ЖУРНАЛ ЕВРОПЕЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ
Том 7 (№ 4). Декабрь 2008
Издание Тернопольского национального экономического университета

Макроэкономика

Юрий ТАДЕЕВ

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Резюме

Предложено нелинейное расширение классической динамической модели (π-модели) на случай эколого-экономической системы. Показано, что когда нелинейные функции модели являются неотрицательными монотонно возрастающими линейно-однородными, то магистральная траектория устойчивого развития такой системы существует.

Ключевые слова

Эколого-экономическая система, межотраслевая эколого-экономическая модель, магистральная траектория, число Фробениуса, вектор Фробениуса, луч Неймана.

Классификация по JEL: Q57.

Тадеев Юрий, канд. экон. наук, доцент кафедры экономической кибернетики, Национальный авиационный университет, Украина.

В работе [1] предложена и исследована на предмет существования неотрицательного решения нелинейная модель межотраслевого эколого-экономического баланса:

$$\begin{aligned} x^1 &= \Phi_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + y^1, \quad y^1 > 0, \\ x^2 &= \Phi_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) - y^1, \quad y^2 > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где x^1 – вектор-столбик валового выпуска продукции основным производством, y^1 – вектор-столбик выпуска конечной продукции, x^2 – вектор-столбик объемов уничтоженных загрязнителей вспомогательным производством (очистительными сооружениями), $\Phi_{11}(x^1)$ – вектор-столбик материальных затрат продукции при выпуске единицы продукции (вектор прямых материальных затрат основного производства), $\Phi_{12}(x^2)$ – вектор-столбик материальных затрат продукции при уничтожении единицы загрязнителей очистительными сооружениями, $\Phi_{21}(x^1)$ – вектор-столбик выпуска загрязнителей основным производством, $\Phi_{22}(x^2)$ – вектор-столбик выпуска загрязнителей вспомогательным производством (уничтожение загрязнителей).

Достаточное условие существования и единственности неотрицательного решения $x = (x^1, x^2)^T$ имеет вид [1]:

$$\Phi_{21}(y^1) \geq y^2. \tag{2}$$

В статье [2] построена и исследована на предмет существования и единственности магистрального развития линейная динамическая модель межотраслевого эколого-экономического баланса, что является расширенной версией классической π-модели [3]. В данной работе рассматривается расширение, которое состоит в перенесении динамической межотраслевой модели эколого-экономического баланса на нелинейный случай.

Предлагается следующая модель оптимального эколого-экономического развития:

$$
\begin{aligned}
& f_1(x_T^1) + f_2(x_T^2) \to \max, \\
& \Phi_{11}(x_t^1) + \Phi_{12}(x_t^2) + D_{11}(\eta_t^1) + D_{12}(\eta_t^2) + c^1 L_t \le x_t^1, \\
& \Phi_{12}(x_t^1) + \Phi_{22}(x_t^2) + D_{21}(\eta_t^1) + D_{22}(\eta_t^2) + c^2 L_t \le x_t^1 + y_t^2, \\
& x_t^1 \le \xi_{t-1}^1,\ x_t^2 \le \xi_{t-1}^2, \\
& \xi_t^1 \le \xi_{t-1}^1 + \eta_t^1,\ \xi_t^2 \le \xi_{t-1}^2 + \eta_t^2, \\
& l^1(x_t^1) + l^2(x_t^2) \le L_t, \\
& y_t^2 \le H_1(x_t^1) + H_2(x_t^2), \\
& x_t^1 \ge 0, x_t^2 \ge 0, \xi_t^1 \ge 0, \xi_t^2 \ge 0, \eta_t^1 \ge 0, \eta_t^2 \ge 0, L_t \ge 0, y_t^2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где $\xi_0^1 > 0$ и $\xi_0^2 > 0$ – заданные векторы.

