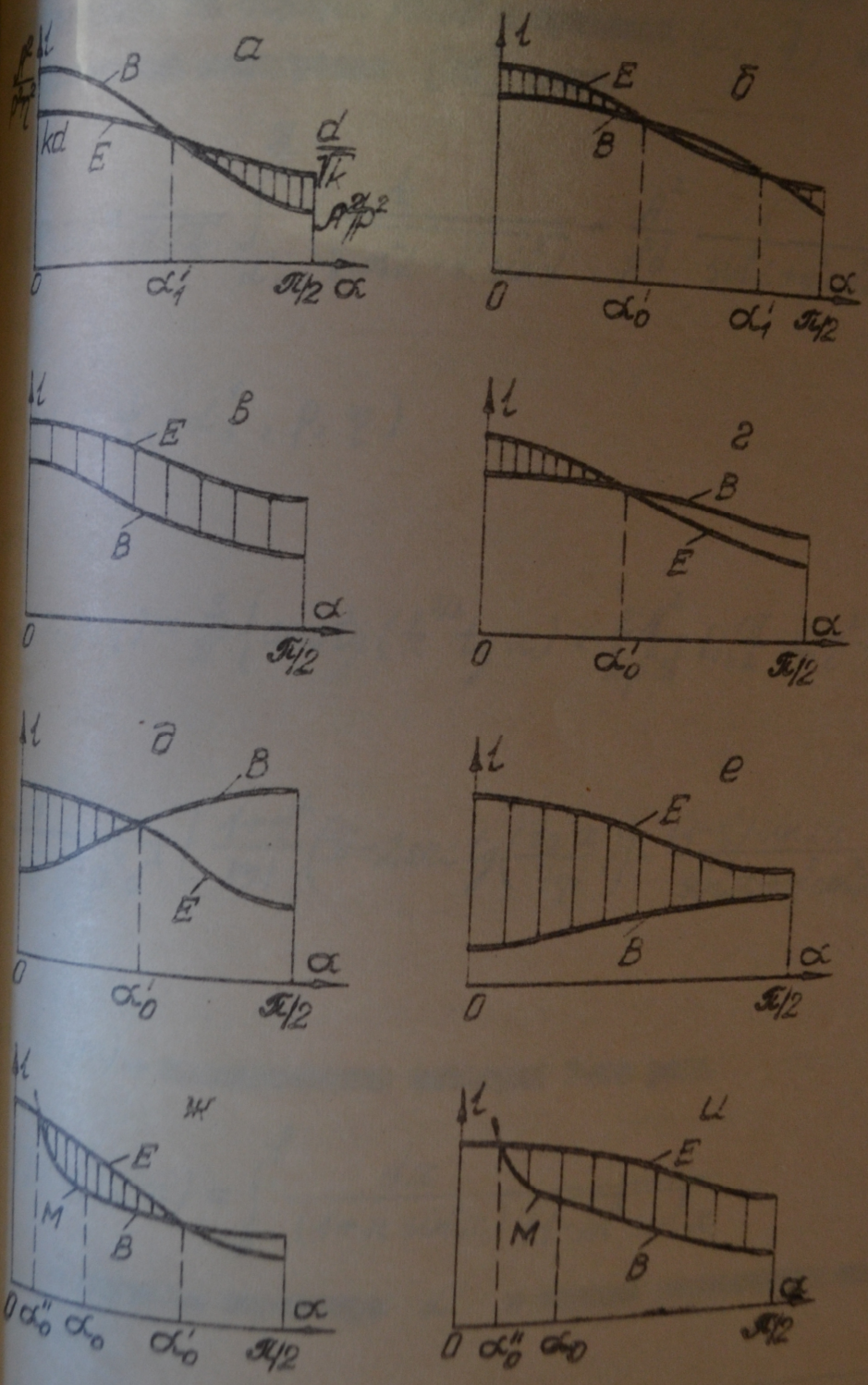

а
B
kd
E
0
α'1
π/2
α
б
E
B
0
α'0
α'1
π/2
α
в
E
B
B
0
π/2
α
г
B
E
0
α'0
π/2
α
д
B
E
0
α'0
π/2
α
е
E
B
0
π/2
α
ж
E
M
B
0
α''0
α0
α'0
π/2
α
и
E
M
B
0
α''0
α0
π/2
α

Рис.3.3

пределы изменения ρ определяются как решения неравенств /рис.3.3в/ $\frac{A^2}{\rho^2} < \frac{d}{\sqrt{k}}$ и $\frac{A^2}{\rho^2\eta^2} > kd$ относительно ρ. Для вышеуказанных пределов изменения параметров η и ρ интегрирование по формуле /3.7/ в пределах $(\alpha_1', \frac{\pi}{2})$ с использованием таблиц интегралов [26] дает

$$F_1(\rho,\eta) = \frac{2}{\pi\sqrt{k}} \int_{\alpha_1'}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{k}{\sqrt{\cos^2\alpha + k^3\sin^2\alpha}} - \frac{A^2}{\rho^2 d} \frac{1}{\sin^2\alpha + \eta^2\cos^2\alpha} \right)^2 d\alpha = \quad /3.9/$$

$$= 1 - \psi_1(\alpha_1', \rho, \eta)$$

где

$$\psi_1(x,\rho,\eta) = \frac{2}{\pi}\left\{ \operatorname{arctg}(k^{3/2}\operatorname{tg}x) + \frac{2A^2}{k\rho^2 d}\Pi\left(\frac{\pi}{2}-x, \eta^2-1, 1-k^{-3}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{A^4}{4\sqrt{k}\,\eta^2\rho^4 d^2}\left[\frac{1+\eta^2}{|\eta|}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{|\eta|}\right)\right) - \frac{(1-\eta^2)\sin 2x}{\sin^2 x + \eta^2\cos^2 x}\right]\right\} \quad /3.10/$$

$\Pi(\varphi, n, m)$ – эллиптический интеграл 3-го рода

$$\Pi(\varphi, n, m) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{(1+n\sin^2 x)\sqrt{1-m^2\sin^2 x}}$$

$\alpha_{1,0}'$ – значения параметра α в точках пересечения кривых (8) и (E)

$$\alpha_{1,0}' = \arcsin\left(\frac{1}{k\rho^2 d\,|1-\eta^2|\sqrt{2}} \sqrt{A^4(k^3-1) \pm A^2\sqrt{Q} - 2k^2\eta^2(1-\eta^2)\rho^4 d^2} \right) \quad /3.11/$$

/верхний знак соответствует индексу (1) , нижний - индексу (0)/.

$$Q = A^4(k^3-1)^2 - 4k^2(1-\eta^2)(k^3\eta^2-1)\rho^4 d^2$$

при $|\eta|=1$

$$\alpha'_{1,0} = \arcsin\sqrt{\frac{k^2\rho^4 d^2/A^4 - 1}{k^3-1}} \qquad (3.12)$$

в частности при $\eta = 0$

$$\psi_1(x,\rho,0) = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}(k^{3/2}\operatorname{tg}x) + \frac{2A^2}{k\rho^2 d}\Pi\left(\frac{\pi}{2}-x,-1,1-k^{-3}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{A^4}{\sqrt{k}\,\rho^4 d^2}\left(\operatorname{ctg}x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x\right)\right] \qquad /3.13/$$

Исследуем случай $\sqrt{\frac{2}{1+k^3}} \le \eta \le k^{-3/4}$ и $\frac{A}{\eta\sqrt{kd}} \le \rho \le \rho_1$, где $\rho_1 = A\sqrt{\frac{k^3-1}{2kd}}\sqrt{\frac{1}{(1-\eta^2)(k^3\eta^2-1)}}$. Левый предел изменения параметра η определен из условия, чтобы нижняя граница для напряжения ρ по величине не превышала верхнюю. Значение ρ_1 определено из условия $Q=0$. Для отмеченных η и ρ область интегрирования показана на рис.3.3б. Для функции распределения $F_1(\rho,\eta)$, интегрируя по формуле /3.7/ в границах $(0,\alpha'_0)$ и $(\alpha'_1,\pi/2)$, получим

$$F_1(\rho,\eta) = 1 - \psi_1(\alpha'_1,\rho,\eta) + \psi_1(\alpha'_0,\rho,\eta) - \psi_1(0,\rho,\eta) \qquad /3.14/$$

или $\sqrt{\frac{2}{1+k^3}} \le \eta \le k^{-3/4}$, $\rho_1 \le \rho < \infty$ или $0 \le \eta \le \sqrt{\frac{2}{1+k^3}}$, $\frac{A}{\eta\sqrt{kd}} \le \rho < \infty$ область интегрирования представлена на

рис.3.3в. Тогда

$$F_1(\rho,\eta) = 1 - \psi_1(0,\rho,\eta) \qquad /3.15/$$

при $k^{-3/4} \le \eta \le 1 \cdot \frac{A}{2\sqrt{kd}} \le \rho \le A\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{d}}$ будем иметь область интегрирования, показанную на рис.3.3г, поэтому

$$F_1(\rho,\eta) = \psi_1(\alpha_0',\rho,\eta) - \psi_1(0,\rho,\eta) \qquad /3.16/$$

в случае $k^{-3/4} \le \eta \le \sqrt{\frac{k^3+1}{2k^3}} \cdot A\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{d}} \le \rho \le \rho_1$ область интегрирования представлена на рис.3.3б, а для функции распределения $F_1(\rho,\eta)$ имеет место формула /3.14/. Для $k^{-3/4} \le \eta \le \sqrt{\frac{k^3+1}{2k^3}}$ $\cdot$ $\rho_1 \le \rho < \infty$ или $\sqrt{\frac{k^3+1}{2k^3}} \le \eta \le 1 \cdot A\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{d}} \le \rho < \infty$ имеем область интегрирования, представленную на рис.3.3в, а функция распределения определяется выражением /3.15/.

Предположим, что $1 \le \eta < \infty$. При $\frac{A}{2\sqrt{kd}} \le \rho \le A\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{d}}$ область интегрирования изображена на рис.3.3д, а функция $F_1(\rho,\eta)$ представляется формулой /3.16/. Для $A\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{d}} \le \rho < \infty$ область интегрирования показана на рис.3.3е, функция распределения определяется по формуле /3.15/.

Перейдем к вычислению функции распределения $F_1(\rho,\eta)$ для растяжения-сжатия пластины $(p \ge 0, q \le 0)$. В этом случае функция $\psi(\alpha,\eta)$ представляется различными аналитическими выражениями /45/ в зависимости от ориентации трещины

$$\psi(\alpha,\eta) = \begin{cases} 2\left[(1-\eta)\sin 2|\alpha|\right]^{-1} & \text{при } 0 \le |\alpha| \le \alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{-\eta} \\ \left(\sin^2\alpha + \eta^2\cos^2\alpha\right)^{-1/2} & \text{при } \alpha_0 \le |\alpha| \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad /3.17/$$

Исследуем случай $-1 \le \eta < 0$, $(|\eta| \le p)$. При $p_2 \le p \le A\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{d}}$ $\left(p_2 = \sqrt[4]{\frac{1-\eta k^3}{1-\eta}}\,\frac{A}{\sqrt{|\eta| k d}}\right)$ и $k \ge \sqrt[3]{\frac{1-\eta k^3}{\eta^2(1-\eta)}}$ область интегрирования для формулы /3.7/ представлена на рис.3.3к. На этом рисунке и последующих, кроме уже известных обозначений, буквой (M) при-нята кривая $\ell = 4A^2/[p^2(1-\eta)^2 \sin^2 2\alpha]$. Величина p_2 является решением уравнения

$$\frac{kd}{(\cos^2\alpha_0 + k^3 \sin^2\alpha_0)^{1/2}} = \frac{4A^2}{p^2(1-\eta)^2 \sin^2 2\alpha_0} \qquad /3.18/$$

Неравенство, связывающее параметры k и η , получено из условия, чтобы нижний предел изменения напряжений ρ по величине не превышал верхнего. Для вышеуказанных границ на величины ρ , η , k функция $F_1(\rho,\eta)$ вычисляется по формуле

$$F_1(\rho,\eta) = \frac{2}{\pi\sqrt{k}}\left\{\int_{\alpha_0''}^{\alpha_0}\left[\frac{k}{(\cos^2\alpha + k^3\sin^2\alpha)^{1/2}} - \frac{A^2}{\rho^2 d}\,\frac{4}{(1-\eta)^2\sin^2 2\alpha}\right]^2 d\alpha + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha_0}^{\alpha_0'}\left[\frac{k}{(\cos^2\alpha + k^3\sin^2\alpha)^{1/2}} - \frac{A^2}{\rho^2 d}\,\frac{1}{\sin^2\alpha + \eta^2\cos^2\alpha}\right]^2 d\alpha\right\} = \qquad /3.19/$$

$$= \psi_2(\alpha_0,\rho,\eta) - \psi_2(\alpha_0'',\rho,\eta) + \psi_1(\alpha_0',\rho,\eta) - \psi_1(\alpha_0,\rho,\eta)$$

где

$$\psi_2(x,\rho,\eta) = \frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{arc\,tg}(k^{3/2}\operatorname{tg} x) - \frac{8A^4}{(1-\eta)^4\rho^4 d^2\sqrt{k}}\right.$$

$$\cdot\left(ctg\,2x+\frac{1}{3}ctg^3 2x\right)+\frac{2A^2}{(1-\eta)^2 k\rho^2 d}\left[\left(k^3 ctg\,x-tg\,x\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\sqrt{\sin^2 x+k^{-3}\cos^2\alpha}\;-(1+k^3)E\left(\frac{\pi}{2}-x,\,1-k^{-3}\right)+$$

$$\left.+2F\left(\frac{\pi}{2}-x,\,1-k^{-3}\right)\right]\Big\}$$

$F(\varphi,m)$. $E(\varphi,m)$ – эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода

$$F(\varphi,m)=\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-m^2\sin^2 x}}\;,\;E(\varphi,m)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-m^2\sin^2 x}\,dx$$

α_0'' – координата пересечения кривых (M) и (E) /рис.3.3к/ определяемая из уравнения

$$\cos^4 2\alpha-2\cos^2 2\alpha-\frac{8A^4(1-k^3)}{k^2(1-\eta)^4\rho^4 d^2}\cos 2\alpha-$$

$$-\frac{8A^4(1+k^3)}{(1-\eta)^4 k^2\rho^4 d^2}+1=0 \qquad /3.20/$$

и удовлетворяющая условию $0\le\alpha_0''\le\alpha_0$. Для $A\sqrt{\frac{k}{d}}\le\rho<\infty$ /рис.3.3и/ и тех же η . k . что и в предыдущем случае имеем

$$F_1(\rho,\eta)=\psi_2(\alpha_0,\rho,\eta)-\psi_2(\alpha_0'',\rho,\eta)+1-\psi_1(\alpha_0,\rho,\eta) \qquad /3.21/$$

Рассмотрим случай $-1<\eta\le 0$. $k\le\sqrt[3]{\frac{1-\eta k^3}{\eta^2(1-\eta)}}$. При $A\sqrt{\frac{k}{d}}\le\rho\le\rho_2$ /рис.3.4а/ получим формулу /3.9/, при $\rho_2\le\rho<\infty$ /рис.3.3и/ имеем выражение /3.21/.

Для $\rho\ge 0$ остается нам еще рассмотреть такой диапазон соотношения главных напряжений: $-\infty<\eta\le -1$, $(|\eta|\ge\rho)$. При таких η имеем $\alpha_0\ge\frac{\pi}{4}$ и кривая (M) в точке $\alpha=\frac{\pi}{4}$

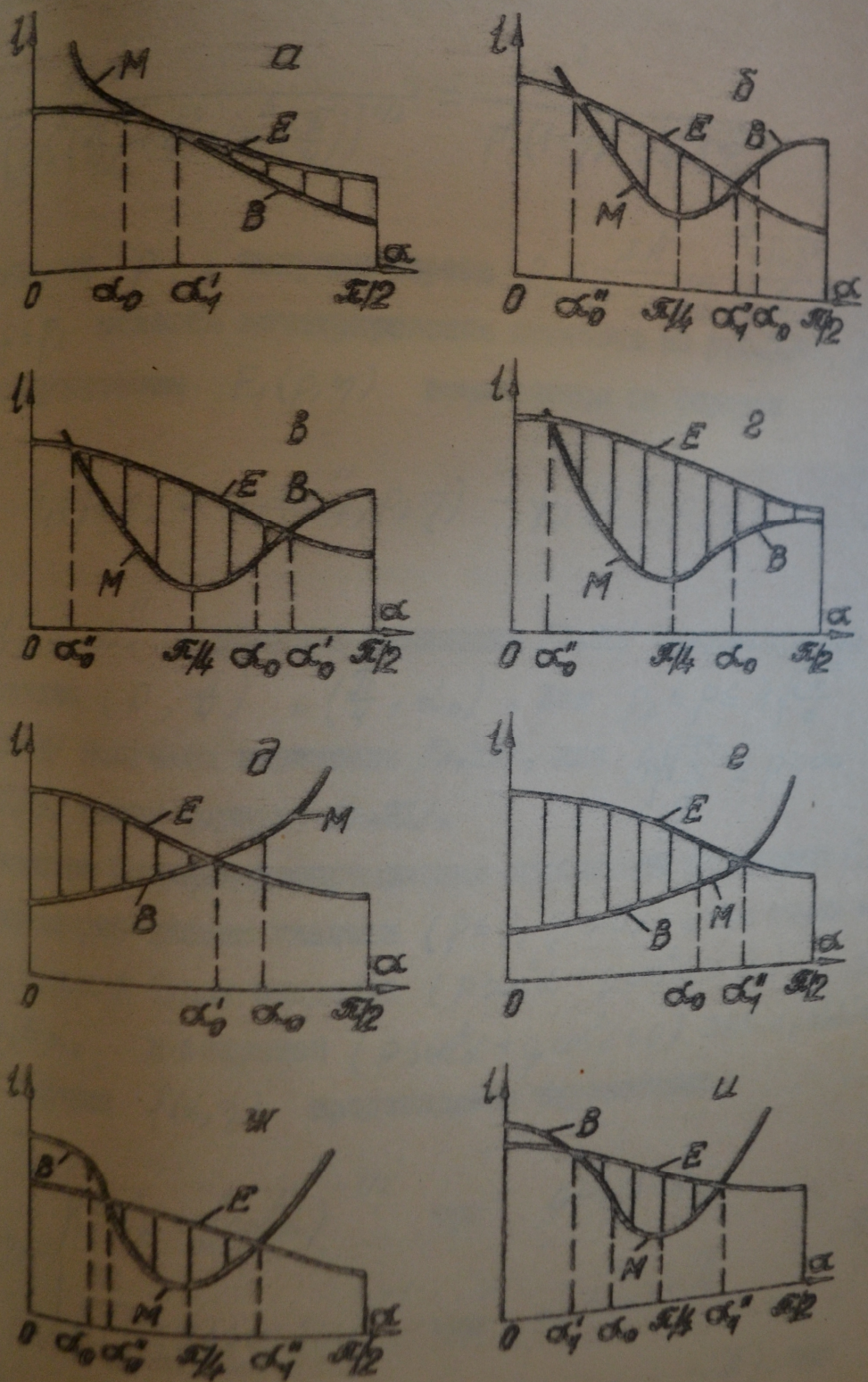


Рис.3.4

принимает минимальное значение. Приравняв между собой значения при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ функций, описывающих кривые (M) и (E), т.е. решив уравнение

$$\frac{kd}{\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+k^3\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{1/2}}=\frac{4A^2}{\rho^2(1-\eta)^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{4}\right)} \qquad /3.22/$$

относительно ρ, получим корень $\rho_3=\frac{2A}{(1-\eta)\sqrt{kd}}\sqrt[4]{\frac{1+k^3}{2}}$. При $\rho_3\le\rho\le\rho_2$ область интегрирования показана на рис.3.4б, а функция распределения $F_1(\rho,\eta)$ вычисляется по формуле

$$F_1(\rho,\eta)=\psi_2(\alpha_1'',\rho,\eta)-\psi_2(\alpha_0'',\rho,\eta) \qquad /3.23/$$

где α_0'', α_1'' – решения уравнения /3.20/ соответственно на промежутках $(0,\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4},\alpha_0)$. Для $\rho_2\le\rho\le A\sqrt{\sqrt{\frac{k}{d}}}$ /рис.3.4в/ получаем выражение /3.19/, для $A\sqrt{\sqrt{\frac{k}{d}}}\le\rho<\infty$ /рис.3.4г/ имеем формулу /3.21/.

Вычислим функцию распределения предельных напряжений $F_1(-\rho,\eta)$ при сжатии-растяжении пластин ($p\le0$, $q\ge0$). При такой нагрузке трещина будет открытой ($p\sin^2\alpha+q\cos^2\alpha\ge0$) если $0\le|\alpha|\le\alpha_0$ и закрытой ($p\sin^2\alpha+q\cos^2\alpha\le0$) для $\alpha_0\le|\alpha|\le\frac{\pi}{2}$. Тогда функция $\psi(\alpha,\eta)$ представится выражениями

$$\psi(\alpha,\eta)=\begin{cases}(\sin^2\alpha+\eta^2\cos^2\alpha)^{-1/2} & \text{при } 0\le|\alpha|\le\alpha_0\\ 2\left[(1-\eta)\sin 2|\alpha|\right]^{-1} & \text{при } \alpha_0\le|\alpha|\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \qquad /3.24/$$

Последует случай $-\infty<\eta\le-1$, ($q\ge|p|$, $\alpha_0\ge\frac{\pi}{4}$). При $\frac{A}{\sqrt[4]{kd}}\le-\rho\le\rho_2$ область интегрирования изображена на рис.3.4д, а функция $F_1(-\rho,\eta)$ определяется соотношением

$$F_1(-\rho,\eta)=\psi_1(\alpha_0',\rho,\eta)-\psi_1(0,\rho,\eta) \qquad /3.25/$$

при $\rho_2\le-\rho<\infty$ /рис.3.4е/ имеем

$$F_1(-\rho,\eta)=\psi_1(\alpha_0,\rho,\eta)-\psi_1(0,\rho,\eta)+$$
$$+\psi_2(\alpha_1'',\rho,\eta)-\psi_2(\alpha_0,\rho,\eta) \qquad /3.26/$$

где α_1'' - решение уравнения /3.20/ на промежутке $(\alpha_0,\frac{\pi}{2})$.

Определим функцию $F_1(-\rho,\eta)$ при условиях, что $-1<\eta\le0$, $(q<|\rho|,\alpha_0<\frac{\pi}{4})$ и $|\eta|\le\sqrt{\frac{1-\eta}{1-\eta k^3}}$. Последнее соотношение обеспечивает правомерность неравенств для второго и рассмотренных ниже диапазонов изменения величины $|\rho|$. При $\rho_3\le-\rho\le\rho_2$ /рис.3.4г/ получим

$$F_1(-\rho,\eta)=\psi_2(\alpha_1'',\rho,\eta)-\psi_2(\alpha_0'',\rho,\eta) \qquad /3.27/$$

где α_0'', α_1'' - решения уравнения /3.20/ соответственно на промежутках $(\alpha_0,\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$. Для $\rho_2\le-\rho\le\frac{A}{|\eta|\sqrt{kd}}$ /рис.3.4и/ имеем

$$F_1(-\rho,\eta)=\psi_1(\alpha_0,\rho,\eta)-\psi_1(\alpha_1',\rho,\eta)+ \qquad /3.28/$$
$$+\psi_2(\alpha_1'',\rho,\eta)-\psi_2(\alpha_0,\rho,\eta)$$

здесь α_1'' - решение уравнения /3.20/ на интервале $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

При $\frac{A}{|\eta|\sqrt{kd}}\le-\rho<\infty$ /рис.3.5а/ получаем формулу /3.26/.

Определим функцию распределения $F_1(-\rho,\eta)$ при условиях, что $-1<\eta<0$, $|\eta|\ge\sqrt{\frac{1-\eta}{1-\eta k^3}}$, а также $\frac{8(1+k^3)\eta^4}{(1-\eta)^4}\le1$. Последние два соотношения обеспечивают правомерность неравенств соответственно для второго и первого из рассмотренных ниже про-

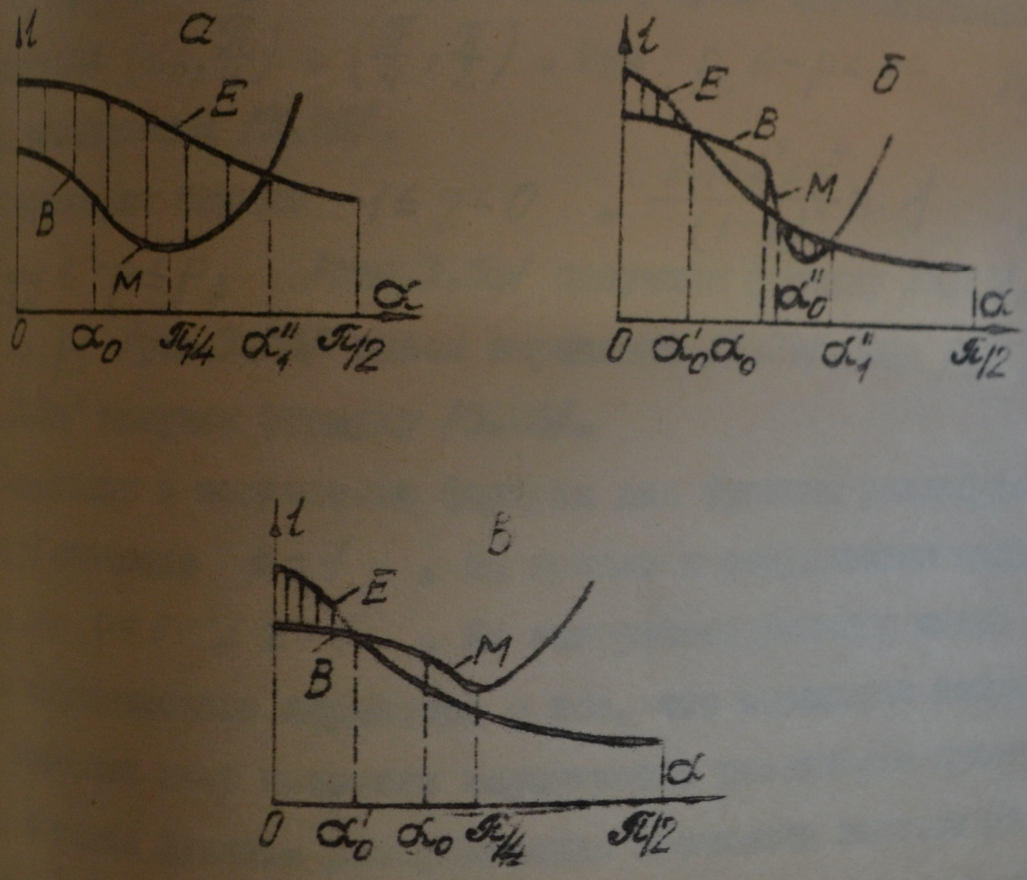


Рис.3.5

интервал изменения величины $|\rho|$. При $\rho_3 \le -\rho \le \frac{A}{|\eta|\sqrt{kd}}$ /рис.3.4в/ имеем выражение /3.27/. Для $\frac{A}{|\eta|\sqrt{kd}} \le -\rho \le \rho_2$ /рис.3.5б/ получим

$$F_1(-\rho,\eta) = \Psi_1(\alpha_0',\rho,\eta) - \Psi_1(0,\rho,\eta) + \Psi_2(\alpha_1'',\rho,\eta) - \Psi_2(\alpha_0'',\rho,\eta) \qquad /3.29/$$

где α_0'' , α_1'' - решения уравнения /3.20/ соответственно на промежутках $(\alpha_0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. При $\rho_2 \le -\rho < \infty$ /рис.3.5а/ имеем соотношение /3.26/.

Рассмотрим случай $-1 \le \eta < 0$, $\frac{8(1+k^3)\eta^4}{(1-\eta)^4} \ge 1$. При $\frac{A}{|\eta|\sqrt{kd}} \le -\rho \le \rho_3$ /рис.3.5в/ получаем формулу /3.25/, для $\rho_3 \le -\rho \le \rho_2$ /рис.3.5б/ имеем выражение /3.29/, при $\rho_2 \le -\rho < \infty$ /рис.3.5а/ получим формулу /3.26/.

Подставив в полученные формулы для функции распределения $F_1(|\rho|,\eta)$ значение $k=1$, мы придем к результатам предыдущей главы при $\beta=0$, $\varepsilon=1$. Из вышерассмотренного можно сделать вывод механического характера о том, что пороговое напряжение, т.е. значение выше которого вероятность разрушения будет больше нуля, а также функция распределения прочности зависят от коэффициента витязки k и соотношения главных нормальных напряжений η .

Если элемент пластинки содержит n трещин, то функция вероятностного распределения предельных напряжений определяется по формуле /69/. На основании полученных выражений можно вычислять вероятность разрушения тела с n дефектами при различных видах напряженного состояния с учетом витязки материала. На рис.3.6 для некоторых случаев нагружения представлены в виде графиков результаты вычисления вероятности разрушения P материала, неупрочненного $(k=1)$ и подвергнутого $(k=1,5)$ витязке. Как показывают эти графики, предварительная витязка материала ведет

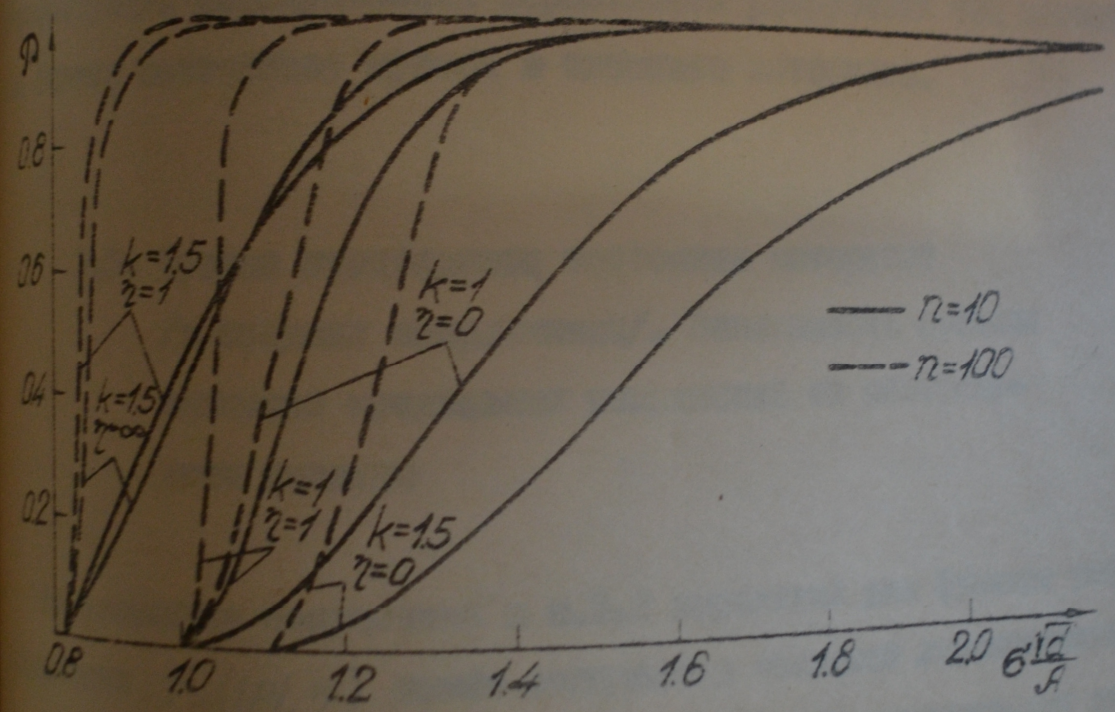
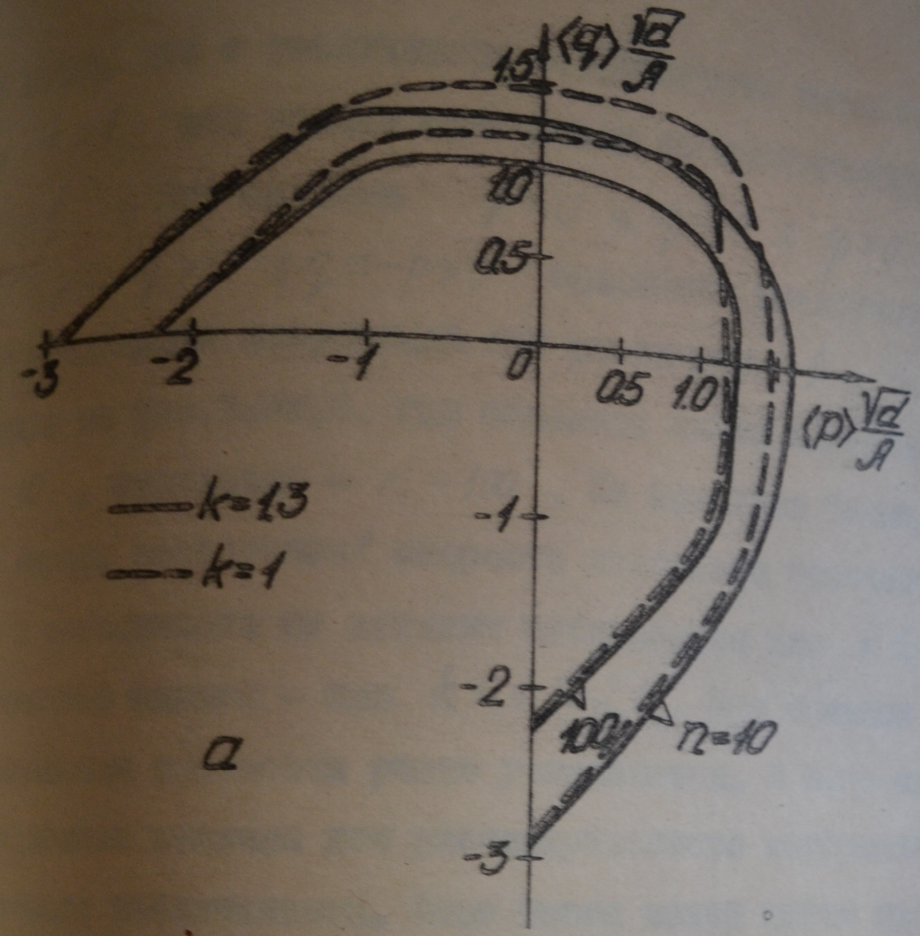

P
0.8
0.6
0.4
0.2
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
$\sigma\frac{\sqrt{d}}{A}$
k=1.5
η=1
k=1.5
η=∞
k=1
η=0
k=1
η=1
k=1.5
η=0
n=10
n=100

Рис.3.6

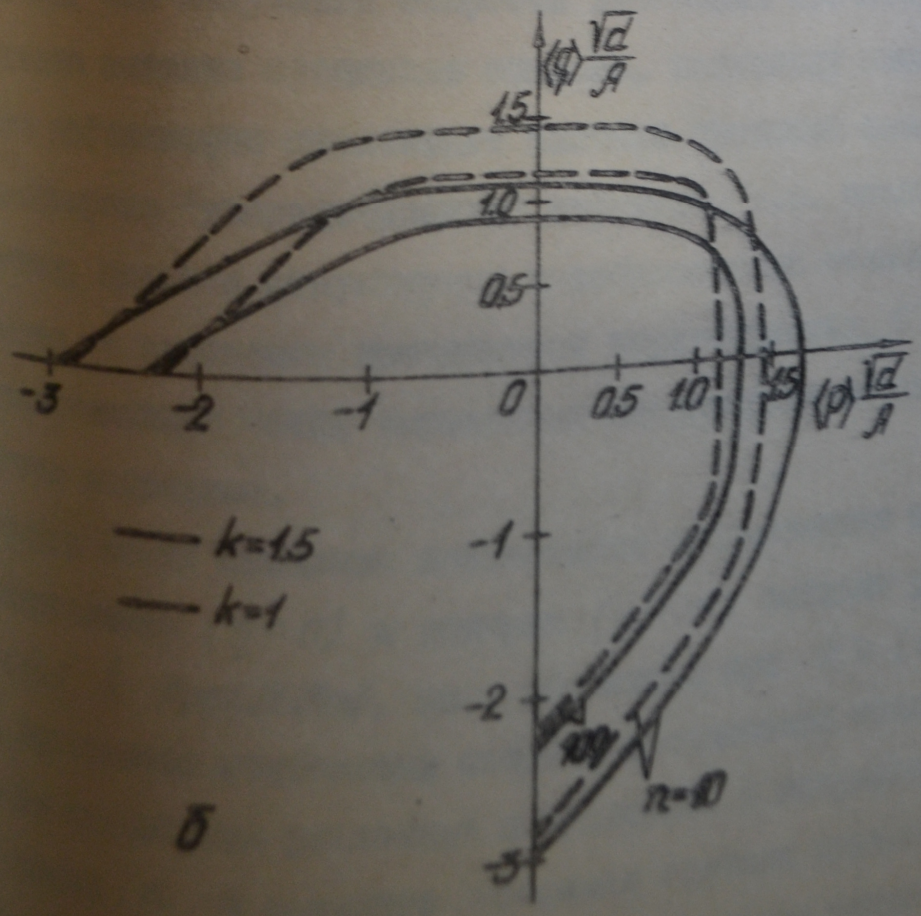
я понижению вероятности разрушения при растяжении в направлении вытяжки ($\eta=0, \sigma=p$) и повышению ее при перпендикулярном ($\eta\to\infty, \sigma=q$) или двухстороннем растяжении ($\eta=1, \sigma=p=q$). И наоборот, предельные напряжения, соответствующие заданной вероятности разрушения $\mathcal{P}$, увеличиваются в результате обработки при растяжении в направлении вытяжки и уменьшаются при перпендикулярном или двухстороннем растяжении. Во всех случаях вероятность разрушения тем больше, а предельные напряжения, соответствующие фиксированной вероятности разрушения тем меньше, чем больше количество трещин в элементе материала.

3.3. Кривые предельного состояния материала /в средних напряжениях/. Зависимость средних значений предельных напряжений от коэффициента вытяжки

На основании полученных в п.3.2 выражений для функции распределения $F_1(|p|,\eta)$ можно определить числовые характеристики предельных напряжений. Среднее значение /математическое ожидание/ $\langle p\rangle$ предельных напряжений пластины с n трещинами найдем по формуле /2.41/. Имеющийся в этой формуле интеграл вычисляем численным интегрированием. Величины $\langle p\rangle$, $\langle q\rangle$ связаны соотношением $\langle q\rangle = \eta\langle p\rangle$. Для $n=10, 100; k=1,3;15$, вычислены величины $\langle p\rangle\frac{\sqrt{d}}{A}$, $\langle q\rangle\frac{\sqrt{d}}{A}$ при различных видах напряженного состояния (η) и построены кривые предельного состояния материала подданого вытяжке /рис.3.7а,б/. В отличие от случая $k=1$ /вытяжка отсутствует/ кривые для $k>1$ несимметричны относительно прямой $\langle p\rangle=\langle q\rangle$, что свидетельствует о приобретенной при вытяжке прочностной анизотропии. На



$\langle q \rangle \frac{\sqrt{d}}{A}$
1.5
1.0
0.5
-3
-2
-1
0
0.5
1.0
$\langle p \rangle \frac{\sqrt{d}}{A}$
k=1.3
k=1
-1
-2
-3
100
n=10
а



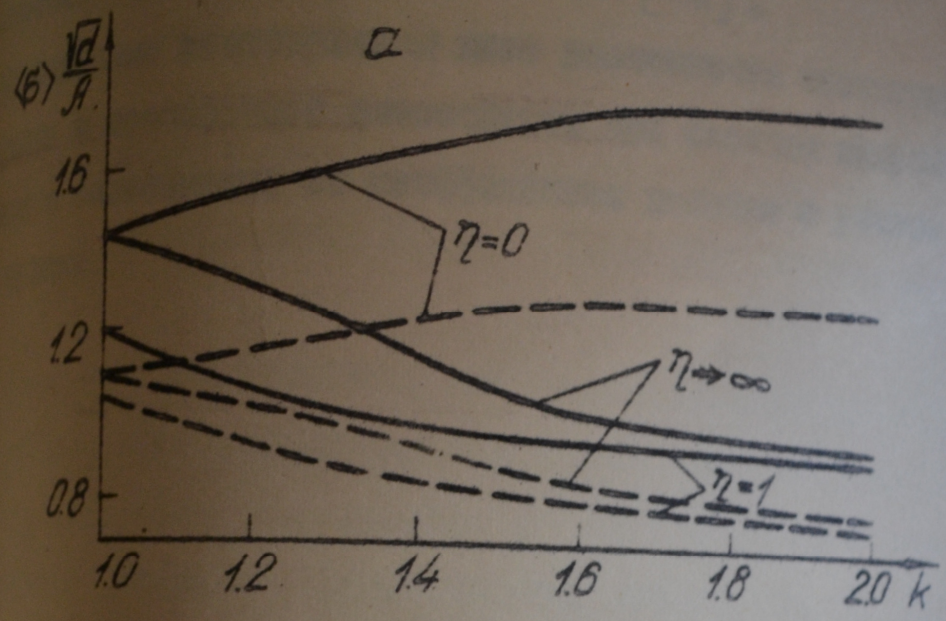
$\langle q \rangle \frac{\sqrt{d}}{A}$
1.5
1.0
0.5
-3
-2
-1
0
0.5
1.0
1.5
$\langle p \rangle \frac{\sqrt{d}}{A}$
k=1.5
k=1
-1
-2
-3
100
n=10
б

Рис.3.7

рис.3.7 видно, что с увеличением коэффициента вытяжки k кривые для $k>1$ все больше отличаются от соответствующих кривых при $k=1$. Для случаев $p>0$, $q=0$; $q>0$, $p=0$; $p=q>0$; $p=-q>0$; $q=-p>0$ проведены вычисления средних значений предельных напряжений при различных k. Результаты показаны на рис.3.8а,б, где сплошные линии соответствуют случаю $n=10$, штриховые – $n=100$. Из графиков видно, что наибольшая /почти постоянная/ скорость изменения прочности при растяжении в зависимости от вытяжки наблюдается для $k \lesssim 1,6$, в случае чистого сдвига – при $k \leq 1,8-2,0$. При бо́льших k скорость изменения прочности резко уменьшается. В этом смысле вытяжки указанных величин для рассматриваемого материала можно считать наиболее эффективными. Этот вывод может найти практическое применение.

Отметим, что затухания скорости изменения прочности с ростом коэффициента вытяжки следовало ожидать, поскольку наибольшая перестройка дефектности происходит вначале процесса вытяжки, а после некоторого "упорядочивания" дефектов, т.е. создания текстуры дефектов, процесс структурных преобразований ослабевает, что сказывается на изменении прочностных характеристик. С другой стороны, существование четко выраженных характерных точек процесса не является очевидным.

Разность между средними предельными напряжениями при растяжении в направлении $(\eta=0)$ и поперек $(\eta\to\infty)$ вытяжки увеличивается с ростом k /рис.3.8а/, но с убывающей при $k \gtrsim 1,6$ интенсивностью. Аналогично изменяется степень прочностной анизотропии, измеряемая отношением указанных напряжений. С возрастанием количества трещин n в элементе материала степень прочностной анизотропии при одинаковых k уменьшается. Выводы такого же характера можно сделать, рассматривая кривые на рис.3.8б. Отмеченные


а
1.6
1.2
0.8
η=0
η→∞
η=1
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
k

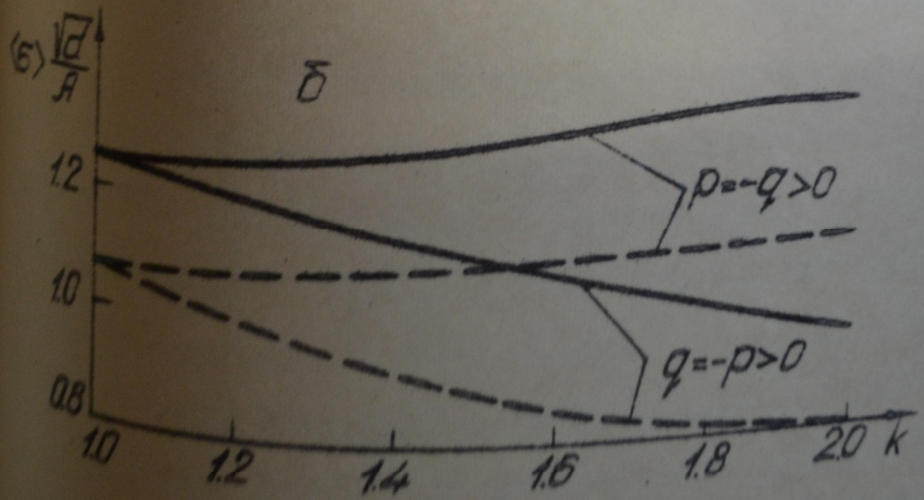

б
1.2
1.0
0.8
p=-q>0
q=-p>0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
k

Рис.3.8

ленные выводы подтверждаются экспериментально на ряде ма-
риалов, приобретающих при технологической обработке свойства
низотропии сопротивления разрушению [46].