В модели (3): x_t^1 – вектор полного выпуска продукции в период t; x_t^2 – вектор объемов, утилизированных очистительными сооружениями загрязнителей; y_t^2 – вектор выбросов загрязнителей в окружающую среду (не уничтоженные загрязнители); ξ_t^1 – вектор мощностей выпуска продукции; ξ_t^2 – вектор мощностей утилизации загрязнителей; η_t^1 – вектор приращений мощностей выпускающих областей; η_t^2 – вектор приращений мощностей очистительных сооружений; $\Phi_{11}(x_t^1)$ – вектор материальных затрат основного производства при выпуске продукции объемом x_t^1; $\Phi_{12}(x_t^2)$ – вектор материальных затрат в очистительных сооружениях при утилизации загрязнителей объемом x_t^2; $\Phi_{21}(x_t^1)$ – вектор выпуска загрязнителей основным производством при выпуске продукции объемом x_t^1; $\Phi_{22}(x_t^2)$ – вектор повторного выпуска загрязнителей очистительными сооружениями при утилизации загрязнителей объемом x_t^2; $D_{11}(\eta_t^1)$ – вектор материальных затрат при создании дополнительных приращений мощностей основного производства объемом η_t^1; $D_{12}(\eta_t^2)$ – вектор материальных затрат при создании дополнительных приращений мощностей очистительных сооружений объемом η_t^2; $D_{21}(\eta_t^1)$ – вектор выпуска загрязнителей при создании приращений мощностей основного производства объемом η_t^1; $D_{22}(\eta_t^2)$ – вектор выпуска загрязнителей при создании приращений мощностей очистительных сооружений объемом η_t^2; $H_1(x_t^1)$ – вектор технологических выбросов загрязнителей в окружающую среду основным производством при выпуске продукции объемом x_t^1; $H_2(x_t^2)$ – вектор технологических выбросов загрязнителей в окружающую среду очистительными сооружениями при утилизации загрязнителей объемом x_t^2; $c^1 > 0$ – вектор натуральной зарплаты одного работника, $c^2 > 0$ – вектор выпуска бытовых загрязнений на одного работника; $f_1(x_t^1)$ – скалярная функция экономического эффекта от выпуска продукции объемом x_t^1; $f_2(x_t^2)$ – скалярная функция экономического эффекта от утилизации загрязнителей объемом x_t^2; $l^1(x_t^1)$ – скалярная функция затрат трудовых ресурсов при выпуске продукции объемом x_t^1; $l^2(x_t^2)$ – скалярная функция затрат трудовых ресурсов при утилизации загрязнителей объемом x_t^2; L_t – общее количество работников в период t.

Исследуем состояние равновесия эколого-экономической системы (1). Соответствующая стационарная траектория интенсивностей функционирования равновесной системы определяется темпом роста $\lambda^{-1} > 1$, лучом Неймана $X = (x^1, x^2, \xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2, y^2, L)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} &x_t^1(t) = \lambda^{-t} x^1,\ x_t^2(t) = \lambda^{-t} x^2,\ \ \xi_t^1(t) = \lambda^{-t}\xi^1,\ \ \xi_t^2(t) = \lambda^{-t}\xi^2,\\ &\eta_t^1(t) = \lambda^{-t}\eta^1,\ \eta_t^2(t) = \lambda^{-t}\eta^2,\ \ y_t^2(t) = \lambda^{-t} y^2,\ \ L_t = \lambda^{-t} L. \end{aligned} \tag{4}$$

Будем считать, что все неотрицательные монотонно возрастающие скалярные и векторные функции, задействованные в модели (3), а именно $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $\Phi_{11}(\cdot)$, $\Phi_{12}(\cdot)$, $\Phi_{21}(\cdot)$, $\Phi_{22}(\cdot)$, $D_{11}(\cdot)$, $D_{12}(\cdot)$, $D_{21}(\cdot)$, $D_{22}(\cdot)$, $l^1(\cdot)$, $l^2(\cdot)$, $H_1(\cdot)$, $H_2(\cdot)$ являются линейно-однородными, т. е.:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ при } \lambda > 0 .$$