Проведенные исследования дают возможность прогнозирования
рочности и прочностной анизотропии при сложном напряженном со-
тоянии в зависимости от коэффициента вытяжки с учетом количе-
тва трещин.

Глава 4

ПРОЧНОСТЬ ХРУПКИХ ПЛАСТИН СО СТОХАСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЛЕСТКИХ СТЕРЖНЕВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть хрупкие пластины, содержащие невзаимодействующие между собой жесткие стержневые включения, находятся под действием главных нормальных напряжений p и q, приложенных на бесконечности /рис.4.1/. Предполагаем, что геометрические параметры включения l и α / l – его полудлина, α – угол между направлением включения и действия напряжений p / являют собой независимые случайные величины с известными законами их вероятностного распределения. Считаем, что возможные значения параметра α удовлетворяют соотношению $|\alpha| \le \frac{\pi}{2}$, тем самым учитываются все возможные ориентации включений.

Как известно из п.4, для определения функции распределения вероятностей предельных напряжений /прочности/ хрупкого тела необходимо знать законы распределения вероятностей геометрических параметров дефектов-включений и условие предельного состояния элемента тела с указанным дефектом. Это условие можно взять для невзаимодействующих включений из решения задачи о бесконечной пластине с одним произвольно ориентированным стержневым включением. Поэтому необходимо рассмотреть решение задачи об определении предельных усилий $p_* \cdot q_*$ для бесконечной хрупкой пластины с одним включением. Под предельными подразумеваются напряжения $p_* \cdot q_*$, при действии которых наступает локальное разрушение – образование трещины в окрестности вершины включения.

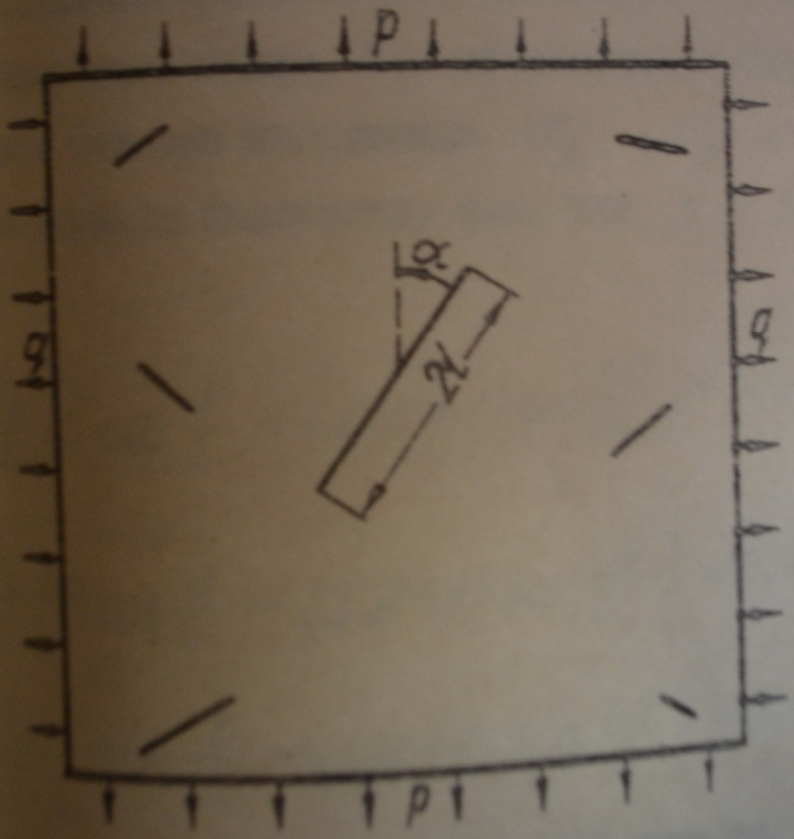


Рис.А.I

4.1. Предельные напряжения для пластины с произвольно ориентированным стержневым включением

В работе В.В.Панасюка, Л.Т.Березницкого, И.И.Труша [59] на основании решения задачи теории упругости для изотропной пластины с жестким эллиптическим включением [49] путем стягивания этого включения в прямолинейный стержень получены выражения для комплексных потенциалов Колосова-Мускелишвили, описывающих напряженно-деформированное состояние пластины с прямолинейным стержневым включением. Там же найдены следующие выражения для компонент тензора напряжений σ_r , σ_β , $\tau_{r\beta}$ в малой окрестности вершины включения, т.е. при $r \ll l$:

$$\sigma_r = \frac{k_4}{\sqrt{r}}\left[5\cos\frac{\beta}{2} + (2\varkappa+1)\cos\frac{3\beta}{2}\right] + O(1)$$

$$\sigma_\beta = \frac{k_4}{\sqrt{r}}\left[3\cos\frac{\beta}{2} - (2\varkappa+1)\cos\frac{3\beta}{2}\right] + O(1) \qquad /4.1/$$

$$\tau_{r\beta} = \frac{k_4}{\sqrt{r}}\left[\sin\frac{\beta}{2} - (2\varkappa+1)\sin\frac{3\beta}{2}\right] + O(1)$$

$O(1)$ - ограниченная часть компоненты тензора напряжений при $r \to 0$; r , β - полярная система координат с началом в вершине включения и полярной осью, направленной по его линии, $\gamma = q/p$, $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ - для плоского напряженного состояния, ν - коэффициент Пуассона материала матрицы. Величина k_4 представляется выражением

$$k_4 = \frac{p\sqrt{l}}{8\sqrt{2}\,\varkappa}\left[\frac{1+\gamma}{2}(\varkappa-1) + (1-\gamma)\cos 2\alpha\right] \qquad /4.2/$$

Следует отметить, что формулы /4.1/ соответствуют случаю, когда

стержневое включение не удерживается от поворота под действием внешних усилий.

В статьях [3,4] ответственным за возникновение хрупкого разрушения композита принимается напряжение σ_r , поскольку расчеты /4.1/ показывают, что в окрестности вершины включения $\sigma_r > \sigma_\beta$. При этом считается, что прочность контактного слоя между включением и матрицей выше прочности матрицы. В качестве критерия разрушения примем условие [3,4]

$$\max_\beta A_1(\rho, \eta, \alpha, \beta, \varkappa, \ell) = K_0 \qquad /4.3/$$

где K_0 - постоянная материала, характеризующая его сопротивление зарождению трещины; $A_1 = \lim_{r\to 0}(\sqrt{r}\,\sigma_r)$, $\max_\beta A_1$ - максимальное значение функции A_1 по аргументу β . В работе [3] приведены выражения только для $\max_\alpha A_1$ и $\max_{\alpha,\beta} A_1$. Поэтому здесь найдем значение $\max_\beta A_1$, на основании которого, а также соотношения /4.3/ получим выражения для предельных напряжений пластины с жестким стержневым включением ориентации α .

Функция A_1 в развернутом виде запишется так

$$A_1 = \frac{P\sqrt{\ell}}{8\sqrt{2}\,\varkappa}\left[\frac{1+\eta}{2}(\varkappa-1)+(1-\eta)\cos 2\alpha\right]\cdot \qquad /4.4/$$

$$\cdot\left[5\cos\frac{\beta}{2}+(2\varkappa+1)\cos\frac{3\beta}{2}\right]$$

Зависимости от значений параметров P , η , $\varkappa$, α функция A_1 достигает максимума при различных β , $(-\pi \le \beta \le \pi)$. Из формулы /4.4/ видно, что для $k_4 > 0$ функция A_1 достигает максимального значения по β при $\beta = 0$, и оно равно

$$\max_{\beta} A_1 = \frac{p\sqrt{l}}{8\sqrt{2}\,\mu}\left[\frac{1+\eta}{2}(\mu-1)+(1-\eta)\cos 2\alpha\right](2\mu+6) \qquad /4.5/$$

Это выражение представим в виде

$$\max_{\beta} A_1 = p\sqrt{l}\,(\varphi_6 + \varphi_7 \cos 2\alpha) \qquad /4.6/$$

где

$$\varphi_6 = \frac{(1+\eta)(\mu-1)(3+\mu)}{8\sqrt{2}\,\mu}\,, \quad \varphi_7 = \frac{(1-\eta)(3+\mu)}{4\sqrt{2}\,\mu} \qquad /4.7/$$

Теперь определим $\max_{\beta} A_1$ для случая $k_4 < 0$. Введем обозначение

$$S_2 = 5\cos\frac{\beta}{2} + (2\mu+1)\cos\frac{3\beta}{2} \qquad /4.8/$$

Тогда

$$\frac{dS_2}{d\beta} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left[5 + 3(2\mu+1)\left(3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right] \qquad /4.9/$$

В условии $\frac{dS_2}{d\beta} = 0$ • $\frac{d^2S_2}{d\beta^2} > 0$ имеем

$$\beta = \arccos\left[-\frac{3\mu+4}{3(2\mu+1)}\right] \qquad /4.10/$$

Подставив это значение β в соотношение /4.8/, получим

$$\min_{\beta} S_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(3\mu-1)^3}{6(2\mu+1)}} \qquad /4.11/$$

тогда величина $\max_\beta A_1$ для случая $k_4<0$ запишется в виде

$$\max_\beta A_1 = -p\sqrt{\ell}\,(\varphi_8 + \varphi_9 \cos 2\alpha) \qquad /4.12/$$

где

$$\varphi_8 = \frac{(1+\eta)(\varkappa-1)}{12\varkappa}\sqrt{\frac{(3\varkappa-1)^3}{12(2\varkappa+1)}}\,,\quad \varphi_9 = \frac{1-\eta}{6\varkappa}\sqrt{\frac{(3\varkappa-1)^3}{12(2\varkappa+1)}} \qquad /4.13/$$

Остается теперь еще, исходя из выражения /4.2/, определить условия, при выполнении которых имеет место $k_4>0$ или $k_4<0$. Заметим, что в дальнейшем будем рассматривать случаи нагружения, для которых $p \geq q$, т.е. $p>0$, $\eta \leq 1$ и $p<0$, $\eta \geq 1$. В случае $p>0$, $\frac{3-\varkappa}{1+\varkappa} \leq \eta \leq 1$ имеем $k_4>0$ для всевозможных ориентаций $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$. Нижний предел изменения параметра η определяется из соотношения

$$\frac{1+\eta}{2}(\varkappa-1) - (1-\eta) \geq 0 \qquad /4.14/$$

При $p>0$, $\eta \leq \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}$ соотношение $k_4>0$ эквивалентно такому неравенству

$$\frac{1+\eta}{2}(\varkappa-1) + (1-\eta)\cos 2\alpha > 0 \qquad /4.15/$$

Отсюда имеем

$$|\alpha| < \alpha_1 = \frac{1}{2}\arccos\frac{(1+\eta)(1-\varkappa)}{2(1-\eta)} \qquad /4.16/$$

Для $p<0$, $1 \leq \eta \leq \frac{1+\varkappa}{3-\varkappa}$ неравенство $k_4<0$ имеет мес-

то при любых $|\alpha| \le \frac{\pi}{2}$. Верхний предел изменения параметра η определяется из соотношения

$$\frac{1+\eta}{2}(\varkappa-1)+(1-\eta)\ge 0 \qquad /4.17/$$

В случае $p<0$. $\frac{1+\varkappa}{3-\varkappa} \le \eta < \infty$ соотношение $k_4<0$ эквивалентно неравенству /4.15/. В данном случае этому неравенству удовлетворяют значения $|\alpha|>\alpha_8$.

На основании критерия /4.3/. выражений /4.6/. /4.12/. а также высказанного относительно величины k_4 . запишем формули для вычисления предельных напряжений ρ . В случае $\rho>0$. $\eta \le 1$ получим

$$\rho = K_0 \ell^{-1/2}(\varphi_6+\varphi_7\cos 2\alpha)^{-1} \quad \text{для } |\alpha| \le \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \eta \ge \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}$$

$$\text{или для } |\alpha| \le \alpha_8 \text{ при других } \eta \qquad /4.18/$$

$$\rho = -K_0 \ell^{-1/2}(\varphi_8+\varphi_9\cos 2\alpha)^{-1} \quad \text{для } |\alpha| \ge \alpha_8 \text{ при } \eta \le \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}$$

Для $\rho<0$. $\eta \ge 1$ имеем

$$\rho = -K_0 \ell^{-1/2}(\varphi_8+\varphi_9\cos 2\alpha)^{-1} \quad \text{при } |\alpha| \le \frac{\pi}{2} \quad \text{и } \eta \le \frac{1+\varkappa}{3-\varkappa}$$

$$\text{или при } |\alpha| \ge \alpha_8 \text{ и других } \eta \qquad /4.19/$$

$$\rho = K_0 \ell^{-1/2}(\varphi_6+\varphi_7\cos 2\alpha)^{-1} \quad \text{при } |\alpha| \le \alpha_8 \quad \text{и } \eta \ge \frac{1+\varkappa}{3-\varkappa}$$

Полученные формулы можно представить одним выражением

$$\rho = K_0 \ell^{-1/2} \varphi_{10}(\alpha, \eta, \varkappa) \qquad /4.20/$$

Здесь аналитический вид функции $\varphi_{10}(\alpha, \eta, \varkappa)$ зависит от значений аргументов α , η , $\varkappa$.

4.2. Вычисление функций распределения предельных напряжений

Вследствие случайности величин α , ℓ предельные напряжения ρ , q – также случайные величины. Выражение для функции распределения предельных напряжений ρ элемента пластины с одним включением по аналогии с формулой /6.7/ запишем в виде

$$F_1(|\rho|, \eta) = \int_{\alpha_9}^{\alpha_{10}} f_2(\alpha) \left\{ 1 - F_3\left[\frac{K_\sigma^2 \varphi_{10}^2(\alpha, \eta, \varkappa)}{\rho^2} \right] \right\} d\alpha \qquad /4.21/$$

$$\rho_{min} \le |\rho| \le \rho_{max}$$

В конкретных случаях пределы интегрирования по α должны обеспечивать выполнение условия

$$\ell_{min} \le \frac{K_\sigma^2 \varphi_{10}^2(\alpha, \eta, \varkappa)}{\rho^2} \le \ell_{max} , \quad (\ell_{min} \le \ell \le \ell_{max}) \qquad /4.22/$$

Дальнейшие вычисления проведем, предполагая, что распределение полудлин включений имеет вид /1.2/. Тогда на основании выражений /1.4/, /4.21/ имеем

$$F_1(|\rho|, \eta) = (a\rho^2)^{s-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha) \left[K_\sigma^2 \varphi_{10}^2(\alpha, \eta, \varkappa) + a\rho^2 \right]^{1-s} d\alpha , \qquad /4.23/$$

$$0 \le |\rho| < \infty$$

Если пластина содержит n включений, то функция распределения предельной нагрузки пластины вычисляется по формуле /69/. При больших n имеем выражение /I.6/. Для параметров c и m распределения Вейбулла /I.6/, используя соотношения /I.7/ и /4.23/, получим

$$m = 2(S-1)$$

$$c = \left(\frac{a}{K_0^2}\right)^{S-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha)\, \varphi_{10}^{2-2S}(\alpha, \eta, \varkappa)\, d\alpha \qquad /4.24/$$

Здесь, как и в случае дефектов-трещин, параметр однородности композита m линейно зависит от показателя S распределения полудлин включений.

Теперь запишем формулы для $F_1(|p|, \eta)$, используя конкретные выражения функций $f_2(\alpha)$ и $\varphi_{10}(\alpha, \eta, \varkappa)$, а также соотношение /4.23/. Для изотропных материалов естественно считать все ориентации включений равновероятными, т.е. $f_2(\alpha) = \frac{1}{\pi}$, $(|\alpha| \le \frac{\pi}{2})$. Аналитические выражения функции $\varphi_{10}(\alpha, \eta, \varkappa)$ можно взять из формул /4.18/, /4.19/. В случае $p > 0$ имеем:

для $\frac{3-\varkappa}{1+\varkappa} \le \eta \le 1$

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi}(ap^2)^{S-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(\varphi_6 + \varphi_7 \cos 2\alpha)^2}{K_0^2 + ap^2(\varphi_6 + \varphi_7 \cos 2\alpha)^2}\right]^{S-1} d\alpha, \qquad /4.25/$$

для $-\infty < \eta \le \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}$

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi}(ap^2)^{S-1} \left\{ \int_0^{\alpha_0} \left[\frac{(\varphi_6 + \varphi_7 \cos 2\alpha)^2}{K_0^2 + ap^2(\varphi_6 + \varphi_7 \cos 2\alpha)^2}\right]^{S-1} d\alpha + \right.$$

$$+\int_{\alpha_8}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(\varphi_8+\varphi_9\cos 2\alpha)^2}{K_0^2+ap^2(\varphi_8+\varphi_9\cos 2\alpha)^2}\right]^{s-1}d\alpha\Big\} \qquad /4.26/$$

Рассмотрим случай двухосного сжатия $(p<0, q<0)$. Для $1\le\eta\le\frac{1+\mu}{3-\mu}$ будем иметь

$$F_1(-p,\eta)=\frac{2}{\pi}(ap^2)^{s-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(\varphi_8+\varphi_9\cos 2\alpha)^2}{K_0^2+ap^2(\varphi_8+\varphi_9\cos 2\alpha)^2}\right]^{s-1}d\alpha \qquad /4.27/$$

При $\frac{1+\mu}{3-\mu}\le\eta<\infty$ получим формулу /4.26/ с заменой в левой ее части p на $-p$.

Если $\eta=1$, то выражения /4.25/, /4.27/ существенно упрощаются. Как показывают формулы /4.7/, /4.13/, при $\eta=1$ имеем $\varphi_7=\varphi_9=0$. Вследствие этого получаем:

при $p=q>0$

$$F_1(p,1)=\left(\frac{ap^2\varphi_6^2}{K_0^2+ap^2\varphi_6^2}\right)^{s-1} \qquad /4.28/$$

при $p=q<0$

$$F_1(-p,1)=\left(\frac{ap^2\varphi_8^2}{K_0^2+ap^2\varphi_8^2}\right)^{s-1} \qquad /4.29/$$

По формулам /4.28/ и /69/ проведены вычисления функции распределения $F_n(p,1)$ для $n=100$, $s=2$ и различных значений коэффициента Пуассона ν матрицы. Результаты показаны на рис.4.2. Из графиков видно, что в случае двухосного симметричного растяжения при заданном уровне напряжения вероятность разрушения композита возрастает с уменьшением коэффициента Пуассона матрицы. С другой стороны, увеличение характеристики ν

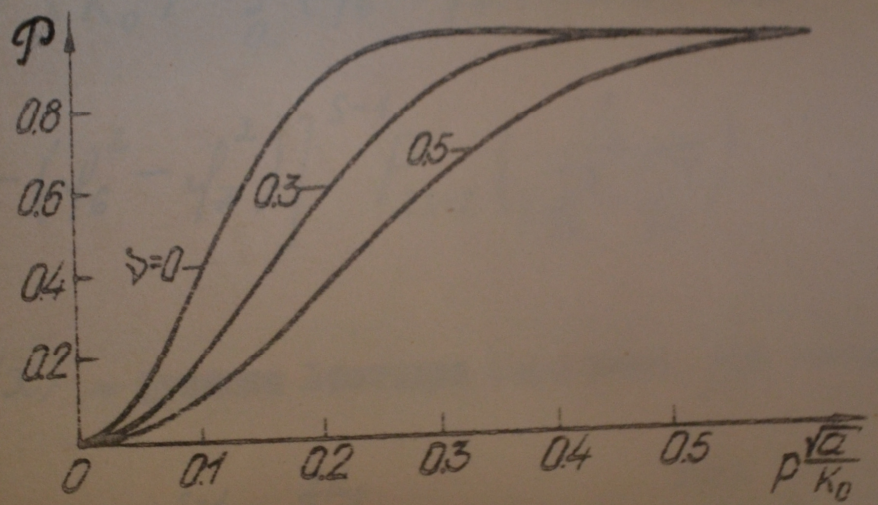


Рис.4.2

приводит к росту напряжения, соответствующих фиксированной вероятности разрушения.