В этом случае, если подставить соотношение (4) в модель (3), то для состояния равновесия $(\lambda, x^1, x^2, \xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2, y^2, L)$ при больших T получим оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} &\lambda \to \min,\\ &x^1 \ge \Phi_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + D_{11}(\eta^1) + D_{12}(\eta^2) + Lc^1,\\ &x^2 \ge \Phi_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) + D_{21}(\eta^1) + D_{22}(\eta^2) + Lc^2 - y^2,\\ &x^1 \le \lambda\xi^1,\ x^2 \le \lambda\xi^2,\ (1-\lambda)\xi^1 \le \eta^1,\ (1-\lambda)\xi^2 \le \eta^2,\\ &l^1(x^1) + l^2(x^2) \le L,\\ &y^2 \le H_1(x^1) + H_2(x^2),\\ &x^1 \ge 0,\ x^2 \ge 0,\ \xi^1 \ge 0,\ \xi^2 \ge 0,\ \eta^1 \ge 0,\ \eta^2 \ge 0,\ L \ge 0,\ y^2 \ge 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку при $0 < \lambda < 1$ (именно этот случай является предметом исследования) имеем

$$x^1 \le \lambda\xi^1 \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta^1,\ x^2 \le \lambda\xi^2 \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta^2,$$

и следовательно

$$\eta^1 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}x^1,\ \eta^2 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}x^2,$$

это с учетом того, что вектор-функции $D_{11}(\cdot)$, $D_{12}(\cdot)$, $D_{21}(\cdot)$, $D_{22}(\cdot)$ являются неотрицательными монотонно возрастающими и линейно-однородными, получаем

$$D_{11}(\eta^1) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{11}(x^1),\ D_{12}(\eta^2) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{12}(x^2),$$
$$D_{21}(\eta^1) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{21}(x^1),\ D_{22}(\eta^2) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{22}(x^2).$$

Введем к рассмотрению следующие вектор-функции

$$\begin{aligned} &l^1(x^1)c^1 = R_{11}(x^1),\ l^2(x^2)c^1 = R_{12}(x^2),\\ &l^1(x^1)c^2 = R_{21}(x^1),\ l^2(x^2)c^2 = R_{22}(x^2), \end{aligned} \tag{6}$$

которые являются неотрицательными монотонно возрастающими и линейно-однородными векторами-функциями.

Очевидно, что

$$x^1 \ge \Phi_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + D_{11}(\eta^1) + D_{12}(\eta^2) + Lc^1 \ge$$
$$\ge \Phi_{11}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{12}(x^2) + (l^1(x^1) + l^2(x^2))c^1 \ge$$
$$\ge (\Phi_{11}(x^1) + R_{11}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{11}(x^1)) + (\Phi_{12}(x^2) + R_{12}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{12}(x^2)),$$

$$x^2 \ge \Phi_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) + D_{21}(\eta^1) + D_{22}(\eta^2) + Lc^2 - y^2 \ge$$
$$\ge \Phi_{21}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{22}(x^2) + (l^1(x^1) + l^2(x^2))c^2 - y^2 \ge$$
$$\ge (\Phi_{21}(x^1) + R_{21}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{21}(x^1)) + (\Phi_{22}(x^2) + R_{22}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{22}(x^2)) -$$
$$- H_1(x^1) - H_2(x^2).$$

После умножения обеих частей полученных неравенств на $\lambda > 0$ получаем следующее векторное неравенство

$$\lambda(\Phi(x) + R(x) - H(x) + (1-\lambda)D(x)) \le \lambda x, \tag{7}$$

где вектор-функции

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(x^1)+\Phi_{12}(x^2)\\ \Phi_{21}(x^1)+\Phi_{22}(x^2)\end{pmatrix},\quad R(x)=\begin{pmatrix}R_{11}(x^1)+R_{12}(x^2)\\ R_{21}(x^1)+R_{22}(x^2)\end{pmatrix},$$

$$D(x)=\begin{pmatrix}D_{11}(x^1)+D_{12}(x^2)\\ D_{21}(x^1)+D_{22}(x^2)\end{pmatrix},\quad \mathrm{H}(x)=\begin{pmatrix}0\\ H_1(x^1)+H_2(x^2)\end{pmatrix}$$

являются неотрицательными монотонно возрастающими линейно-однородными от векторного аргумента $x=(x^1,x^2)^T$.

Таким образом, задача максимизации темпа роста сбалансированной эколого-экономической системы сводится к такой нелинейной оптимизационной модели:

$$\lambda\to\min,\quad Q(\lambda,x)\le\lambda x,\, x\ge 0 \tag{8}$$

где

$$Q(\lambda,x)=\lambda(\Phi(x)+R(x)-H(x))+(1-\lambda)D(x). \tag{9}$$

Рассмотрим подробно вектор-функцию $\Phi(x)+R(x)-H(x)$, которая является линейно-однородной функцией. Поскольку $H(x)$ обозначает вектор суммарных технологических выбросов в окружающую среду загрязнителей основным производством и очистительными сооружениями, то, с экономической точки зрения, очевидно, что это значительно меньше общего выпуска загрязнителей основным производством, очистительными сооружениями и бытового загрязнения. Поэтому вектор-функцию $\Phi(x)+R(x)-H(x)$ можно считать неотрицательной. Это наше второе предположение относительно матриц $\Phi(x)$, $R(x)$ и $H(x)$ (напомним, что первое предположение касалось линейной однородности задействованных скалярных и векторных функций).

В работе Р. Солоу и П. Самуэльсона [4] впервые рассмотрена нелинейная задача о собственных векторах $\lambda v_i=H_i(v_1,v_2,...,v_n)(i=1,2,...,n)$, где все H_i – линейно-однородные функции, которые монотонно возрастают. В работе М. Моришими [5] доказано следующее утверждение:

Утверждение. *Пусть x – n-измеримый вектор $(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $H=(H_1,H_2,...,H_n)^T$ – также n-измеримый вектор, причем каждая его компонента H_i является непрерывной функцией от x. Если каждая функция H_i неотрицательная линейно-однородная функция от неотрицательного аргумента $x\ge 0$, то нелинейная задача о собственных векторах*

$$\lambda v_i = H_i(v),\ i = 1, 2, ..., n$$

имеет решение при неотрицательных $\lambda, v_1, v_2, ..., v_n$, *причем вектор* v *можно выбрать таким образом, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

В книге [6] приведена следующая лемма:

Лемма. *Пусть* $Q(\lambda)$ – $n \times n$ *– матрица, определенная и непрерывная на некотором отрезке* $[\lambda_1, \lambda_2]$, $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$. *Пусть* γ_1, γ_2 *– фробениусовы числа матриц* $Q(\lambda_1), Q(\lambda_2)$ *соответственно, причем* $\gamma_1 < \lambda_1, \gamma_2 \le \lambda_2$. *Тогда задача*

$$\lambda \to \min,\ Q(\lambda)x \le \lambda x, x \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

имеет единственное решение $(\bar{\lambda}, \bar{x})$, *причем:*

$$Q(\bar{\lambda})\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x};$$

$\bar{\lambda}$ *– число Фробениуса матрицы* $Q(\bar{\lambda})$;

$\bar{x}$ *– вектор Фробениуса матрицы* $Q(\bar{\lambda})$;

$$\bar{x} > 0,\ \lambda_1 \le \bar{\lambda} \le \lambda_2.$$

Используя суждения, лежащие в основе доказательства утверждения и леммы, проведем их относительно нелинейной оптимизационной задачи (8)-(9). Прежде всего, выберем $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Имеем $Q(0, x) = D(x)$, $Q(1, x) = \Phi(x) + R(x) - H(x)$. Соответствующие им фробениусовы числа $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 < 1$. Для вектор-функции $Q(\lambda, x) = \lambda(\Phi(x) + R(x) - H(x)) + (1-\lambda)D(x)$ выполняются все условия леммы, если при этом допускать (это уже третье предположение об $\Phi(x), R(x), H(x), D(x)$), что вектор-функция $Q(\lambda, x)$ продуктивна при всех $0 \le \lambda \le 1$. Продуктивность математически означает, что ее фробениусово число строго меньше единицы.

Таким образом, можно утверждать, что нелинейная оптимизационная задача (8)–(9) имеет единственное решение $\bar{\lambda} < 1, \bar{x} \ge 0$.