Перейдем к получению конкретных выражений для параметра c распределения /1.6/. Эти выражения дают предельный переход /1.7/ с учетом формул /4.23/ - /4.27/ или подстановка в соотношение /4.29/ значений функций $f_2(\alpha)$ и $f_{10}(\alpha, \gamma, \varkappa)$. Рассмотрим случай $p>0$. Для $\frac{3-\varkappa}{1+\varkappa} \le \gamma \le 1$ имеем

$$c = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{K_0^2}\right)^{s-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_6 + f_7 \cos 2\alpha)^{2s-2} d\alpha = \tag{4.30}$$

$$= \left[\frac{a}{K_0^2}(f_6^2 - f_7^2)\right]^{s-1} P_{2s-2}\left(\frac{f_6}{\sqrt{f_6^2 - f_7^2}}\right)$$

где $P_\nu(x)$ - функция Лежандра 1-го рода. При $-\infty < \gamma \le \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}$ получим

$$c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{K_0^2}\right)^{s-1} \left[\int_0^{2\alpha_8} (f_6 + f_7 \cos\alpha)^{2s-2} d\alpha + \right. \tag{4.31}$$

$$\left. + \int_{2\alpha_8}^{\pi} (f_8 + f_9 \cos\alpha)^{2s-2} d\alpha\right]$$

Запишем выражения для параметра c при двухосном сжатии $(p<0, q<0)$. Для $1 \le \gamma \le \frac{1+\varkappa}{3-\varkappa}$ будем иметь

$$c = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{K_0^2}\right)^{s-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_8 + f_9 \cos 2\alpha)^{2s-2} d\alpha = \tag{4.32}$$

$$= \left[\frac{a}{K_0^2}(f_8^2 - f_9^2)\right]^{s-1} P_{2s-2}\left(\frac{f_8}{\sqrt{f_8^2 - f_9^2}}\right)$$

при $\frac{1+\mu}{3-\mu} \le \eta < \infty$ получаем формулу /4.31/. Для некоторых видов напряженного состояния формулы для параметра c принимают весьма простой вид. При двухосном симметричном растяжении $(p=q>0)$ имеем

$$c = \left(\frac{a \varphi_6^2}{K_0^2} \right)^{s-1} \qquad /4.33/$$

Для двухосного сжатия $(p=q<0)$ получим

$$c = \left(\frac{a \varphi_8^2}{K_0^2} \right)^{s-1} \qquad /4.34/$$

4.3. Среднее значение и дисперсия случайной прочности композита

Установленные выше выражения для параметров c , m распределения /I.6/ дают возможность получения в случае большого числа включений сравнительно простых формул для вероятностных характеристик прочности композита. Среднее значение и дисперсия предельной нагрузки вычисляются по формулам /I.I9/. В случае $p<0$ в этих формулах необходимо заменить p на $-p$. Из выражения /I.23/ можно определить наиболее вероятное значение прочности.

Перейдем к исследованию зависимости числовых характеристик случайных предельных напряжений p от вида напряженного состояния /параметра η /. Для этой цели выполнено вычисление величины $\langle p \rangle$ при двухосном симметричном $(\eta=1)$ и одноосном растяжении $(\eta=0)$, а также различных ν , m .

Графики зависимости величины $\lambda_2 = \frac{\langle p \rangle_{\eta=1}}{\langle p \rangle_{\eta=0}}$ от параметра m при различных ν показаны на рис.4.3. Из этих графиков можно сделать вывод о том, что зависимость среднего значения прочности композита от вида напряженного состояния определяется величинами ν , m . На рис.4.4, 4.5 представлены кривые зависимости дисперсии $\mathcal{D}(p)$ предельных напряжений $p>0$ от параметра η для некоторых значений величин ν , m. Из этих рисунков видно, что значения параметра η , при которых дисперсия прочности достигает максимального значения, зависят от величин ν , m . Максимальные значения дисперсии предельных напряжений возрастают с увеличением коэффициента Пуассона ν материала матрицы.

По формуле /I.22/ можно определить коэффициент изменчивости прочности композита.

4.4. Средние кривые предельных нагрузок и линии равной вероятности разрушения

Как уже отмечалось в п.I.3, на основании формулы /I.I9/ для среднего значения $\langle p \rangle$ и соотношения $\langle q \rangle = \eta \langle p \rangle$, а также выражений /4.30/ – /4.34/ для параметра c можно построить в координатах $\langle p \rangle$, $\langle q \rangle$ средние кривые предельных напряжений. Эти кривые для некоторых значений величин ν , m показаны на рис.4.6, 4.7. Необходимые для построения статистических кривых характеристики m , ν , $\sqrt[m]{n}\sqrt{a}/K_0$ можно определять из базисных опытов при некоторых соотношениях главных нормальных напряжений. Зависимостью критериальных кривых от n можно учитывать размер тела, т.е. масштабный эффект. Для рассматриваемого равномерного распределения включений по ориента-

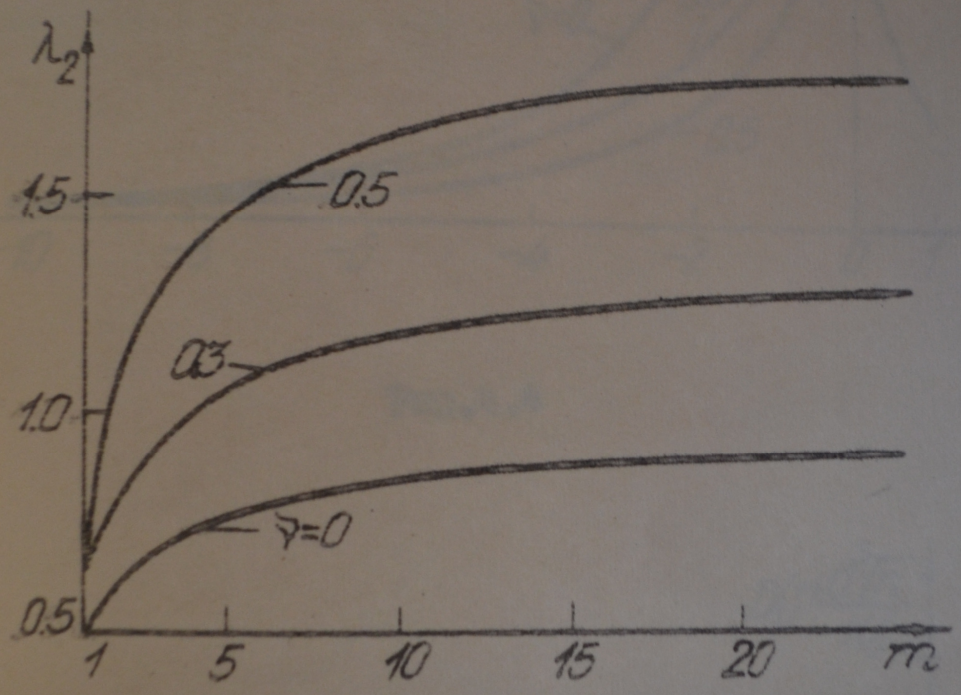


Рис.4.3

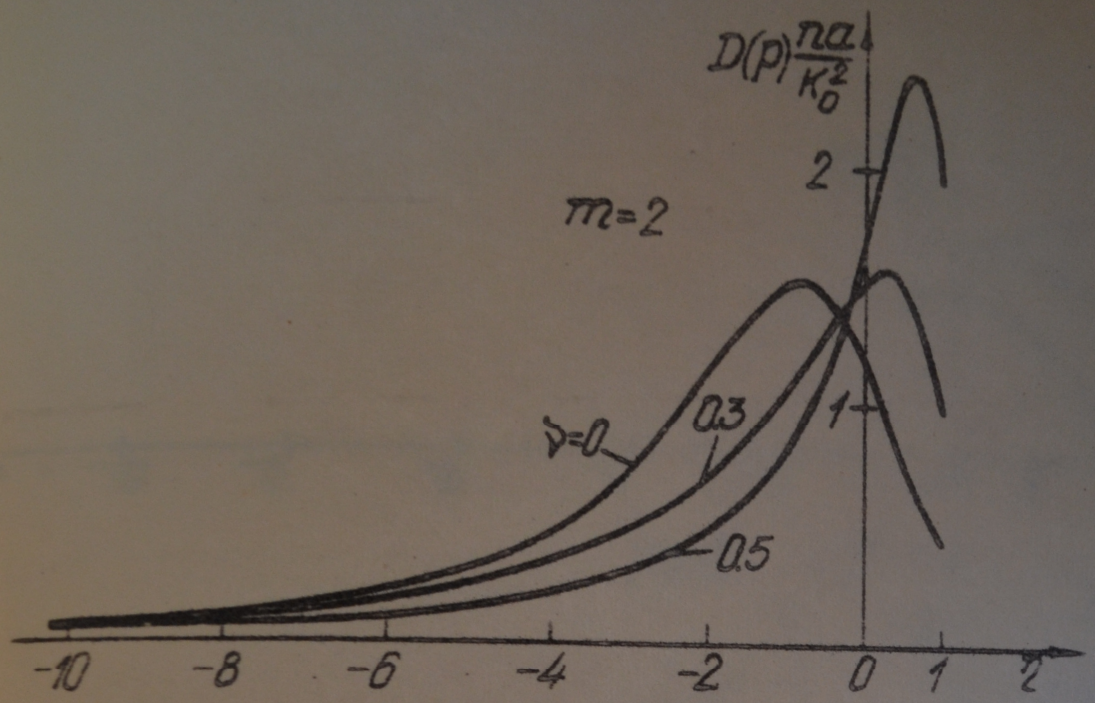
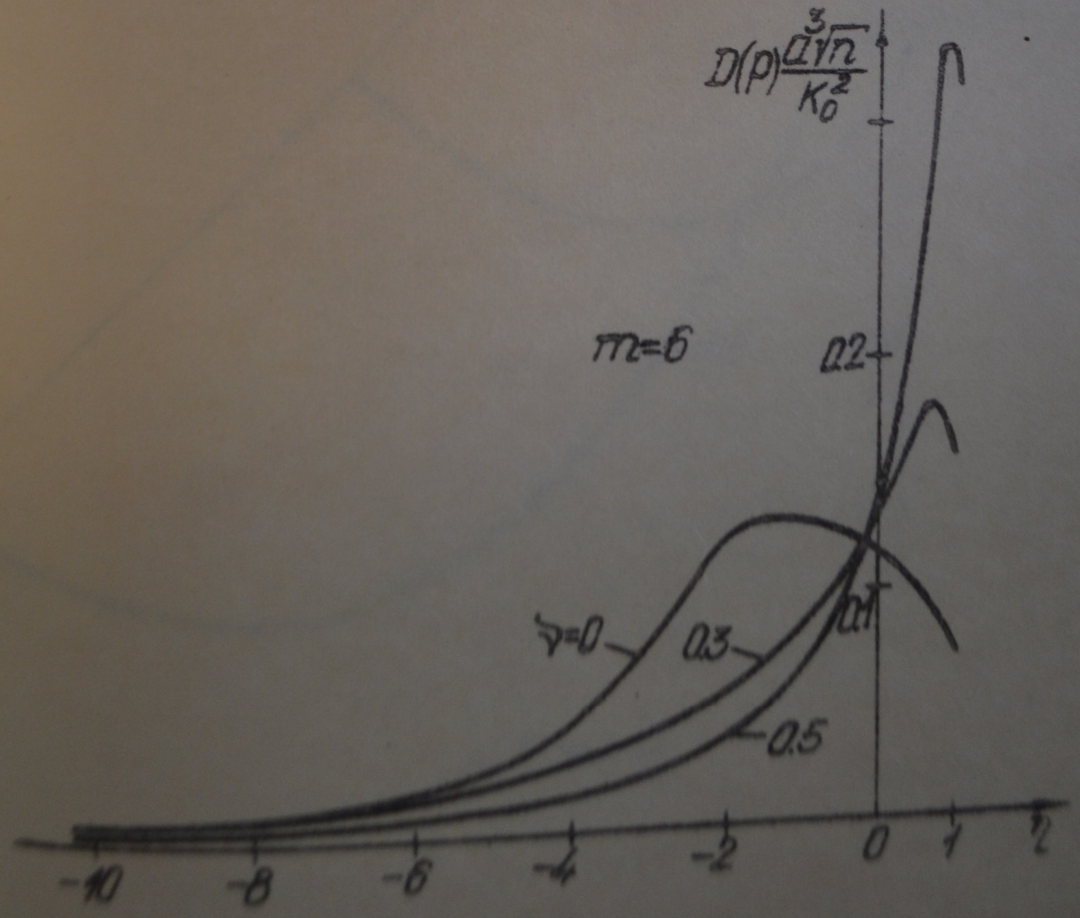
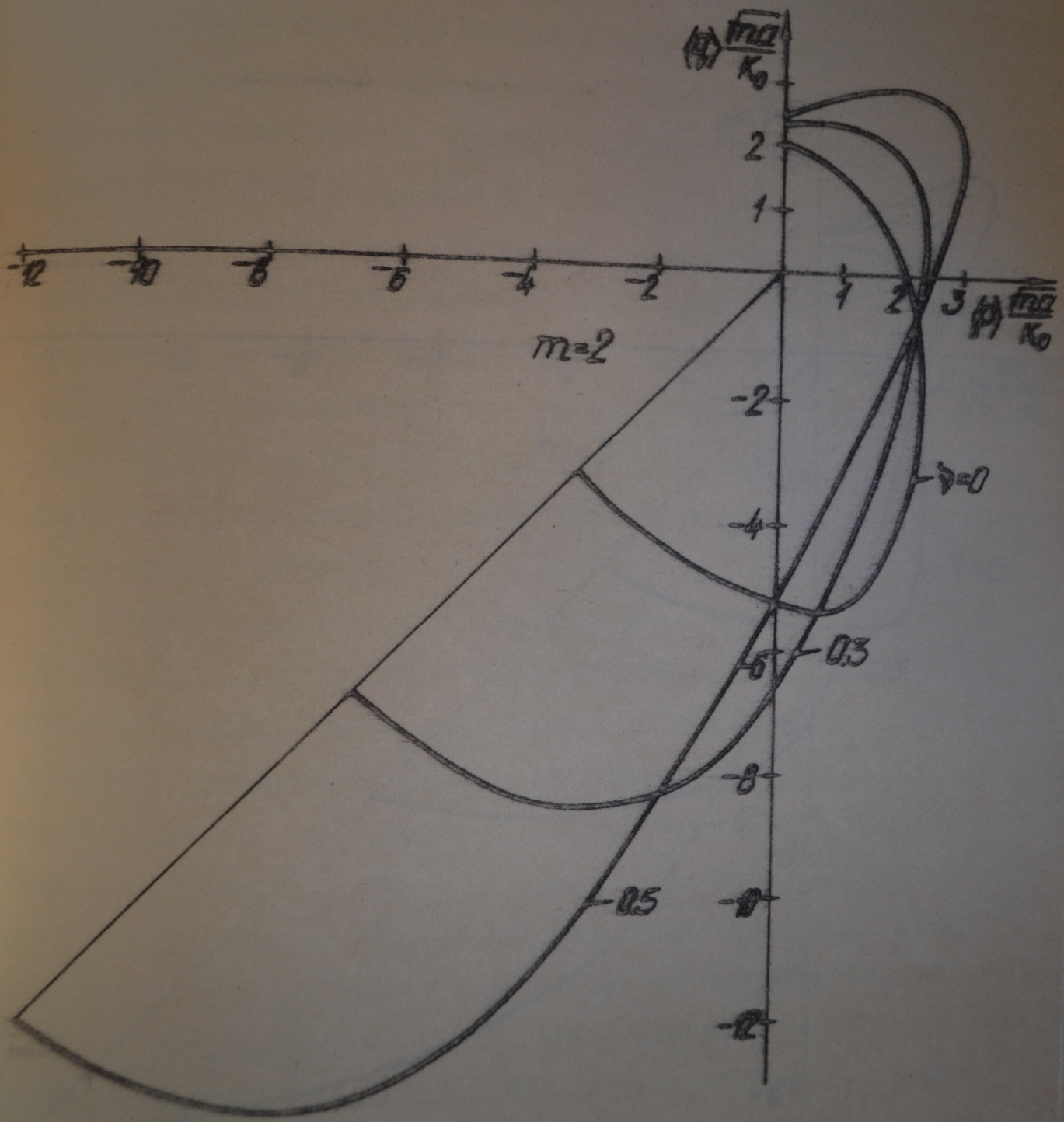

D(p)na/K₀²
2
m=2
1
p=0
0.3
0.5
-10
-8
-6
-4
-2
0
1
p

Рис.4.4


D(p)a³√n/K₀²
m=6
0.2
0.1
p=0
0.3
0.5
-10
-8
-6
-4
-2
0
1
p



$(q)\frac{\sqrt{ma}}{K_0}$
2
1
-12
-10
-8
-6
-4
-2
1
2
3
$(p)\frac{\sqrt{ma}}{K_0}$
m=2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
ν=0
0.3
0.5

Рис.4.6

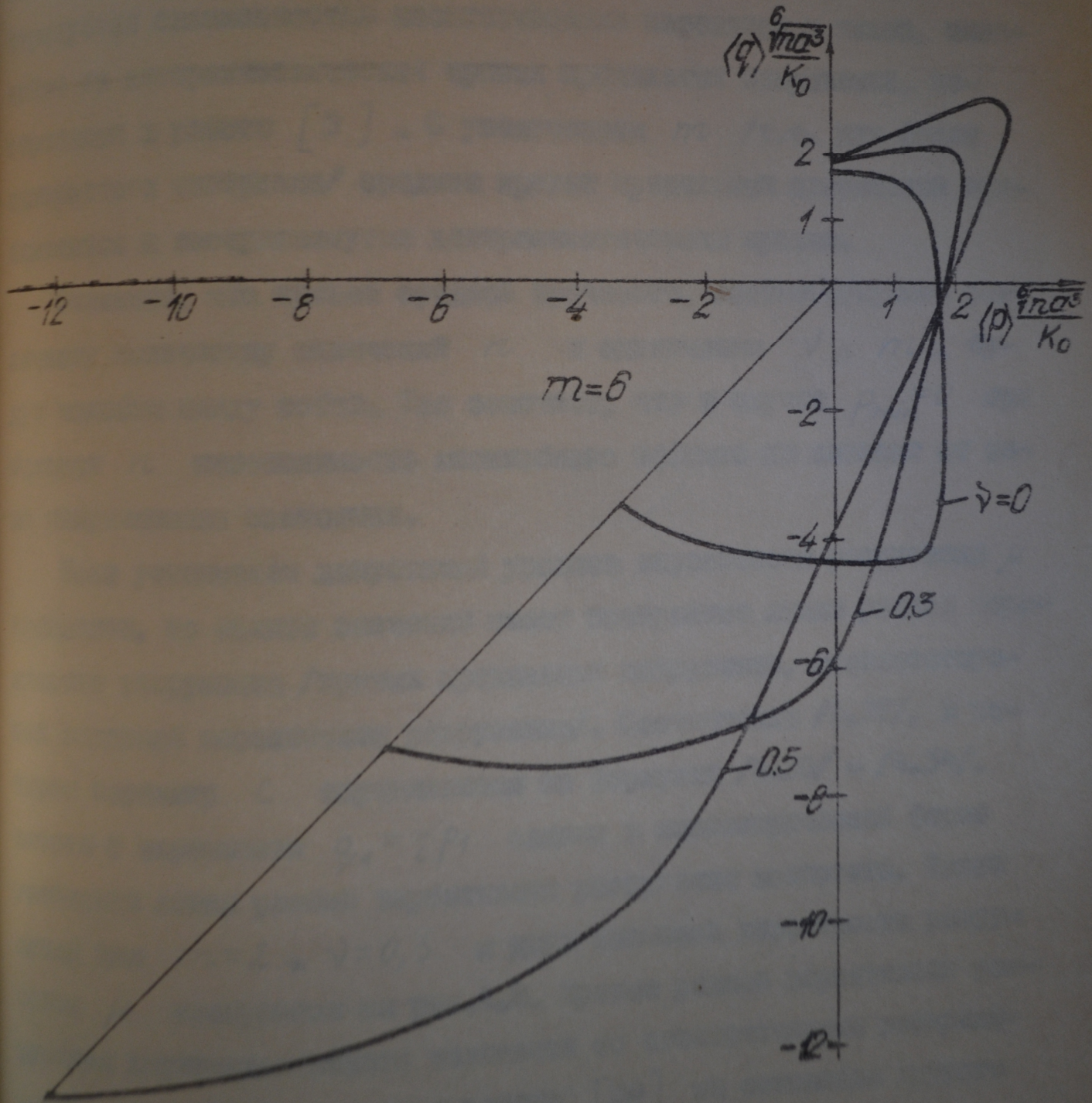

$\langle q \rangle \frac{6}{\pi n a^3} K_0$
$\langle p \rangle \frac{6}{\pi n a^3} K_0$
2
1
-12
-10
-8
-6
-4
-2
1
2
m=6
-2
-4
-6
-8
-10
-12
$\gamma=0$
0.3
0.5

Рис.4.7

ниях указанные кривые симметричны относительно прямой $\langle p\rangle=\langle q\rangle$. Из рис.4.6, 4.7 видно, что вид кривой средней прочности композита зависит от значений параметров ν, m. Кривые статистического критерия прочности рассматриваемых композитов характеризуются сглаженностью неестественных переломов и пиков, имеющихся на детерминистических кривых предельных напряжений, построенных в работе [3]. С увеличением m /т.е. для более однородного материала/ средние кривые предельных напряжений приближаются к вышеупомянутым детерминистическим кривым.

Очевидно, что кривые средней прочности, соответствующие различному количеству включений n и одинаковым ν, m, будут подобны между собой. Это означает, что в случае $p_{min}=0$ при больших n интенсивность масштабного эффекта не зависит от вида напряженного состояния.

Если установлен допустимый уровень вероятности разрушения μ композита, то важное значение имеет построение линий равной вероятности разрушения /кривых предельных напряжений, соответствующих заданной вероятности разрушения/. Соотношение /I.27/, в котором параметр c определяется по формулам /4.30/ - /4.34/, вместе с выражением $q_1=\gamma p_1$ задают в параметрической форме уравнение линии равной вероятности разрушения композита. Такие линии для $m=2$, $\nu=0,3$ и двух значений вероятности разрушения μ изображены на рис.4.8. Кривые равной вероятности разрушения двухкомпонентного композита со стохастическим распределением прочности построены в работе [30] на основании другого подхода.