Приступим теперь к нахождению состояния равновесия эколого-экономической системы (3).

Пусть (x, ξ, η, y^2, L) – произвольный ненулевой вектор, который удовлетворяет систему неравенств (5), является решением этой системы при $\lambda = \bar{\lambda}$. Можно показать, что из условий $0 < \bar{\lambda} < 1$ и $(x, \xi, \eta, y^2, L) \neq 0$ вытекает, что $x \neq 0$. Из системы в (5) имеем неравенства

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} x \leq (1-\bar{\lambda})\xi \leq \eta, \qquad (10)$$

откуда с учетом $D(\eta) \geq 0$ получаем

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D(x) \leq D(\eta). \qquad (11)$$

Поскольку $R(x) = l(x)c$, то с (5), (11) имеем

$$\Phi(x) + R(x) - H(x) + \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D(x) \leq x. \qquad (12)$$

Поскольку $\bar{\lambda}$ – число Фробениуса, то очевидно, что (12) может выполняться лишь в том случае, когда x – вектор Фробениуса. Это означает, что в (12) неравенства превращаются в равенстве. Отсюда, в частности, получаем

$$R_{11}(x^1) + \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D_{11}(x^1) + R_{12}(x^2) + \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D_{12}(x^2) = Lc^1 + D_{11}(\eta^1) + D_{12}(\eta^2),$$

$$R_{21}(x^1) - H_1(x^1) + \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D_{21}(x^1) + R_{22}(x^2) - H_2(x^2) + \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D_{22}(x^2) =$$
$$= Lc^2 + D_{21}(\eta^1) + D_{22}(\eta^2) - y^2.$$

Поскольку

$$R_{11}(x^1) + R_{12}(x^2) = l(x)c^1 \leq Lc^1, \; R_{21}(x^1) + R_{22}(x^2) = l(x)c^2 \leq Lc^2,$$

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}(D_{11}(x^1) + D_{12}(x^2)) \leq D_{11}(\eta^1) + D_{12}(\eta^2),$$

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}(D_{21}(x^1) + D_{22}(x^2)) \leq D_{21}(\eta^1) + D_{22}(\eta^2),$$

$$H_1(x^1) + H_2(x^2) \geq y^2,$$

то здесь неравенства справедливые лишь в том случае, когда

$$l(x) = L,\ \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D(x) = D(\eta),\ H_1(x^1) + H_2(x^2) = y^2.$$

Поскольку

$$\eta - \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} x \geq 0,\ D(\eta - \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} x) = 0,$$

то из условий, наложенных на вектор-функцию $D(x)$, вытекает, что

$$\eta = \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} x. \qquad (13)$$

В таком случае имеем также

$$\xi = \bar{\lambda}^{-1} x. \qquad (14)$$

Тем самым показана единственность луча Неймана для нелинейной модели (3), что отвечает темпу роста $\bar{\lambda}^{-1}$.

Таким образом, в работе установлена магистральная траектория устойчивого развития для нелинейной расширенной π-модели, когда нелинейные функции модели являются неотрицательными монотонно возрастающими и линейно-однородными. При этом было доказано существование корня Фробениуса для нелинейной задачи как по собственному числу, так и по собственному вектору.

Литература

1. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: Вища школа, 1999. – 236 с.
2. Ляшенко І. М., Тадеєв Ю. П. Оптимальна траєкторія міжгалузевої моделі еколого-економічного розвитку // Журнал європейської економіки, видання Тернопільської академії народного господарства. – 2005. – № 1. – Т. 4. – С. 21–30.
3. Иванилов Ю. П., Петров А. А. Динамическая модель расширения и перестройки производства (π-модель) // Кибернетику – на службу коммунизму. – Т. 6. – М.: Энергия, 1971. – С. 23.
4. Solow R. M. and Samuelson P. A. Balanced Growth under Constant Returns to Scale, Econometrica XXI (July 1953). – С. 412–424.

5. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ). – М.: Наука, 1972. – 280 с.

6. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка: Навч. посіб. / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К.: Вища школа, 2004. – 207 с.

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2008 г.