Из формулы /I.27/ с учетом независимости параметра c от μ следуют выводы о подобии между собой линий равной вероятности разрушения при различных μ и о расширении области допустимых значений напряжений p, q с увеличением назначаемой вероят-

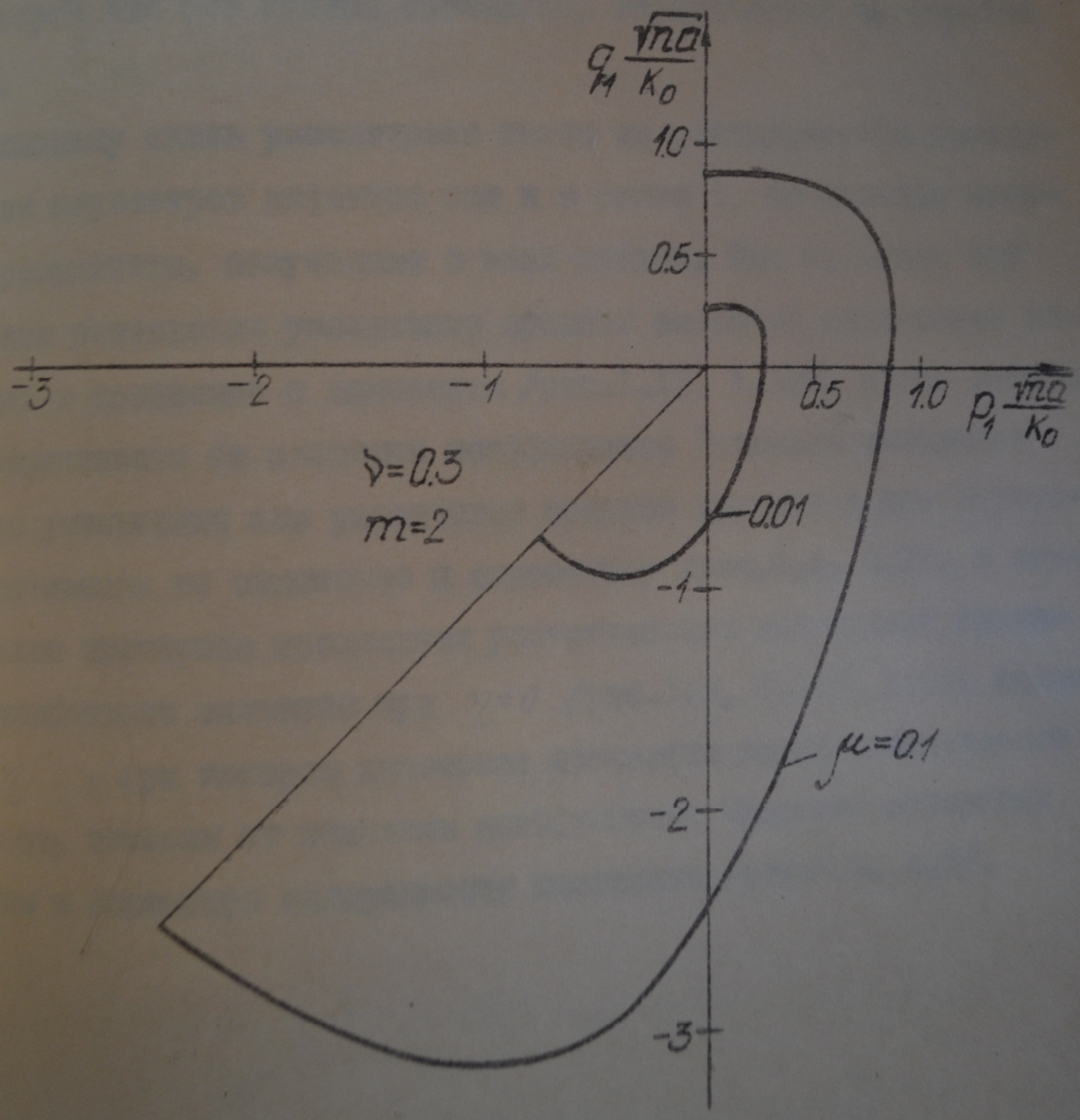

$q_1 \frac{\sqrt{ma}}{K_0}$
1.0
0.5
-3
-2
-1
0.5
1.0
$p_1 \frac{\sqrt{ma}}{K_0}$
$\gamma = 0.3$
$m = 2$
0.01
-1
$\mu = 0.1$
-2
-3

Рис.4.8

ности разрушения. Сравнивая первую из формул /I.I9/ с выражением /I.27/, видим, что средние кривые предельных напряжений и кривые равной вероятности разрушения подобны между собой при одинаковых m , V . Величина вероятности разрушения μ_1 , для которой эти обе кривые совпадают, определяется по формуле /I.29/.

Поскольку здесь рассмотрено такое же распределение геометрических параметров дефектов как и в главе I, то сравним некоторые результаты, полученные в этих главах. Там мы имели при двухосном растяжении уменьшение средних значений предельных напряжений в сравнении с одноосным /рис.I.II, I.I2/, здесь получили в зависимости от значений коэффициента Пуассона материала матрицы уменьшение или увеличение средней прочности при двухосном растяжении по отношению к одноосному /рис.4.6, 4.7/. В первой главе дисперсия предельных растягивающих напряжений принимала наибольшее значение при $\eta=0$ /рис.I.9, I.I0/, здесь значение η , при котором дисперсия прочности имеет максимальное значение, зависит от величины коэффициента Пуассона материала матрицы и параметра однородности композита /рис.4.4, 4.5/.

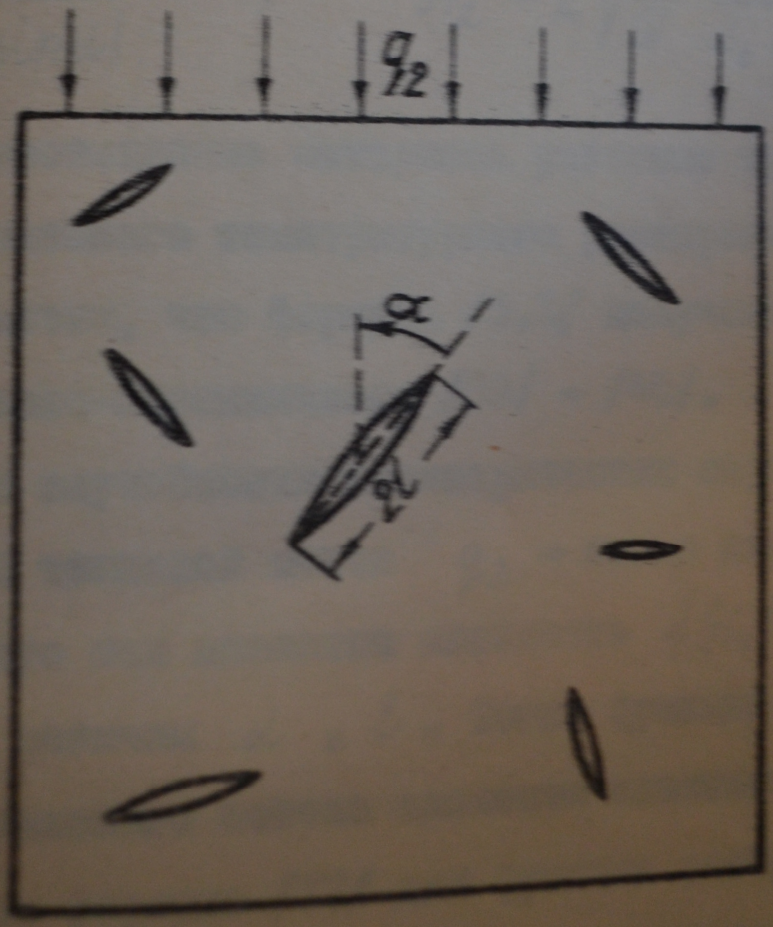


Рис.5.1

тепловым потоком подразумевается значение теплового потока, превышение которого приводит к развитию трещины /разрушению пластины/. В работах [34,60] приведены выражения для предельного теплового потока для бесконечной пластины с произвольно ориентированной теплоизолированной трещиной. Эти выражения представим в виде

$$q_2 = \frac{A_2}{l^{3/2}|\sin\alpha|}, \qquad A_2 = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\frac{K_c}{\alpha_t E} \qquad /5.1/$$

где K_c - сопротивление материала развитию трещины, α_t - коэффициент линейного температурного расширения, E - модуль упругости. Отметим, что формула /5.1/ получена на основании критерия Панасюка-Бережницкого /39/ - /40/.

Вследствие случайности геометрических параметров трещин α, l предельный тепловой поток q_2 - также случайная величина. Предположим, что нам известна плотность $f(\alpha,l)$ вероятностного распределения величин α, l. Тогда функция распределения предельного теплового потока элемента пластины с одной трещиной определяется по формуле /17/ для функции распределения вероятностей функции от случайных величин. Эта формула в данном случае запишется так

$$F_1(q_2) = \iint_R f(\alpha,l)\,d\alpha\,dl, \qquad q_{2,min} < q_2 < q_{2,max} \qquad /5.2/$$

где R - двумерная область возможных значений случайных величин α, l, для которой имеет место неравенство $A_2 l^{-3/2}|\sin^{-1}\alpha| < q_2$. При $q_2 \le q_{2,min}$ имеем $F_1(q_2) = 0$.

Будем считать, что случайные величины α, l статистиче-

также, что возможные значения случайной ориентации трещин удовлетворяют соотношению $|\alpha| \le \frac{\pi}{2}$. В этом случае формула /5.2/ преобразуется к виду

$$F_1(q_2) = \int_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} f_2(\alpha) \Big[\int_{\left(\frac{A_2}{q_2 |\sin\alpha|}\right)^{2/3}}^{l_{max}} f_3(l)\, dl \Big] d\alpha = \qquad /5.3/$$

$$= \int_{\alpha_{11}}^{\alpha_{12}} f_2(\alpha) \Big\{ 1 - F_3\Big[\Big(\frac{A_2}{q_2 |\sin\alpha|} \Big)^{2/3} \Big] \Big\} d\alpha, \quad q_{2,min} < q_2 < q_{2,max}$$

Для конкретных наименьшего l_{min} и наибольшего l_{max} значений случайной полудлины трещины l пределы интегрирования в формуле /5.3/ должны обеспечивать выполнение условия

$$l_{min} \le \Big(\frac{A_2}{q_2 |\sin\alpha|} \Big)^{2/3} \le l_{max}$$

Область возможных значений случайных полудлин трещин $l \ge 0$ может быть полубесконечной или конечной. Рассмотрим случай полубесконечной области возможных значений случайной величины l $(0 \le l < \infty)$. Физически это означает, что в материале допускается с отличной от нуля вероятностью существование трещин любой длины. На основании выражения /5.1/ нетрудно видеть, что $q_{2,min} = 0$, $q_{2,max} \to \infty$. Плотность распределения полудлин трещин принимаем в виде /1.2/. Тогда, используя выражения /5.3/, /1.4/, получим

$$F_1(q_2) = (a q_2^{2/3})^{s-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha) \Big(\frac{\sin^{2/3}\alpha}{A_2^{2/3} + a q_2^{4/3} \sin^{2/3}\alpha} \Big)^{s-1} d\alpha \qquad /5.4/$$

$$0 \le q_2 < \infty$$

Считая все ориентации трещины равновероятными, что эквивалентно соотношению $f_2 = \frac{1}{\pi}$, из формулы /5.4/ имеем

$$F_1(q_2) = \frac{2}{\pi}(a q_2^{2/3})^{s-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^{2/3}\alpha}{A_2^{2/3} + a q_2^{2/3} \sin^{2/3}\alpha} \right)^{s-1} d\alpha \qquad /5.5/$$

$$0 \le q_2 < \infty$$

Пусть область возможных значений случайной полудлины трещины ограничена некоторой конечной величиной d, $(0 \le l \le d)$. В этом случае из формулы /5.1/ видно, что $q_{2,min} = \frac{A_2}{d^{3/2}}$, $q_{2,max} \to \infty$.

Выражение /5.3/ примет вид

$$F_1(q_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_{13}} f_2(\alpha) \left\{ 1 - F_3 \left[\left(\frac{A_2}{q_2 |\sin\alpha|} \right)^{2/3} \right] \right\} d\alpha + \qquad /5.6/$$

$$+ \int_{\alpha_{13}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha) \left\{ 1 - F_3 \left[\left(\frac{A_2}{q_2 |\sin\alpha|} \right)^{2/3} \right] \right\} d\alpha, \quad \frac{A_2}{d^{3/2}} \le q_2 < \infty$$

где α_{13} - решение уравнения $A_2 d^{-3/2} \sin^{-1}\alpha = q_2$ на промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$. Это решение имеет вид

$$\alpha_{13} = \arcsin(A_2 q_2^{-1} d^{-3/2}) \qquad /5.7/$$

Предполагая, что распределение размеров трещин задано выражением /2.18/ и все ориентации трещин равновероятны, из формулы /5.6/ находим

$$F_1(q_2) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_{13}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{d} \left(\frac{A_2}{q_2 \sin\alpha} \right)^{2/3} \right]^{z+1} d\alpha \qquad /5.8/$$

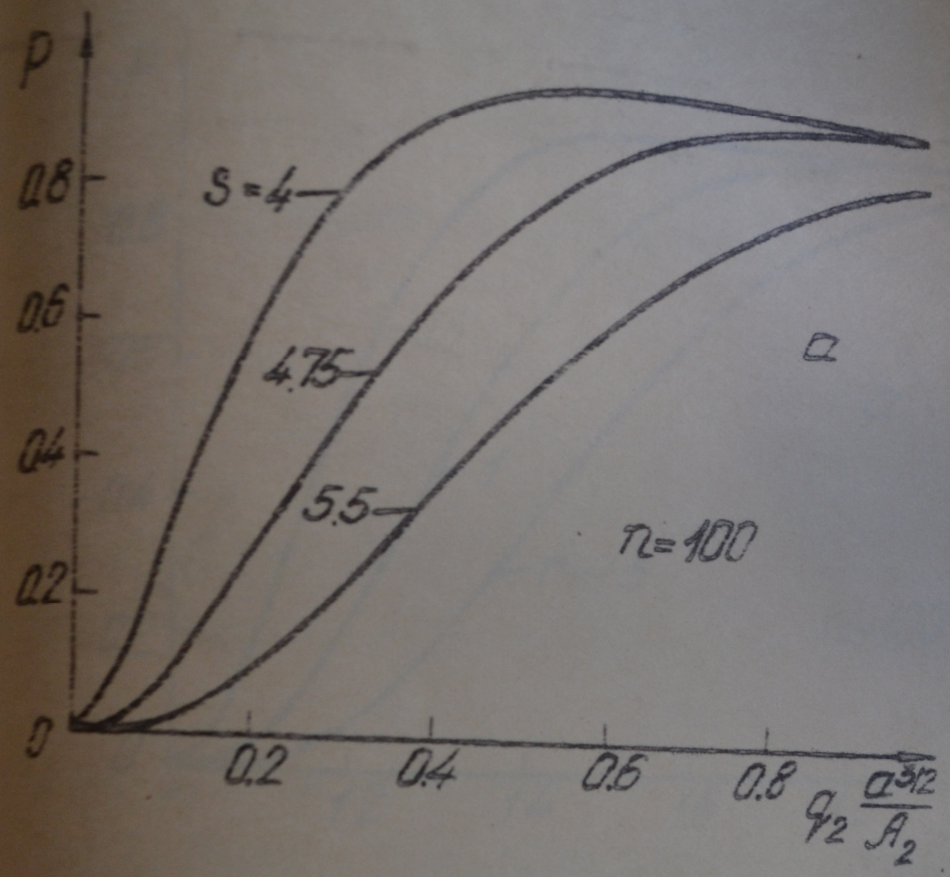
$$A_2 d^{-3/2} \leq q_2 < \infty$$

Если хрупкая пластина содержит n трещин, то считаем, что предельный тепловой поток для пластины равен наименьшему значению предельных тепловых потоков её элементов /гипотеза "наиболее слабого звена"/. Тогда функция распределения предельного теплового потока пластины с n трещинами определяется по формуле

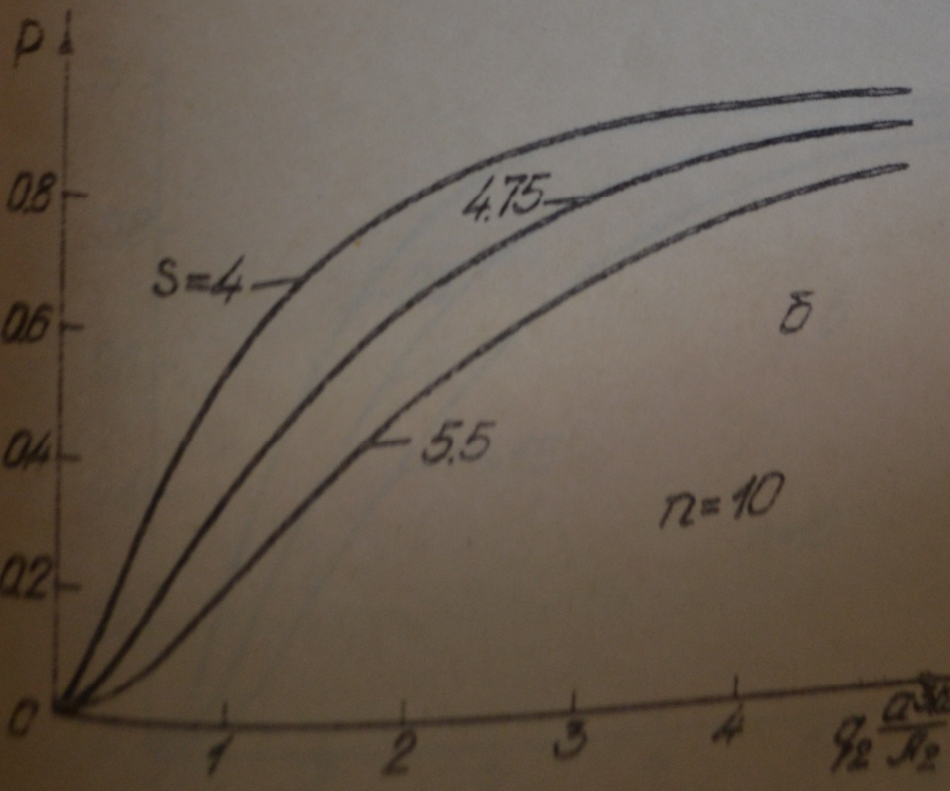
$$F_n(q_2) = 1 - [1 - F_1(q_2)]^n \qquad /5.9/$$

На основании выражений /5.5/, /5.8/, /5.9/ проведены вычисления функции $F_n(q_2)$ при различных значениях параметров формы S, z распределений размеров трещин и двух значениях числа дефектов $n = 10, 100$. Результаты вычислений показаны на рис.5.2 для случая $q_{2,min} = 0$ и на рис.5.3 для $q_{2,min} > 0$ в виде кривых зависимости вероятности разрушения F от приложенного теплового потока. Из графиков видно, что увеличение параметра S /рис.5.2/ или z /рис.5.3/ приводит к возрастанию значения теплового потока, соответствующего фиксированной вероятности разрушения. С другой стороны, при увеличении параметра S или z имеем уменьшение вероятности разрушения, соответствующей заданному значению теплового потока. Возрастание величины S или z ведет к удлинению участка изменения случайного теплового потока, для которого вероятность разрушения мала.

При больших n формула /5.9/ преобразуется в распределение

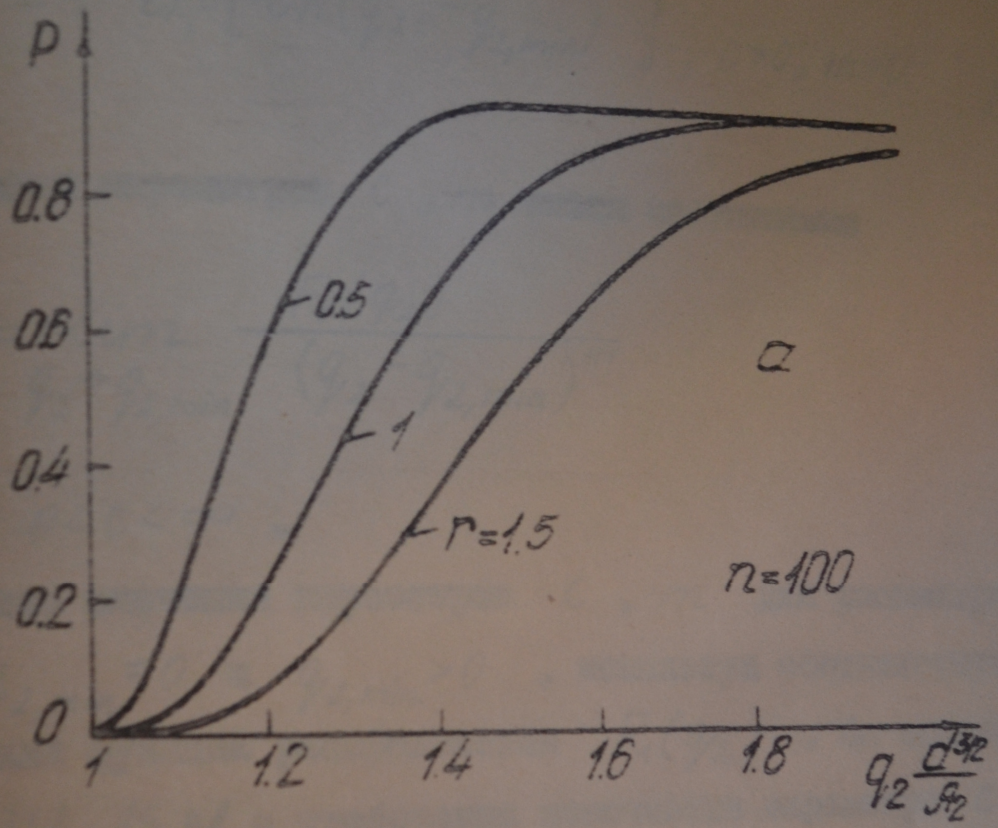

P
0.8
0.6
0.4
0.2
0
S=4
4.75
5.5
n=100
0.2
0.4
0.6
0.8
$q_2 \frac{a^{3/2}}{A_2}$

а


P
0.8
0.6
0.4
0.2
0
4.75
S=4
5.5
n=10
1
2
3
4
$q_2 \frac{a^{3/2}}{A_2}$

б

Рис.5.2


P
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
r=1.5
n=100
а
1
1.2
1.4
1.6
1.8
$q_2 \frac{d^{3/2}}{A_2}$

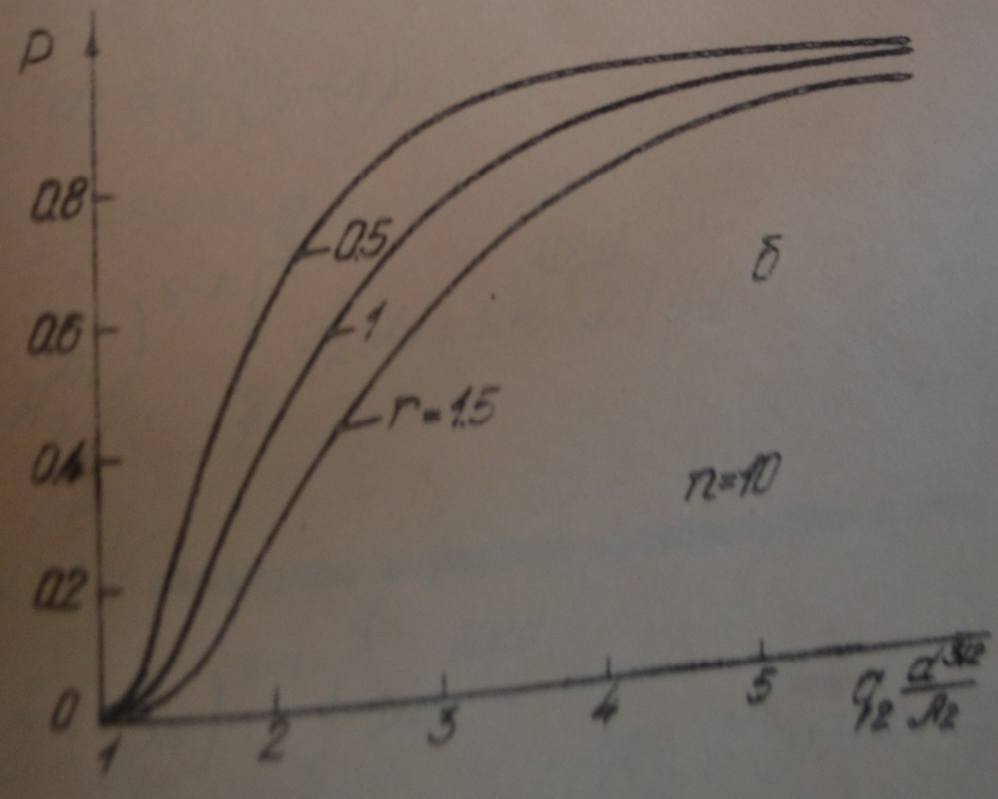

P
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
r=1.5
n=10
б
1
2
3
4
5
$q_2 \frac{d^{3/2}}{A_2}$

Рис.5.3

$$F_n(q_2) \approx 1 - \exp\left[-cn(q_2 - q_{2,min})^m\right], \quad c>0, \; m>0 \qquad /5.10/$$

Для вычисления параметров c , m имеем соотношение

$$c = \lim_{q_2 \to q_{2,min}} \frac{F_1(q_2)}{(q_2 - q_{2,min})^m} \qquad /5.11/$$

и условие $0 < c < \infty$.

Определим значения параметров c , m для рассматриваемых случаев $q_{2,min} = 0$ и $q_{2,min} > 0$, используя соответствующие выражения для функции распределения $F_1(q_2)$. На основании формул /5.11/, /5.4/ и требования конечности параметра c получаем

$$m = \frac{2}{3}(S-1) \qquad /5.12/$$

$$c = \left(\frac{a}{A_2^{2/3}}\right)^{S-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(\alpha) \left|\sin^{\frac{2(S-1)}{3}} \alpha\right| d\alpha \qquad /5.13/$$

При $f_2(\alpha) = \frac{1}{\pi}$ последнее выражение преобразуется к виду

$$c = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A_2^{2/3}}\right)^{S-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2(S-1)}{3}} \alpha \, d\alpha = \qquad /5.14/$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sqrt[3]{4}\,a}{A_2^{2/3}}\right)^{S-1} B\left(\frac{2S+1}{6}, \frac{2S+1}{6}\right)$$

где $B(x,y)$ – бета функция.

Вычисление параметров c , m для случая $q_{2,min} > 0$ осуществляется на основании формул /5.11/, /5.8/ с использованием

правила Лопиталя. Предполагая, что z целое число, для производной z -того порядка выражения /5.8/ с применением формулы /2.49/ имеем

$$F_1^{(z)}(q_2) = \frac{2}{\pi}(z+1)!\left(\frac{2}{3}\right)^z\left(\frac{A_2}{d}\right)^{2/3 z}\left(\frac{1}{q_2^{5/3}}\right)^z \cdot$$

$$\cdot \int_{\alpha_{13}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^{2/3}\alpha}\right)^z \left[1-\frac{1}{d}\left(\frac{A_2}{q_2 \sin\alpha}\right)^{2/3}\right] d\alpha + \ldots \qquad /5.15/$$

В этом выражении не выписаны слагаемые, содержащие интегралы от произведений определенных функций аргумента α на функции вида

$$f^k(\alpha) = \left[1-\frac{1}{d}\left(\frac{A_2}{q_2 \sin\alpha}\right)^{2/3}\right]^k, \quad k = 2,3,4\ldots \qquad /5.16/$$

На основании соотношений /5.15/, /2.49/ получаем

$$F_1^{(z+1)}(q_2) = \frac{2}{\pi}(z+1)!\left(\frac{2}{3}\right)^{z+1}\left(\frac{A_2}{d}\right)^{2/3 (z+1)} \cdot \left(\frac{1}{q_2^{5/3}}\right)^{z+1} \cdot$$

$$\cdot \int_{\alpha_{13}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^{2/3}\alpha}\right)^{z+1} d\alpha + \ldots \qquad /5.17/$$

здесь не приведены слагаемые, содержащие интегралы от произведения каких-то функций переменной α на функции $f^k(\alpha), (k=1,2\ldots)$.

Заметим, что все производные от функции распределения $F_1(q_2)$ $z+1$ -го порядка включительно не содержат слагаемых без интегралов вследствие того, что $f^k(\alpha_{13}) = 0$, $(k=1,2\ldots)$. При пре-

дельном переходе $q_2 \to A_2 d^{-3/2}$ все указанные производные бу-
дут превращаться в нуль, так как

$$\lim_{q_2 \to A_2 d^{-3/2}} \alpha_{13} = \frac{\pi}{2} \qquad /5.18/$$

Для производной $r+2$ -го порядка, используя выражения /5.17/, /2.49/, получим

$$F_1^{(r+2)}(q_2) = \frac{2}{\pi}(r+1)!\left(\frac{2}{3}\right)^{r+1}\left(\frac{A_2^{2/3}}{d\,q_2^{5/3}}\right)^{r+1} \cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{A_2^2}{q_2^2 d^3}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{q_2^{2/3} d}{A_2^{2/3}}\right)^{r+1}\frac{A_2}{q_2^2 d^{3/2}} + \ldots \qquad /5.19/$$

Здесь не выписаны слагаемые, содержащие интегралы. Эти слагаемые нам не понадобятся, потому что на основании соотношения /5.18/ они дают нулевые значения при предельном переходе $q_2 \to A_2 d^{-3/2}$.

Используя правило Лопиталя, формулу /5.11/ преобразуем к виду

$$c = \lim_{q_2 \to A_2 d^{-3/2}} \frac{F_1^{(r+2)}(q_2)}{\left[\left(q_2 - A_2 d^{-3/2}\right)^m\right]^{(r+2)}} \qquad /5.20/$$

Здесь верхний индекс $(r+2)$ обозначает производные $r+2$ -го порядка по переменной q_2 от соответствующих выражений. На основании формул /5.20/, /5.19/ и условия конечности величины $c > 0$ получаем такое выражение для параметра однородности на-

$$m = z + \frac{3}{2} \qquad /5.21/$$

существляя предельный переход /5.20/ с использованием соотноше-
/5.19/. /5.21/. находим

$$C = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{(z+1)!}{\prod_{k=0}^{z+1} (z+\frac{3}{2}-k)} \left(\frac{2}{3}\right)^{z+1} \left(\frac{d^{3/2}}{A_2}\right)^{z+\frac{3}{2}} \qquad /5.22/$$

Итак, при действии на пластины теплового потока имеет место
и в случае силового нагружения линейные зависимости /5.12/,
5.21/ между параметром однородности материала m и параметра-
формы S . z распределения размеров трещин.

5.2. Числовые характеристики предельного теплового потока

На основании известной функции распределения $F_n(q_2)$ можно
определить ряд числовых характеристик /среднее значение, диспер-
сию и т.п./ предельного теплового потока. Например, для среднего
значения $\langle q_2 \rangle$ по аналогии с формулой /2.41/ имеем

$$\langle q_2 \rangle = q_{2,min} + \int_{q_{2,min}}^{\infty} [1 - F_n(q_2)]\, dq_2 \qquad /5.23/$$

Вычисление интеграла, входящего в выражение /5.23/ можно осуще-
ствить только численным путём.

Более простые формулы получим в случае большого количества
трещин n , когда функция распределения $F_n(q_2)$ предстала-
ется соотношением /5.10/. Тогда выражения для среднего значения
$\langle q_2 \rangle$ и дисперсии $D(q_2)$ предельного теплового потока аналогич-
но соотношениям /2.8/, /2.9/ примут вид

$$\langle q_2 \rangle = q_{2,min} + \frac{\Gamma(1+\frac{1}{m})}{(cn)^{1/m}} \qquad /5.24/$$

$$\mathcal{D}(q_2) = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})}{(cn)^{2/m}} \qquad /5.25/$$

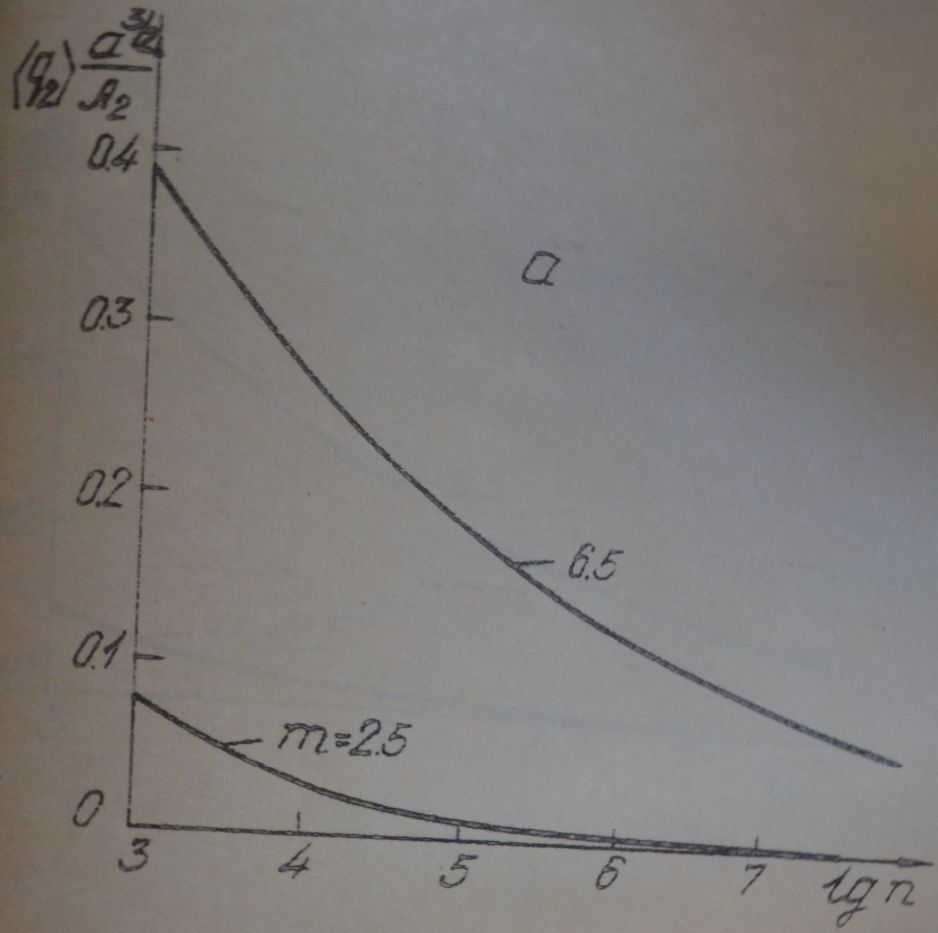
Результаты вычислений по формулам /5.24/. /5.25/ с использованием соотношений /5.I2/. /5.I4/. /5.2I/. /5.22/ представлены в виде графиков для случая $q_{2,min}=0$ на рис.5.4, для $q_{2,min}>0$ - на рис.5.5. Как видно, с увеличением числа трещин n уменьшается среднее значение предельного теплового потока, причем интенсивность этого уменьшения зависит от величины m . Если считать число n пропорциональным площади пластин, то имеет место масштабный эффект, интенсивность которого зависит от значения параметра однородности материала m . Из рис.5.4а и 5.5а видно, что при одинаковых m масштабный эффект более интенсивен в случае $q_{2,min}=0$, нежели при $q_{2,min}>0$.

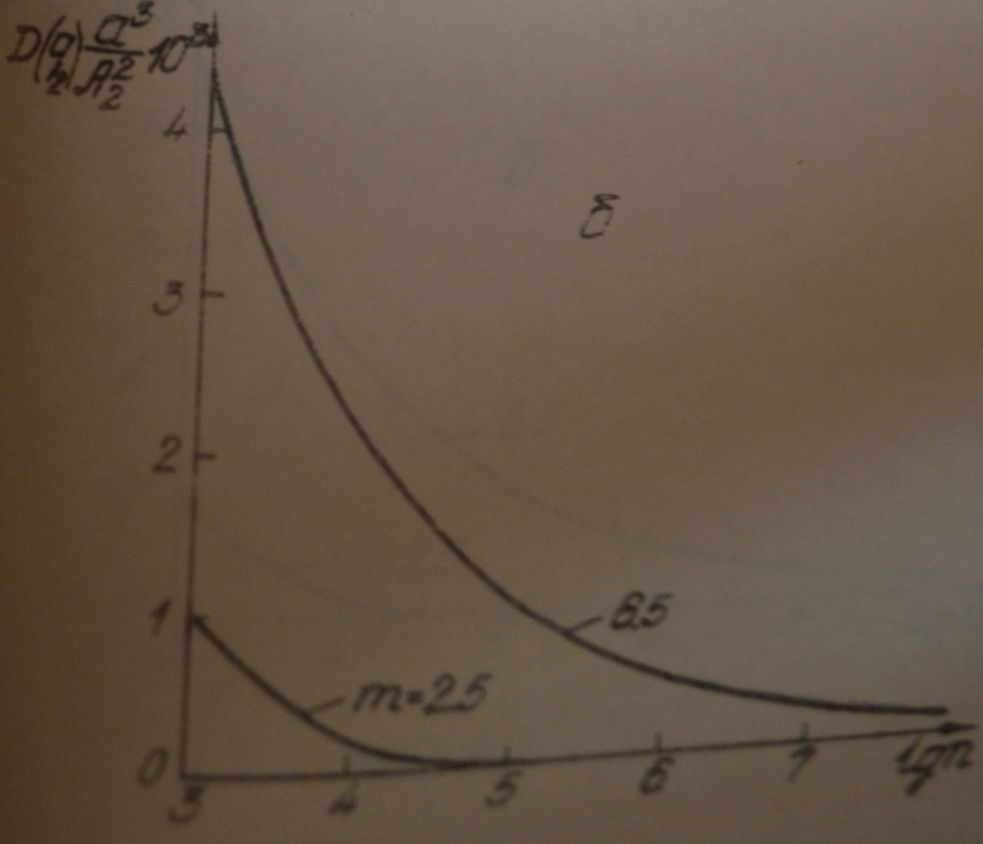
С помощью формул /9/. /5.24/. /5.25/ запишем выражения для коэффициента изменчивости $W(q_2)$ предельного теплового потока. При $q_{2,min}=0$ имеем

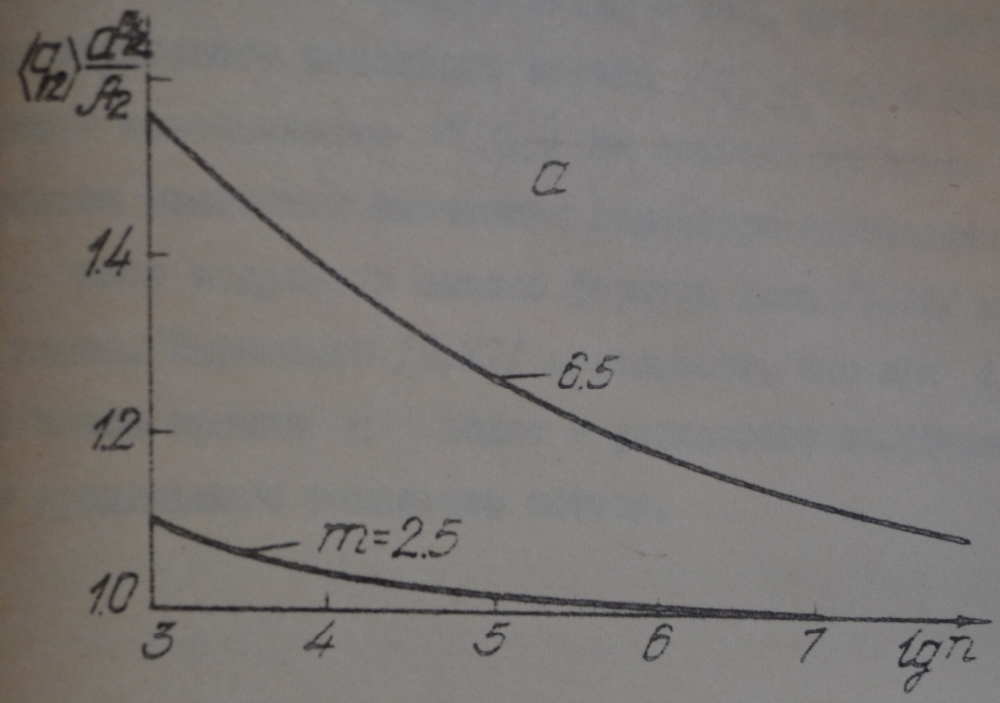
$$W(q_2) = \frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})}}{\Gamma(1+\frac{1}{m})} \qquad /5.26/$$

Так как $q_{2,min} = \frac{A_2}{d^{3/2}}$ получаем

$$W(q_2) = \frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})}}{A_2 d^{-3/2}(cn)^{1/m} + \Gamma(1+\frac{1}{m})} \qquad /5.27/$$


$(\frac{a}{\lambda_2})\frac{a^{3/2}}{A_2}$
0.4
0.3
0.2
0.1
0
а
6.5
m=2.5
3
4
5
6
7
lg n


$D(\frac{a}{\lambda_2})\frac{a^3}{A_2^2}10^{-3}$
4
3
2
1
0
б
6.5
m=2.5
3
4
5
6
7
lgn


$\langle q_{12} \rangle \frac{d^2}{A_2^2}$
а
1.4
1.2
1.0
6.5
m=2.5
3
4
5
6
7
lg n

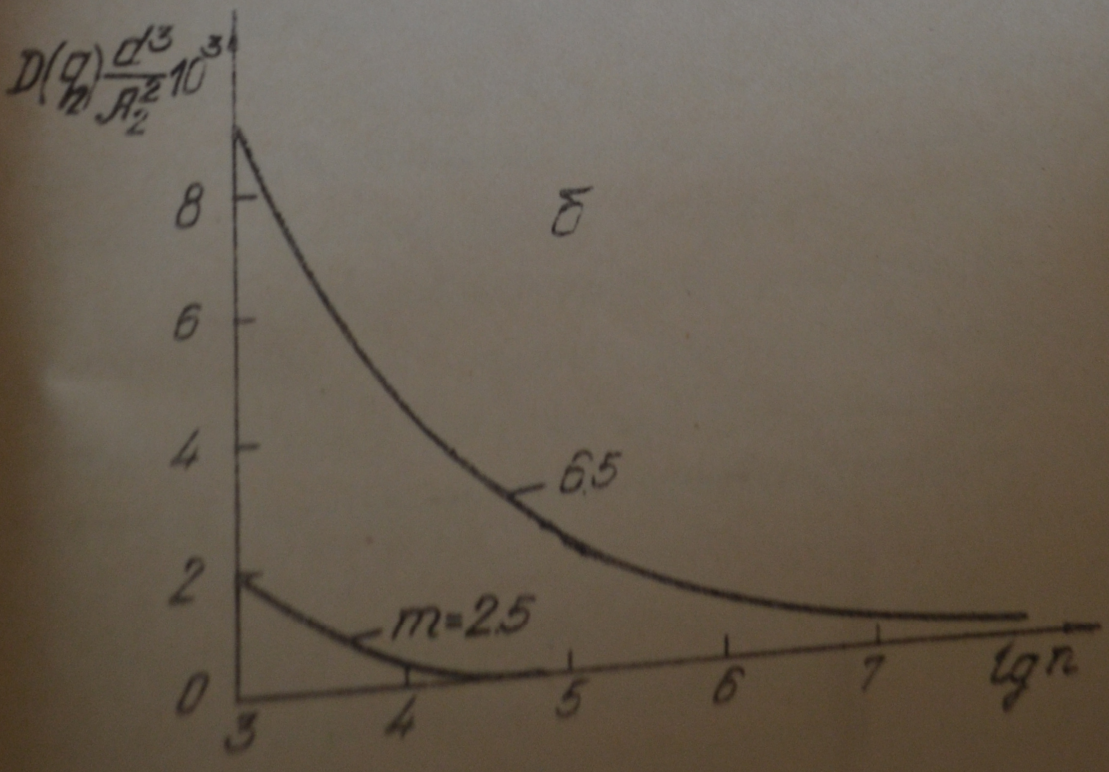

$D\langle q_{12} \rangle \frac{d^3}{A_2^2} 10^3$
б
8
6
4
2
0
6.5
m=2.5
3
4
5
6
7
lg n

Рис. 3.5

Из формулы /5.26/ следует вывод о том, что в случае нулевого значения порогового теплового потока ($q_{2,min}=0$) и больших n коэффициент изменчивости $W(q_2)$ не зависит от числа трещин n и определяется полностью значением параметра однородности материала m. Более подробный анализ формулы типа /5.26/ проведен в первой главе. Выражение /5.27/ показывает, что при $q_{2,min}>0$ увеличение числа трещин n ведет к уменьшению коэффициента изменчивости предельного теплового потока.

Глава 6

ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФОРМЫ, БЛИЗКОЙ К ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ

В предыдущих главах предполагалось, что имеющиеся в материале трещины являются прямолинейными. В реальных телах вследствие структурных и технологических, а также других факторов, поверхности дефектов-трещин содержат неровности. Поскольку эти неровности, обусловленные структурно-технологическими причинами, имеют случайный характер, то целесообразно описывать линии трещин с помощью случайных функций.

Результаты теории случайных функций использовались рядом авторов для исследования напряженно-деформированного состояния и концентрации напряжений пластин с шероховатыми прямолинейными [43,52,83] и криволинейными границами /отверстиями/ [31,33,55, 83,92]. В работе [32] найдены вероятностные характеристики предельных напряжений для пластины, ослабленной отверстием со случайными неровностями и малыми трещинами, выходящими на его контур.

В данной главе исследуется влияние малых случайных отклонений контура трещины-разреза от прямолинейности на вероятностные характеристики коэффициентов интенсивности напряжений и предельных значений внешних усилий.

6.I. Приведение задачи о трещине, мало отклоняющейся от прямолинейной, к задаче о прямолинейной трещине

Рассмотрим бесконечную изотропную пластину с трещиной-разрезом /рис.6.I/. Уравнение линии трещины запишем в виде: $y=\delta(x)$, $(|x|\le l)$. Пусть берега трещины свободны от внешних нормальных σ_n и касательных τ_n напряжений, а в бесконечно удаленных точках пластины приложены растягивающие напряжения p, направленные вдоль оси y /рис.6.I/, и $\delta(\pm l)=\delta'(\pm l)=0$.

Граничными условиями задачи являются равенства:

$$\sigma_y=p\,,\quad \sigma_x=0\,,\quad \tau_{xy}=0 \quad \text{при} \quad y\to\pm\infty \qquad /6.1/$$

и /индекс (+) соответствует верхнему краю трещины, индекс (-) - нижнему/

$$-\sigma_n^+=\sigma_n^-=\sigma_y\cos^2\theta+\sigma_x\sin^2\theta-2\tau_{xy}\sin\theta\cdot\cos\theta=0$$

$$-\tau_n^+=\tau_n^-=(\sigma_y-\sigma_x)\sin\theta\cdot\cos\theta+\tau_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0 \qquad /6.2/$$

при $\quad y=\delta(x)\,,\quad |x|\le l$

где θ - угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси y к внешней нормали n верхнего или нижнего берега трещины. Из рисунка видно, что $\theta=\pi+\alpha$, $\left(\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{d\delta}{dx}\right)$ для верхнего края трещины и $\theta=\alpha$ для нижнего. На основании этого имеем

$$\cos\theta=\frac{\mp 1}{\sqrt{1+\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2}}\,,\quad \sin\theta=\frac{\mp\frac{d\delta}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2}} \qquad /6.3/$$

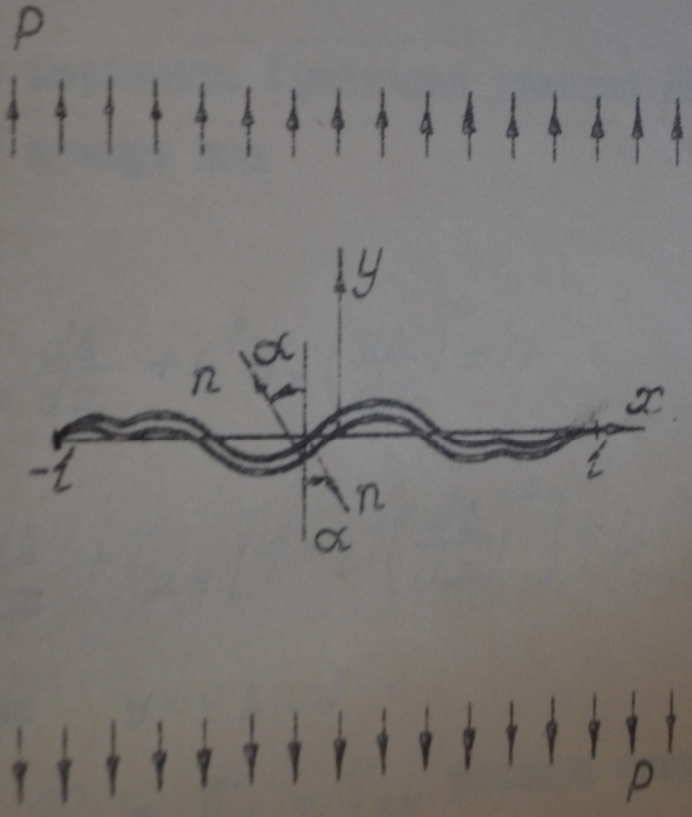


Рис.6.I

В полученных выражениях знак (-) соответствует верхнему берегу трещины, знак (+) - нижнему.

Считая $\delta(x)$ и $\frac{d\delta}{dx}$ малыми величинами /т.е. трещину близкой к прямолинейной/, запишем [52]

$$\delta(x) = \varepsilon \Delta(x) \quad , \qquad |x| \le \ell \tag{6.4}$$

где ε - малый параметр. Граничные условия /6.2/ с учетом формул /6.3/, /6.4/ примут вид

$$\sigma_y - \varepsilon \cdot 2 \cdot \tau_{xy} \frac{d\Delta}{dx} + \varepsilon^2 \sigma_x \left(\frac{d\Delta}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\varepsilon(\sigma_y - \sigma_x) \frac{d\Delta}{dx} + \tau_{xy}\left[1 - \varepsilon^2 \left(\frac{d\Delta}{dx}\right)^2\right] = 0 \tag{6.5}$$

при $y = \varepsilon \Delta(x)$

Компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} тензора напряжений представим [52] в виде разложений в ряды по малому параметру ε

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots \quad , \quad \sigma_y = \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots \tag{6.6}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots$$

Для подстановки выражений /6.6/ в граничные условия /6.5/ необходимо знать функции $\sigma_y^{(0)}$, $\sigma_y^{(1)}$ и т.д. при $y = \varepsilon \Delta(x)$. Их находим на основании разложений в ряды Маклорена

$$\sigma_y^{(0)} = \sigma_y^{(0)} + \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}\Big|_{y=0} \varepsilon \Delta + \dots \tag{6.7}$$

Вследствие малости параметра ε по сравнению с единицей ограничимся в разложениях /6.6/, /6.7/ членами до первого порядка включительно относительно ε. Подставляя разложения /6.6/, /6.7/ в граничные условия /6.5/ и требуя их выполнения для произвольных ε, получим

$$\sigma_y^{(0)} = 0 \quad , \quad \sigma_y^{(1)} + \Delta \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y} - 2\tau_{xy}^{(0)} \frac{d\Delta}{dx} = 0$$

$$\tau_{xy}^{(0)} = 0 \quad , \quad \tau_{xy}^{(1)} + \Delta \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} - (\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}) \frac{d\Delta}{dx} = 0 \qquad /6.8/$$

при $y = 0$, $|x| \le l$

Чтобы граничные условия /6.1/ с учетом разложений /6.6/ выполнялись для произвольных ε, необходимо удовлетворить такие условия на бесконечности /при $y \to \pm\infty$ и произвольных x/

$$\sigma_y^{(0)} = p \quad , \quad \sigma_x^{(0)} = \tau_{xy}^{(0)} = 0 \qquad /6.9/$$

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_x^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0 \qquad /6.10/$$

Поскольку напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} должны удовлетворять уравнениям теории упругости в напряжениях, то на основании разложений /6.6/ можно сделать вывод, что каждое приближение удовлетворяет тем же уравнениям.

Таким образом, задача о трещине, мало отклоняющейся от прямолинейной, сводится к задачам для прямолинейной трещины с граничными условиями /6.8/ - /6.10/.

Как видно из граничных условий /6.8/, /6.9/, нулевое прибли-

ление находим как решение задачи для пластины с прямолинейной трещиной, когда пластина растягивается напряжениями p, приложенными в бесконечно удаленных точках и направленными перпендикулярно к линии трещины. Решение такой задачи приведено в монографии Н.И.Мусхелишвили [49]. В этом случае комплексные потенциалы имеют следующий вид

$$\phi(z)=\frac{p}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-l^2}}-\frac{1}{2}\right),\quad \psi(z)=\frac{p}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-l^2}}+\frac{1}{2}\right) \qquad /6.11/$$

$$\left(z=x+iy,\ \lim_{|z|\to\infty} z^{-1}\sqrt{z^2-l^2}=1\right)$$

Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} представляются через комплексные потенциалы $\phi(z)$, $\psi(z)$ такими выражениями [49]

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\phi(z)+\psi(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\phi'(z)} \qquad /6.12/$$

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left[\phi(z)+\overline{\phi(z)}\right] \qquad /6.13/$$

Из формул /6.8/ видно, что для вычисления значений $\sigma_y^{(1)}\big/_{y=0,\,|x|\le l}$, $\tau_{xy}^{(1)}\big/_{y=0,\,|x|\le l}$ должны быть известны величины $\frac{\partial\sigma_y^{(b)}}{\partial y}\big/_{y=0,\,|x|\le l}$, $\frac{\partial\tau_{xy}^{(a)}}{\partial y}\big/_{y=0,\,|x|\le l}$, $\sigma_x^{(a)}\big/_{y=0,\,|x|\le l}$. На основании выражений /6.11/ - /6.13/ и условия $\sigma_y^{(a)}\big/_{y=0,\,|x|\le l}=0$ получаем

$$\frac{\partial\sigma_y^{(a)}}{\partial y}=\frac{\partial\tau_{xy}^{(a)}}{\partial y}=0,\quad \sigma_x^{(a)}=-p \quad \text{при} \quad y=0,\ |x|\le l \qquad /6.14/$$

Подставляя соотношения /6.14/ в граничные условия /6.8/, имеем

$$\sigma_y^{(1)} = 0 \,, \quad \tau_{xy}^{(1)} = -p \frac{d\Delta}{dx} \quad \text{при} \quad y=0 \,, |x| \le \ell \qquad /6.15/$$

Выражения /6.10/, /6.15/ показывают, что первое приближение можно найти как решение задачи для пластины с прямолинейной трещиной, когда на её берегах приложены касательные напряжения согласно /6.15/.

6.2. Формулы для коэффициентов интенсивности напряжений и предельных значений приложенных нагрузок

При вычислении предельных значений внешних нагрузок необходимо знать распределение напряжений в окрестности вершин трещины. Из формул /36/ видно, что для этого должны быть известны коэффициенты интенсивности k_1 и k_2 [56], соответствующие симметричному и антисимметричному распределению напряжений относительно трещины.

Коэффициенты k_1 и k_2, зависящие от приложенных к телу нагрузок, формы тела и трещины, представим в виде разложений в ряды по малому параметру ε

$$k_1 = k_1^{(0)} + \varepsilon k_1^{(1)} + \dots \,, \quad k_2 = k_2^{(0)} + \varepsilon k_2^{(1)} + \dots \qquad /6.16/$$

Величины $k_1^{(0)}$ и $k_2^{(0)}$ находятся из решения задачи для пластины с прямолинейной трещиной, когда пластина растягивается напряжениями p, направленными перпендикулярно к линии трещины и приложенными на бесконечности [56]

$$k_1^{(0)} = p\sqrt{\ell} \quad , \quad k_2^{(0)} = 0 \qquad /6.17/$$

На основании граничных условий /6.10/, /6.15/ имеем [60]

$$k_1^{(1)} = 0 \quad , \quad k_2^{(1)} = -\frac{p}{\pi\sqrt{\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{d\Delta}{dx} \sqrt{\frac{\ell \pm x}{\ell \mp x}}\, dx \qquad /6.18/$$

В этом выражении верхний знак соответствует правой вершине трещины, нижний – левой.

Подставляя формулы /6.17/, /6.18/ в соотношения /6.16/, получаем

$$k_1 = p\sqrt{\ell} \quad , \quad k_2 = -\frac{p}{\pi\sqrt{\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{d\delta}{dx} \sqrt{\frac{\ell \pm x}{\ell \mp x}}\, dx \qquad /6.19/$$

Следовательно, малые отклонения линии трещины от прямой приводят к появлению величины k_2. На основании известной функции $\delta(x)$, описывающей линию трещины, согласно /6.19/ можно найти величину k_2.

По известным коэффициентам интенсивности напряжений k_1, k_2 вычислим предельное значение приложенных напряжений $p = p_*$. На основании критерия Панасюка–Бережницкого /39/, /40/ уравнение для вычисления величины p_* имеем вид [56]

$$k_1 \cos^3\frac{p_*}{2}\left(1 - 3m_1 \operatorname{tg}\frac{p_*}{2}\right) = \frac{K_c}{\sqrt{\pi}} \qquad /6.20/$$

где K_c – постоянная, характеризующая сопротивление материала

$$\beta_* = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-\sqrt{1+8m_1^2}}{4m_1}\,, \qquad m_1 = \frac{k_2}{k_1} \qquad /6.21/$$

ставляя в соотношение /6.20/ формулу /6.19/ для коэффициента k_1, получен

$$P_* = \frac{K_c}{\sqrt{\pi e}}\cos^{-3}\frac{\beta_*}{2}\left(1-3m_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_*}{2}\right)^{-1} \qquad /6.22/$$

В нашем случае величина m_1 мала и поэтому выражение /6.21/ еобразуется к простому виду

$$\beta_* \approx -2m_1 \qquad /6.23/$$

рмулу /6.22/ с учетом соотношения /6.23/ запишем так

$$P_* \approx \frac{K_c}{\sqrt{\pi e}}\left(1-\frac{m_1^2}{2}\right)^{-3}\left(1+3m_1^2\right)^{-1} \qquad /6.24/$$

е упрощая, имеем

$$P_* \approx \frac{K_c}{\sqrt{\pi e}}\left(1-\frac{3}{2}m_1^2\right) \qquad /6.25/$$

С целью установления точности полученных приближенных выра- ений проведены вычисления величин β_* и P_* по формулам .21/, /6.23/, /6.20/, /6.25/ для некоторых малых значений па- метра m_1. Результаты вычислений предоставлены в виде табли- , в которой приближенные значения имеют индекс вверху.

m_1	0,1	0,2	0,3	0,35	0,4
β_* /рад./	-0,1955	-0,3681	-0,5079	-0,5660	-0,6171
β_*' /рад./	-0,2000	-0,4000	-0,6000	-0,7000	-0,8000
$p_* \frac{\sqrt{\pi l}}{K_c}$	0,9855	0,9467	0,8939	0,8653	0,8364
$p_*' \frac{\sqrt{\pi l}}{K_c}$	0,9850	0,9400	0,8650	0,8162	0,7600

Из таблицы видно, что для $m_1 \leq 0,3$ отклонение приближенных значений предельных напряжений от точных не превышает 4%.

6.3. Вероятностные характеристики коэффициентов интенсивности напряжений и предельных усилий

Пусть функция $\delta(x)$, описывающая контур трещины, является стационарной случайной функцией с нулевым средним значением $(\langle\delta(x)\rangle = 0)$ и известной дисперсией $\mathcal{D}[\delta(x)]$. Тогда на основании выражений /32/ - /34/ имеем

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{2l} x + B_n \sin \frac{n\pi}{2l} x \right) \qquad /6.26/$$

где A_n и B_n - некоррелированные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\langle A_n \rangle = \langle B_n \rangle = 0 , \quad \mathcal{D}(A_n) = \mathcal{D}(B_n) = \mathcal{D}_n \qquad /6.27/$$

Используя выражения /6.19/, /6.26/, представим формулу для k в виде

$$k_2 = -\frac{\pi p}{2\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_0\left(\frac{n\pi}{2}\right) B_n \mp J_1\left(\frac{n\pi}{2}\right) A_n \right] n \qquad /6.28/$$

где $J_0(x)$ • $J_1(x)$ - функции Бесселя I-го рода. В формуле /6.28/ верхний знак относится к правой вершине трещины, нижний - к левой. При получении формулы /6.28/ учтены значения таких интегралов, вычисляемых с помощью таблиц [26]

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi}{2l} x \sqrt{\frac{l \pm x}{l \mp x}}\, dx = 2l \int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2} t\, \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \pi l J_0\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad /6.29/$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi}{2l} x \sqrt{\frac{l \pm x}{l \mp x}}\, dx = \pm 2l \int_0^1 \sin\frac{n\pi}{2} t\, \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pm \pi l J_1\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Определим среднее значение и дисперсию величины k_2, случайный характер которой является следствием случайности функции $\delta(x)$. На основании соотношений /6.28/, /6.27/ имеем

$$\langle k_2 \rangle = 0 \qquad /6.30/$$

$$D(k_2) = \frac{\pi^2 p^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_0^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + J_1^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] n^2 D_n$$

Для дальнейших вычислений зададим последовательность чисел в виде [83]

$$D_n = Hq^n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots, \quad 0 < q < 1 \qquad /6.31/$$

принимая во внимание также следующее соотношение [26]

$$J_0^2(x) + J_1^2(x) \approx \frac{2}{\pi x}, \qquad x \gg 0$$

тогда выражение /6.30/ для дисперсии величины k_2 примет вид

$$D(k_2) = \frac{\rho^2}{\ell} H \sum_{n=1}^{\infty} n q^n = \frac{\rho^2}{\ell} H \frac{q}{(1-q)^2} \qquad /6.32/$$

Чтобы придать формуле /6.32/ более наглядный вид, выразим параметры H , q через вероятностные характеристики функции $\delta(x)$. Считая $\delta(x)$ случайной функцией с нормальным распределением, имеем для математического ожидания среднего числа пересечений этой функцией оси x на промежутке $(-\ell, \ell)$ такую формулу [83]

$$u = \frac{2\ell}{\pi} \sqrt{-\frac{K''(0)}{K(0)}} \qquad /6.33/$$

Корреляционную функцию $K(x)$ случайной функции $\delta(x)$ представим в виде разложения [10]

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \frac{n\pi}{2\ell} x, \qquad |x| \le 2\ell \qquad /6.34/$$

На основании выражений /6.34/, /6.31/ имеем

$$K(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n=H\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{H}{1-q}$$

$$K''(0)=-\frac{\pi^2}{4\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathcal{D}_n=-\frac{\pi^2 H}{4\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2q^n=-\frac{\pi^2 H}{4\ell^2}\frac{q(1+q)}{(1-q)^3} \qquad /6.35/$$

Подставляя соотношения /6.35/ в формулу /6.33/, получаем

$$u=\sqrt{\frac{q(1+q)}{(1-q)^2}} \qquad /6.36/$$

Отсюда

$$q=\frac{2u^2+1-\sqrt{8u^2+1}}{2(u^2-1)} \qquad /6.37/$$

Тогда выражение /6.32/ примет вид

$$\mathcal{D}(k_2)=\frac{P^2}{4\ell}R_\delta^2\left(\sqrt{8u^2+1}-1\right) \qquad /6.38/$$

где $R_\delta=\sqrt{\mathcal{D}[\delta(x)]}$ - среднее квадратическое отклонение случайной функции $\delta(x)$.

Случайный характер величины k_2 определяет случайность предельных напряжений P_*. Выражение /6.25/ показывает, что для вычисления среднего значения предельных усилий должна быть известна величина $\langle k_2^2\rangle$. Её определяем по формуле [10]

$$\langle k_2^2\rangle=\mathcal{D}(k_2)+\langle k_2\rangle^2 \qquad /6.39/$$

Используя выражения /6.25/, /6.39/, /6.38/, /6.30/, /6.19/, получаем

$$\langle \rho_* \rangle \approx \frac{K_c}{\sqrt{\pi \ell}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{R_5}{\ell} \right)^2 \left(\sqrt{8u^2+1} - 1 \right) \right] \qquad /6.40/$$

Отсюда следует вывод о том, что малые случайные отклонения контура трещины от прямолинейности приводят к уменьшению среднего значения предельных напряжений по сравнению с прямолинейной трещиной, для которой $\rho_* = \frac{K_c}{\sqrt{\pi \ell}}$.

Для реальных трещин можно считать, что u большое число и $u = \frac{k 2\ell}{R_5}$, где $0 < \gamma \leq 1$. Тогда выражение /6.40/ примет вид

$$\langle \rho_* \rangle \approx \frac{K_c}{\sqrt{\pi \ell}} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{R_5}{\ell} \gamma \right) \qquad /6.41/$$

Из этой формулы видно, что при $\frac{R_5}{\ell} \leq 0{,}02$ уменьшение величины $\langle \rho_* \rangle$ по отношению к предельной нагрузке для пластины с прямолинейной трещиной составляет менее 5%.

Перейдем к вычислению дисперсии предельных напряжений на основании выражения /6.25/. Для этого должна быть известна величина $D(k_2^2)$. Её можно вычислить в предположении, что случайные величины A_n , B_n в разложении /6.26/ имеют нормальное распределение. Вследствие этого коэффициент k_2 , вычисляемый по формуле /6.28/, также имеет нормальный закон распределения [10], так как линейная функция величин A_n , B_n . Плотность распределения коэффициента интенсивности напряжений k_2 имеет вид [10,24]

$$f(k_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k_2^2}{2\sigma^2} \right), \quad (\sigma^2 = D(k_2)) \qquad /6.42/$$

Тогда случайная величина $\gamma = k_2^2$ подчиняется гамма-распределению, плотность которого запишется так [80]

$$f(\gamma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2\sigma^2}\right) \qquad /6.43/$$

Для такого распределения дисперсия вычисляется по формуле [25]

$$D(\gamma) = 2\sigma^4 = 2D^2(k_2) \qquad /6.44/$$

Используя последнее соотношение, а также выражения /6.25/, /6.38/, /6.19/, имеем

$$D(p_*) \approx \frac{9K_c^2}{32\pi\ell}\left(\frac{R\delta}{\ell}\right)^4\left(\sqrt{8u^2+1}-1\right)^2 \qquad /6.45/$$

На основании выражений /9/, /6.40/, /6.45/ получаем формулу для коэффициента вариации предельной нагрузки пластины

$$W(p_*) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\frac{R\delta}{\ell}\right)^2\left(\sqrt{8u^2+1}-1\right)\left[1-\frac{3}{8}\left(\frac{R\delta}{\ell}\right)^2\left(\sqrt{8u^2+1}-1\right)\right]^{-1} \qquad /6.46/$$

Если имеют место те же условия, что и при получении формулы /6.41/, то выражение /6.46/ упрощается к виду

$$W(p_*) \approx 3\frac{R\delta}{\ell}\gamma \qquad /6.47/$$

Отсюда видно, что при $\frac{R\delta}{\ell} \le 0{,}02$ коэффициент вариации случайных предельных напряжений не превышает 6%.

Выражения /6.41/, /6.47/ показывают, что при возрастании длины трещины или уменьшении среднего квадратического отклонения высоты неровностей её поверхности среднее значение случайной пре-

дельной нагрузки приближается к величине предельных напряжений для пластины с прямолинейной трещиной, а коэффициент вариации при этом стремится к нулю.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Отметим основные результаты работы и краткие выводы.

I. В новой постановке решено ряд задач по определению вероятностных характеристик прочности стохастически дефектных пластин при сложном однородном напряженном состоянии или действии теплового потока. Исследовано влияние вида законов распределения геометрических параметров дефектов на вероятностные характеристики прочности пластин.

2. Установлено, что двухосное растяжение или растяжение-сжатие приводит к увеличению вероятности разрушения и соответственно к уменьшению среднего значения предельных растягивающих напряжений в сравнении с одноосным растяжением пластин, ослабленных трещинами. Наличие трения берегов трещин уменьшает вероятность разрушения и увеличивает среднее значение, дисперсию предельных растягивающих напряжений по отношению к случаю отсутствия трения.

3. При большом количестве дефектов /трещин, жестких стержневых включений/ выражения для вероятности разрушения пластин приведены к формулам типа Вейбулла /определены значения параметров распределения Вейбулла/. Получены линейные зависимости между параметром однородности материала и параметрами формы распределения размеров дефектов при силовом или температурном воздействии.

4. Показано, что в случае дефектов - включений существенное влияние на вероятностные характеристики прочности композиции оказывает коэффициент Пуассона материала матрицы. Так, на-

пример, при двухосном симметричном растяжении вероятность разрушения композита уменьшается с ростом указанного коэффициента.

5. Для стохастически дефектных пластин, находящихся в сложном однородном поле напряжений, получены уравнения средних кривых предельных напряжений и линий одинаковой вероятности разрушения. Приведены примеры построения этих вероятностных критериев разрушения. В случае дефектов - трещин исследовано влияние параметра однородности материала, коэффициента трения берегов трещин и количества трещин на вид указанных кривых. Показано влияние параметра однородности композита, коэффициента Пуассона материала матрицы и числа дефектов на форму статистических кривых прочности пластин, содержащих жесткие стержневые включения.

6. Предложена модель для расчета влияния технологической вытяжки материала на вероятностные характеристики прочности пластин со статистическим распределением трещин. Для таких пластин, находящихся в сложном поле напряжений, приведены примеры построения средних кривых предельных напряжений, свидетельствующих о приобретенной вследствие вытяжки прочностной анизотропии. Установлено, что средние значения предельных напряжений, а также прочностная анизотропия изменяются наиболее интенсивно при значениях коэффициента вытяжки $k \leq 1,6$ для растяжения и $k \leq 1,8-2$ для чистого сдвига. Этот вывод может найти практическое применение в технологии обработки материалов.

7. В первом приближении решена задача об определении вероятностных характеристик предельных напряжений для пластины с трещиной случайной формы, близкой к прямолинейной. Для одноосного растяжения пластины установлено, что малые случайные отклонения контура трещины от прямолинейности приводят к уменьшению среднего значения предельных нагрузок по сравнению с прямолинейной

трещиной. Если отношение среднего квадратического отклонения высоты неровностей поверхности трещины к ее полудлине не превышает 2%, то это уменьшение составляет менее 5% по отношению к предельной нагрузке для пластины с прямолинейной трещиной. При этом коэффициент вариации предельных напряжений пластины с трещиной случайной формы не превышает 6%.

8. Результаты работы в виде формул, графиков могут найти применение для прогнозирования и расчета вероятности разрушения и прочности /определения вероятностных характеристик предельных значений силовых и температурных факторов/ пластинчатых элементов конструкций, изготовленных из хрупких неоднородных материалов типа жестких термореактивных пластмасс, чугунов, металлокерамических композиций, различных марок графита и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.П., Журков С.Н. Явление хрупкого разрыва. М., ГТТИ, 1933, 52 с.
2. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. Киев, Изд-во АН УССР, 1953, 123 с.
3. Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С., Труш И.И. О построении диаграмм локального разрушения для хрупких тел с остроконечными жесткими включениями. ФХММ, 1975, № 5, с.40-47.
4. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И. О локальном разрушении хрупкого тела с остроконечными жесткими включениями. Проблемы прочности, 1973, № 10, с.8-11.
5. Бессонов В.Г., Коноваленко В.В. Масштабный фактор и его влияние на прочностные свойства конструкционных материалов (обзор). В кн.: "Механическое подобие конструкций из армированного материала". Киев, "Наукова думка", 1970, с.61-66.
6. Биргер И.А. Применение теории случайных процессов для описания разрушения. В кн.: "Прочность материалов и конструкций". Киев, "Наукова думка", 1975, с.297-314.
7. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1961, 202 с., 1965, 279 с.
8. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971, 255 с.
9. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. М., Машиностроение, 1964, 275 с.
10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., "Наука", 1969, 576 с.
11. Витвицкий П.М. Прочность микронеоднородных хрупких тел со статистическим распределением дефектов типа трещин. ФХММ, 1968, № 4, с.413-419.

12. Витвицкий П.М. Предельное равновесие хрупких пластин со статистическим распределением дефектов типа трещин. ФХММ, 1970, № 5, с.52-58.

13. Витвицкий П.М. Прочность хрупких пластин со стохастическим распределением дефектов-трещин. Проблемы прочности, 1971, № 4, с.13-17.

14. Витвицкий П.М. Вероятность разрушения и критерии прочности пластинчатых конструкционных элементов со случайным распределением поверхностных дефектов. В кн.: "Качество, прочность, надежность и технологичность электровакуумных приборов", Киев, "Наукова думка", 1976, с.134-140.

15. Витвицкий П.М., Попина С.Д. О влиянии вытяжки дефектного материала на вероятность его разрушения при одно- и двухосном растяжении. В кн.: "УI Всесоюзная конференция по физико-химической механике конструкционных материалов" (тезисы докладов). Львов, 1974, с.140-141.

16. Витвицкий П.М., Попина С.Д. Влияние технологической вытяжки на предельные напряжения стохастически дефектных пластин. ФХММ, 1975, № 2, с.43-48.

17. Витвицкий П.М., Попина С.Д. Расчет вероятностных характеристик структурной и прочностной анизотропии дефектного материала после его технологической обработки. В кн.: "УI Всесоюзная конференция по прочности и пластичности" (тезисы докладов). М., 1975, с.10.

18. Витвицкий П.М., Попина С.Д. Вероятностный расчет предельного состояния дефектного материала с приобретенной при обработке прочностной анизотропией. Проблемы прочности, 1976, № 9, с.31-35.

19. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Прочность хрупких пластин со стохастическим распределением жестких стержневых включений. ФХММ, 1976, № 6, с.85-90.

20. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. О разрушении пластины с трещиной случайной формы, близкой к прямолинейной. ДАН УССР, серия А, 1976, № 6, с.509-513.

21. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Разрушение пластины со стохастически шероховатой трещиной. В кн.: "IУ Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике" (аннотации докладов). Киев, "Наукова думка", 1976, с.86.

22. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Вероятностный расчет прочности дефектных пластин при растяжении-сжатии с учетом трения берегов трещин. Проблемы прочности, 1977, № 12, с.14-17.

23. Вояков С.Д. Статистическая теория прочности. Москва-Свердловск, Машгиз, 1960, 176 с.

24. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961, 406 с.

25. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М., "Наука", 1965, 524 с.

26. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., "Наука", 1971, 1108 с.

27. Громов Г.В. Масштабный эффект и статическая прочность материалов при одноосном нагружении. В кн.: "Вопросы надежности, долговечности и восстановления авиационной техники". Вып.2, Рига, 1975, с.78-85.

28. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М., "Мир", 1965, 450 с.

29. Казакявичюс К.А. К определению параметров распределения прочности хрупких материалов при тепловом и механическом разрушении. В кн.: "Сопротивление материалов". Материалы XXII республиканской научно-технической конференции, Каунас, 1972, с.134-137.

30. Калягин М.Ф., Волков С.Д. К теории хрупкого повреждения композитов с изотропными компонентами. Проблемы прочности, 1974, № 1, с.27-31.

31. Каминский А.А. Концентрация напряжений возле свободных и подкрепленных криволинейных отверстий со случайными неровностями. Прикладная механика, 1970, т.6, вып.9, с.66-72.

32. Каминский А.А. Разрушение хрупких тел со случайными неровностями поверхности. Прикладная механика, 1972, т.8, вып.8, с.82-89.

33. Каминский А.А. Определение концентрации напряжений при двухосном растяжении пластины, ослабленной отверстием случайной формы. Прикладная механика, 1973, т.9, вып.6, с.109-112.

34. Кит Г.С. О влиянии однородного теплового потока на предельную нагрузку для пластины с трещиной. ФХММ, 1969, № 1, с.114-115.

35. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени. М., "Машиностроение", 1977, 232 с.

36. Конторова Т.А., Тимошенко О.А. Обобщение статистической теории прочности на случай неоднородно-напряженного состояния. Журнал технической физики, 1949, т.19, вып.3, с.355-370.

37. Конторова Т.А., Френкель Я.И. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов. Журнал технической физики, 1941, т.11, вып.3, с.173-181.

38. Кордонский Х.Б., Динлер И.Е., Громов Г.В. Вероятностное обоснование норм прочности. В кн.: "Прочность материалов и конструкций", Киев, "Наукова думка", 1975, с.208-222.

39. Косычин Р.С., Романив О.Н. О несущей способности высокопрочных материалов после обработок, сопровождающихся образованием направленной структуры дефектов. Физика и химия обработки материалов, 1970, № 5, с.69-76.

40. Лебедев А.А. Критерий прочности структурно-неоднородных материалов. Проблемы прочности, 1969, № 1, с.57-60.

41. Лебедев А.А. О критериях прочности конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии в условиях низких температур. В кн.: "Прочность материалов и конструкций", Киев, "Наукова думка", 1975, с.222-231.

42. Лебедев А.А., Лопак М.Г., Фридман В.М., Алфитов П.Т. Влияние масштабного фактора на прочность материалов в условиях сложного напряженного состояния. Проблемы прочности, 1977, № 2, с.56-58.

43. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., "Наука", 1970, 139 с.

44. Маслов Б.П., Хорошун Л.П. Эффективные характеристики упругих, физически нелинейных, неоднородных сред. Известия АН СССР, МТТ, 1977, № 2, с.149-153.

45. Мелькин В.И., Шур Д.М., Егоров В.С., Васильев В.А. Прочность хрупких материалов при сложном напряженном состоянии. Известия вузов, "Машиностроение", 1970, № 2, с.9-14.

46. Никулин П.Г., Фридман Я.Б. Анизотропия механических свойств материалов. М., "Металлургия", 1969, 267 с.

47. Москаленко В.Н., Харионовский В.В. К оценке надежности элементов конструкций при усталостном разрушении. Проблемы прочности, 1977, № 6, с.15-18.
48. Моссаковский В.И., Рыбка М.Т. Попытка построения теории прочности для хрупких материалов, основанной на энергетических соображениях Гриффитса. ПММ, 1965, т.29, вып.2, с.291-296.
49. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966, 707 с.
50. Павлов П.А., Никулина Н.Е. Критерии предельного сопротивления хрупкого материала с исходной трещиной при плоском напряженном состоянии. В кн.: "Труды Ленинградского политехнического института", Л., Изд-во ЛПИ, 1973, № 334, с.12-17.
51. Павлов П.А., Никулина Н.Е. Экспериментальная проверка критерия предельного равновесия трещины или узкой щели, расположенной в поле плоского напряженного состояния. Проблемы прочности, 1976, № 9, с.36-39.
52. Пальмов В.А. Концентрация напряжений около шероховатой границы упругого тела. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3, с.104-108.
53. Пальмов В.А., Напряженное состояние вблизи шероховатой поверхности упругих тел. ПММ, 1963, № 5, с.963-969.
54. Пальмов В.А. Зависимость концентрации напряжений от качества обработки поверхности деталей. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5, с.60-66.
55. Пальмов В.А. Упругая плоскость с отверстием случайной формы. В кн.: "Труды Ленинградского политехнического института", Л., Изд-во ЛПИ, 1964, № 235, с.35-40.

56. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, "Наукова думка", 1968, 246 с.

57. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной. В кн.: "Вопросы механики реального твердого тела", вып.3, Киев, "Наукова думка", 1964, с.3-19.

58. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Ковчик С.Е. О развитии произвольно ориентированной прямолинейной трещины при растяжении пластины. Прикладная механика, 1965, т.1, вып.2, с.48-55.

59. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Труш И.И. Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений. Проблемы прочности, 1972, № 7, с.3-9.

60. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, "Наукова думка", 1976, 443 с.

61. Переверзев Е.С. К вопросу определения длительной прочности. ФХММ, 1972, № 6, с.57-62.

62. Переверзев Е.С. Учет неравномерности распределения микронапряжений в задачах долговечности. ФХММ, 1975, № 6, с.104-105.

63. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев, "Наукова думка", 1976, 415 с.

64. Писаренко Г.С., Трощенко В.Т. Статистичні теорії міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів. Київ, вид-во АН УРСР, 1961, 106 с.

65. Попина С.Б. О вероятностных характеристиках предельных напряжений хрупких пластин с большим числом трещин при сложном напряженном состоянии. ФХММ, 1977, № 2, с.47-51.

66. Попина С.Д. Прочность хрупких пластин со статистическим распределением трещин при ненулевом значении порогового напряжения. В кн.: "Материалы УШ-й конференции молодых ученых физико-механического института АН УССР. Секция физико-химической механики материалов". Львов, 1977, Деп. в ВИНИТИ 16.П.1978, № 896-78 ДЕП.

67. Попина С.Д. О вероятностных характеристиках предельного теплового потока для хрупких пластин со статистическим распределением трещин. В кн.: "Сборник работ молодых ученых физико-механического института АН УССР" (в печати).

68. Протодьяконов М.М., Чирков С.Е. Трещиноватость и прочность горных пород в массиве. М., "Наука", 1964, 67 с.

69. Разрушение. т.2, М., "Мир", 763 с., 1975.

70. Разрушение. т.7, ч.I, М., "Мир", 1976, 624 с.

71. Седракян Л.Г. К статистической теории прочности. Ереван, 1958, 104 с.

72. Серенсен С.В., Стреляев В.С. Статистические закономерности разрушения и вероятностная оценка статической прочности конструктивных элементов из полимерных композиционных материалов. Механика полимеров, 1972, № 3, с.466-482.

73. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., "Наука", 1965, 512 с.

74. Стреляев В.С. Статистические закономерности разрушения элементов конструкций. В кн.: "Прочность материалов и конструкций", Киев, "Наукова думка", 1975, с.314-323.

75. Физическое металловедение (под редакцией Р.Кана). М., "Мир", вып.3, 1968, 484 с.

76. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.2, М., "Наука", 1970, 800 с.
77. Фридман А.М., Ануфриев Ю.П. О влиянии вида напряженного состояния на интенсивность масштабного эффекта и распределение прочности графита. Проблемы прочности, 1975, № 8, с.77-81.
78. Фридман А.М., Ануфриев Ю.П., Барабанов В.Н. Исследование разрушения углеграфитовых материалов в условиях сложно-напряженного состояния. Проблемы прочности, 1973, № 1, с.52-55.
79. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. ч.1, М., "Машиностроение", 1974, 472 с.
80. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. М., "Мир", 1969, 395 с.
81. Хорошун Л.П. К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикладная механика, 1967, т.3, вып.9, с.12-19.
82. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред. Прикладная механика, 1978, т.14, вып.2, с.3-17.
83. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход). М., "Наука", 1975, 343 с.
84. Черепанов Г.П. Одна задача о вдавливании индентора с образованием трещин. ПММ, 1963, т.27, вып.1, с.150-153.
85. Черепанов Г.П. О развитии трещин в сжатых телах. ПММ, 1966, т.30, вып.1, с.82-93.
86. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М., "Наука", 1974, 640 с.

87. Чечулин Б.Б. Масштабный фактор и статистическая природа прочности металлов. М., Металлургиздат, 1963, 120 с.
88. Чирков С.Е. Влияние масштабного фактора на прочность углей. М., "Наука", 1969, 114 с.
89. Чудновский А.И. Об одной статистической теории квазихрупкого разрушения. В кн.: "IУ Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике" (аннотации докладов). Киев, "Наукова думка", 1976, с.110.
90. Швец Р.Н., Елейко В.И. Стохастическая задача теплопроводности и термоупругости для деформируемого тела с шероховатой поверхностью. ДАН УССР, серия А, 1977, № 11, с.1020-1023.
91. Шевандин Е.И., Маневич Ш.С. Эффект масштаба при хрупком разрушении стали. Журнал технической физики, 1946, т.16, вып.11, с.1223-1234.
92. Шейнин В.И. Распределение напряжений в окрестности горных выработок с учетом неровностей контура. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1965, № 4, с.21-23.
93. Шур Е.А. Статистический критерий опасности разрушения материалов при сложном напряженном состоянии. "Машиноведение", 1971, № 1, с.51-58.
94. Шур Е.А. Статистический критерий прочности и пластичности материалов в условиях сложного напряженного состояния. Проблемы прочности, 1972, № 7, с.15-21.
95. Эдоган, Си. О развитии трещин в пластинках под действием продольной и поперечной нагрузок. Техническая механика (перевод Трудов Американского общества инженеров-механиков), серия ..., 1963, № 4, с.49-59.

96. Batdorf S.B. A statistical theory for failure of brittle materials under combined stresses. AIAA Pap., 1973, N 381, p. 1-5.

97. Batdorf S.B. Fracture statistics of brittle materials with intergranular cracks. Nucl. Eng. and Des., 1975, v. 35, N 3, p. 349-360.

98. Batdorf S.B. Some approximate treatments of fracture statistics for polyaxial tension. Int. J. Fract., 1977, v. 13, N 1, p. 5-11.

99. Batdorf S.B., Crose J.G. A statistical theory for the fracture of brittle structures subjected to nonuniform polyaxial stresses. Trans. ASME, E 41, 1974, N 2, p. 459-464.

100. Epstein B. Statistical aspects of fracture problems. Journal of Applied Physics, 1948, v. 19, N 2, p. 140-147.

101. Epstein B. Application of theory of extreme values in fracture problems. Amer. Stat. Assoc. J., 1948, v. 13, N 9, p. 403-412.

102. Fisher J.C., Hollomon J.H. A statistical theory of fracture. Metals Technology, 1947, v. 14, N 5, p. 1-16.

103. Griffith A.A. The fenomenon of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1920, A221, p. 163-198.

104. Jayatilaka A. de S., Trustrum K. Statistical approach to brittle fracture. Journ. Mater. Sci., 1977, v.12, N7, p. 1426-1430.

105. Jayatilaka A. de S., Trustrum K. Application of a statistical method to brittle fracture in biaxial loading systems. Journ. Mater. Sci., 1977, v.12, N10, p.2043-2048.

106. Kate Hadley. Comparison of calculated and observed crack densities and seismic velocities in Westerly granite. Journ. Geophys. Res., 1976, v.81, N20, p.3484-3494.

107. Mc Clintock Frank A. Statistics of brittle fracture. Fract. Mech. Ceram. Vol. 1, New York - London, 1974, p. 93-114.

108. Oh K.P.L., Vardar Ö., Finnie I. Failure of brittle solids under biaxial stresses. Int. Journ. Fracture, 1973, v.9, N3, p. 372-375.

109. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials. Proc. Royal Swedish Inst. Eng. Res., Stockholm, 1939, N151, p. 5-45.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие. . . . . .
Введение 2
1. Элементы теории вероятностей. 8
2. Краткие сведения о предельном равновесии пластины с произвольно ориентированной трещиной при сложном напряженном состоянии. 17
3. Обзор исследований по статистической теории прочности. 23
4. Схема решения задачи о прочности хрупких пластин со стохастическим распределением трещин при сложном напряженном состоянии. 33

Глава I. ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ХРУПКИХ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ДЛИН. 42
1.1. Функция распределения предельных напряжений 43
1.2. Числовые характеристики случайной прочности пластин 50
1.3. Средние кривые предельных напряжений и кривые предельных напряжений, соответствующие заданной вероятности разрушения 57

Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ ОГРАНИЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ДЛИН. 65
2.1. Определение функции распределения предельных напряжений. 66

2.2. Средние кривые предельных напряжений. 82
2.3. Вероятностные характеристики прочности пластин при большом числе трещин. 86

Глава 3. ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ВЫТЯЖКИ МАТЕРИАЛА НА ПРОЧНОСТНУЮ АНИЗОТРОПИЮ СТОХАСТИЧЕСКИ ДЕФЕКТНЫХ ПЛАСТИН 99
3.1. Закон распределения измененных геометрических параметров трещин 100
3.2. Вычисление функции распределения предельных напряжений. 103
3.3. Кривые предельного состояния материала /в средних напряжениях/. Зависимость средних значений предельных напряжений от коэффициента вытяжки. 118

Глава 4. ПРОЧНОСТЬ ХРУПКИХ ПЛАСТИН СО СТОХАСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЖЕСТКИХ СТЕРЖНЕВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ . . . 123
4.1. Предельные напряжения для пластины с произвольно ориентированным стержневым включением. 125
4.2. Вычисление функции распределения предельных напряжений. 130
4.3. Среднее значение и дисперсия случайной прочности композита 135
4.4. Средние кривые предельных нагрузок и линии равной вероятности разрушения 136

Глава 5. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕДЕЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ДЛЯ ПЛАСТИН СО СТОХАСТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТРЕЩИН. 144

5.1. Функция распределения случайного теплового потока. 144

5.2. Числовые характеристики предельного теплового потока 155

Глава 6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФОРМЫ, БЛИЗКОЙ К ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ 160

6.1. Приведение задачи о трещине, мало отклоняющейся от прямолинейной, к задаче о прямолинейной трещине. 161

6.2. Формулы для коэффициентов интенсивности напряжений и предельных значений приложенных нагрузок. 166

6.3. Вероятностные характеристики коэффициентов интенсивности напряжений и предельных усилий. 169

Заключение 176

Литература 179